उत्तरमाला

प्रश्नावली 1.1

1. (a) लाहुलस्पीती: –8°C, श्रीनगर: –2°C, शिमला: 5°C, ऊटी: 14°C, बैंगलौर: 22°C

(b) 30°C (c) 6°C (d) हाँ; नहीं

2. 35 **3.** –7°C; –3°C **4.** 6200 m **5.** एक धनात्मक संख्या द्वारा; ₹ 358

6. एक ऋणात्मक संख्या द्वारा; – 10. **7.** (ii) एक मायावी वर्ग है

9. (a) < (b) < (c) > (d) < (e) >

10. (i) 11 छलांगों में (ii) 5 छलांगों में

(iii) (a) –3 + 2 –3 + 2 – 3 + 2 – 3 + 2 –3 + 2 –3 = – 8 (b) 4 – 2 + 4 – 2 + 4 = 8

(b) में संख्या 8, ऊपर की तरफ 8 सीढ़ियाँ चढ़ने को निरुपित करता है

प्रश्नावली 1.2

1. एक ऐसा युग्म यह हो सकता है

(a) –10, 3 (b) – 6, 4; (– 6 – 4 = –10) (c) –3, 3

2. एक ऐसा युग्म यह हो सकता है

(a) –2, –10; [–2 – (–10) = 8] (b) – 6, 1 (c) –1, 2; (–1 – 2 = –3)

3. दोनों टीमों को समान अंक प्राप्त हुए, यानि –30; हाँ

4. (i) –5 (ii) 0 (iii) –17 (iv) –7 (v) –3

प्रश्नावली 1.3

1. (a) –3 (b) –225 (c) 630 (d) 316 (e) 0

(f) 1320 (g) 162 (h) –360 (i) –24 (j) 36

3. (i) $-a$ (ii) (a) 22 (b) –37 (c) 0

4. –1 × 5 = –5, –1 × 4 = – 4 = – 5 + 1, – 1 × 3 = – 3 = – 4 + 1,

–1 × 2 = – 2 = – 3 + 1, – 1 × 1 = – 1 = – 2 + 1, – 1 × 0 = 0 = – 1 + 1 अत: – 1 × (–1) = 0 + 1 = 1.

5. (a) 480 (b) – 53000 (c) – 15000 (d) – 4182

(e) – 62500 (f) 336 (g) 493 (h) 1140

6. – 10°C **7.** (i) 8 (ii) 15 (iii) 0

8. (a) ₹ 1000 की हानि (b) 4000 बोरियाँ

9. (a) – 9 (b) – 7 (c) 7 (d) – 11

प्रश्नावली 1.4

1. (a) –3 (b) –10 (c) 4 (d) –1
(e) –13 (f) 0 (g) 1 (h) –1 (i) 1

3. (a) 1 (b) 75 (c) – 206 (d) –1
(e) – 87 (f) – 48 (g) –10 (h) –12

4. (–6, 2), (–12, 4), (12, – 4), (9, –3), (–9, 3) (इसी तरह के अन्य कई युग्म हो सकते हैं)

5. 9 सायं; – 14°C **6.** (i) 8 (ii) 13 **7.** 1 घंटा

प्रश्नावली 2.1

1. (i) $\frac{7}{5}$ (ii) $\frac{39}{8} = 4\frac{7}{8}$ (iii) $\frac{31}{35}$ (iv) $\frac{91}{165}$

(v) $\frac{13}{5} = 2\frac{3}{5}$ (vi) $\frac{37}{6} = 6\frac{1}{6}$ (vii) $\frac{39}{8} = 4\frac{7}{8}$

2. (i) $\frac{2}{3}, \frac{8}{21}, \frac{2}{9}$ (ii) $\frac{7}{10}, \frac{3}{7}, \frac{1}{5}$ **3.** हाँ **4.** $\frac{139}{3} = 46\frac{1}{3}$ cm

5. (i) $8\frac{17}{20}$cm (ii) $7\frac{5}{6}$cm; ΔABE का परिमाप ज्यादा है

6. $\frac{3}{10}$cm **7.** $\frac{2}{5}$; रीतू; $\frac{1}{5}$ **8.** वैभव; द्वारा $\frac{1}{6}$ घंटे से

प्रश्नावली 2.2

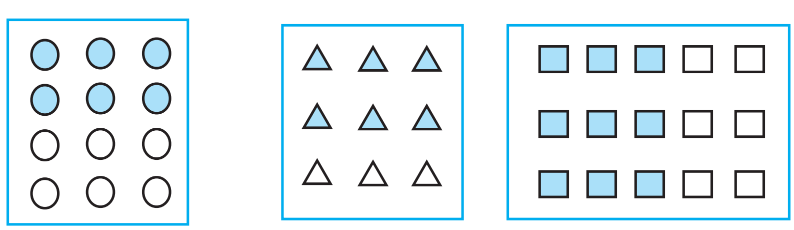
1. (i) (d) (ii) (b) (iii) (a) (iv) (c)

2. (i) (c) (ii) (a) (iii) (b)

3. (i) $4\frac{1}{5}$ (ii) $1\frac{1}{3}$ (iii) $1\frac{5}{7}$ (iv) $1\frac{1}{9}$ (v) $2\frac{2}{3}$

(vi) 15 (vii) $6\frac{2}{7}$ (viii) 16 (ix) $4\frac{1}{3}$ (x) 9

4. यह एक तरीका हो सकता है



(i) (ii) (iii)

5. (a) (i) 12 (ii) 23 (b) (i) 12 (ii) 18 (c) (i) 12 (ii) 27 (d) (i) 16 (ii) 28

6. (a) $15\frac{3}{5}$ (b) $33\frac{3}{4}$ (c) $15\frac{3}{4}$ (d) $25\frac{1}{3}$

(e) $19\frac{1}{2}$ (f) $27\frac{1}{5}$

7. (a) (i) $1\frac{3}{8}$ (ii) $2\frac{1}{9}$ (b) (i) $2\frac{19}{48}$ (ii) $6\frac{1}{24}$ **8.** (i) 2 लिटर (ii) $\frac{3}{5}$

प्रश्नावली 2.3

1. (i) (a) $\frac{1}{16}$ (b) $\frac{3}{20}$ (c) $\frac{1}{3}$ (ii) (a) $\frac{2}{63}$ (b) $\frac{6}{35}$ (c) $\frac{3}{70}$

2. (i) $1\frac{7}{9}$ (ii) $\frac{2}{9}$ (iii) $\frac{9}{16}$ (iv) $1\frac{2}{25}$

(v) $\frac{5}{8}$ (vi) $1\frac{13}{20}$ (vii) $1\frac{13}{35}$

3. (i) $2\frac{1}{10}$ (ii) $4\frac{44}{45}$ (iii) 8 (iv) $2\frac{1}{42}$ (v) $1\frac{33}{35}$ (vi) $7\frac{4}{5}$ (vii) $2\frac{1}{7}$

4. (i) $\frac{5}{8}$ का $\frac{3}{5}$ (ii) $\frac{6}{7}$ का $\frac{1}{2}$ **5.** $2\frac{1}{4}$ m **6.** $10\frac{1}{2}$ घंटे **7.** 44 km

8. (a) (i) $\frac{5}{10}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (b) (i) $\frac{8}{15}$ (ii) $\frac{8}{15}$

प्रश्नावली 2.4

1. (i) 16 (ii) $\frac{84}{5}$ (iii) $\frac{24}{7}$ (iv) $\frac{3}{2}$ (v) $\frac{9}{7}$ (vi) $\frac{7}{5}$

2. (i) $\frac{7}{3}$ (विषम भिन्न) (ii) $\frac{8}{5}$ (विषम भिन्न) (iii) $\frac{7}{9}$ (उचित भिन्न)

(iv) $\frac{5}{6}$ (उचित भिन्न) (v) $\frac{7}{12}$ (उचित भिन्न) (vi) 8 (पूर्ण संख्या)

(vii) 11 (पूर्ण संख्या)

3. (i) $\frac{7}{6}$ (ii) $\frac{4}{45}$ (iii) $\frac{6}{91}$ (iv) $\frac{13}{9}$ (v) $\frac{7}{8}$ (vi) $\frac{31}{49}$

4. (i) $\frac{4}{5}$ (ii) $\frac{2}{3}$ (iii) $\frac{3}{8}$ (iv) $\frac{35}{9}$ (v) $\frac{21}{16}$ (vi) $\frac{4}{15}$

(vii) $\frac{48}{25}$ (viii) $\frac{11}{6}$

प्रश्नावली 2.5

1. (i) 0.5 (ii) 0.7 (iii) 7 (iv) 1.49 (v) 2.30 (vi) 0.88

2. (i) ₹ 0.07 (ii) ₹ 7.07 (iii) ₹ 77.77 (iv) ₹ 0.50 (v) ₹ 2.35

3. (i) 0.05 m, 0.00005 km (ii) 3.5 cm, 0.035 m, 0.000035 km

4. (i) 0.2 kg (ii) 3.470 kg (iii) 4.008 kg

5. (i) $2 \times 10 + 0 \times 1 + 0 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{1}{100}$ (ii) $2 \times 1 + 0 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{1}{100}$

(iii) $2 \times 100 + 0 \times 10 + 0 \times 1 + 0 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{1}{100}$

(iv) $2 \times 1 + 0 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{1}{100} + 4 \times \frac{1}{1000}$

6. (i) इकाई (ii) दहाई (iii) दशांश (iv) शतांश (v) सहस्रांश

7. अयूब ने ज़्यादा दूरी तय की। यह दूरी 0.9 km या 900 m ज़्यादा थी। **8.** सरला ने अधिक फल खरीदे। **9.** 14.6 km

प्रश्नावली 2.6

1. (i) 1.2 (ii) 36.8 (iii) 13.55 (iv) 80.4 (v) 0.35 (vi) 844.08
(vii) 1.72

2. 17.1 cm^2

3. (i) 13 (ii) 368 (iii) 1537 (iv) 1680.7 (v) 3110 (vi) 15610
(vii) 362 (viii) 4307 (ix) 5 (x) 0.8 (xi) 90 (xii) 30

4. 553 km **5.** (i) 0.75 (ii) 5.17 (iii) 63.36 (iv) 4.03 (v) 0.025
(vi) 1.68 (vii) 0.0214 (viii) 10.5525 (ix) 1.0101 (x) 110.011

प्रश्नावली 2.7

1. (i) 0.2 (ii) 0.07 (iii) 0.62 (iv) 10.9 (v) 162.8 (vi) 2.07
(vii) 0.99 (viii) 0.16

2. (i) 0.48 (ii) 5.25 (iii) 0.07 (iv) 3.31 (v) 27.223 (vi) 0.056
(vii) 0.397

3. (i) 0.027 (ii) 0.003 (iii) 0.0078 (iv) 4.326 (v) 0.236 (vi) 0.9853

4. (i) 0.0079 (ii) 0.0263 (iii) 0.03853 (iv) 0.1289 (v) 0.0005

5. (i) 2 (ii) 180 (iii) 6.5 (iv) 44.2 (v) 2 (vi) 31
(vii) 510 (viii) 27 (ix) 2.1 **6.** 1.8 km

प्रश्नावली 3.1

2.

अंक	मिलान चिह्न	बारंबारता
1	|	1
2	||	2

3	|	1
4	|||	3
5	~~||||~~	5
6	||||	4
7	||	2
8	|	1
9	|	1

(i) 9 (ii) 1 (iii) 8 (iv) 5

3. 2 **4.** 50 **5.** (i) 12.5 (ii) 3 (iii) $\frac{0+8+6+4}{4} = \frac{18}{4}$ या $\frac{9}{2}$ (iv) A

6. (i) सबसे अधिक अंक = 95, सबसे कम अंक = 39 (ii) 56 (iii) 73 **7.** 2058

8. (i) 20.5 (ii) 5.9 (iii) 5 **9.** (i) 151 cm (ii) 128 cm (iii) 23 cm (iv) 141.4 cm (v) 5

प्रश्नावली 3.2

1. बहुलक = 20, माध्यक = 20, हाँ **2.** माध्य = 39, बहुलक = 15, माध्यक = 15, नहीं

3. (i) बहुलक = 38, 43; माध्यक = 40 (ii) हाँ, इनके दो बहुलक हैं

4. बहुलक = 14, माध्यक = 14

5. (i) सत्य (ii) असत्य (iii) सत्य (iv) असत्य

प्रश्नावली 3.3

1. (a) बिल्ली (b) 8

4. (i) गणित (ii) सामाजिक विज्ञान (iii) हिंदी

5. (ii) क्रिकेट (iii) खेल देखना

6. (i) जम्मू (ii) जम्मू, बैंगलौर

(iii) बैंगलौर और जयपुर या बैंगलौर और अहमदाबाद (iv) मुंबई

प्रश्नावली 3.4

1. (i) निश्चित है (ii) हो भी सकता है, परंतु निश्चित रुप से नहीं (iii) अंसभव

(iv) हो भी सकता है, परंतु निश्चित रुप से नहीं (v) हो भी सकता है, परंतु निश्चित रुप से नहीं

2. (i) $\frac{1}{6}$ (ii) $\frac{1}{6}$ **3.** $\frac{1}{2}$

प्रश्नावली 4.1

1. (i) नहीं (ii) नहीं (iii) हाँ (iv) नहीं (v) हाँ (vi) नहीं
   (vii) हाँ (viii) नहीं (ix) नहीं (x) नहीं (xi) हाँ
2. (a) नहीं (b) नहीं (c) हाँ (d) नहीं (e) नहीं (f) नहीं
3. (i) $p = 3$ (ii) $m = 6$
4. (i) $x + 4 = 9$ (ii) $y - 2 = 8$ (iii) $10a = 70$ (iv) $\frac{b}{5} = 6$
   (v) $\frac{3t}{4} = 15$ (vi) $7m + 7 = 77$ (vii) $\frac{x}{4} - 4 = 4$ (viii) $6y - 6 = 60$
   (ix) $\frac{z}{3} + 3 = 30$
5. (i) p और 4 का योग 15 है (ii) m में से 7 घटाने पर 3 प्राप्त होता है
   (iii) एक संख्या m का दुगुना 7 है (iv) संख्या m का $\frac{1}{5}$, 3 होता है
   (v) संख्या m का $\frac{3}{5}$, 6 होता है (vi) संख्या p के तीन गुने का 4 से योग 25 है
   (vii) संख्या p के चार गुने में से 2 घटाने पर 18 मिलते हैं।
   (viii) संख्या p के आधे में से 2 घटाने पर 8 मिलता है।
6. (i) $5m + 7 = 37$ (ii) $3y + 4 = 49$ (iii) $2l + 7 = 87$ (iv) $4b = 180°$

प्रश्नावली 4.2

1. (a) दोनों पक्षों में 1 जोड़िए; $x = 1$ (b) दोनों पक्षों में से 1 घटाइए; $x = -1$
   (c) दोनों पक्षों में 1 जोड़िए; $x = 6$ (d) दोनों पक्षों में से 6 घटाइए; $x = -4$
   (e) दोनों पक्षों में 4 जोड़िए; $y = -3$ (f) दोनों पक्षों में 4 जोड़िए; $y = 8$
   (g) दोनों पक्षों में से 4 घटाइए; $y = 0$ (h) दोनों पक्षों में से 4 घटाइए; $y = -8$
2. (a) दोनों पक्षों को 3 से भाग दें; $l = 14$ (b) दोनों पक्षों को 2 से गुणा करें; $b = 12$
   (c) दोनों पक्षों को 7 से गुणा करें; $p = 28$ (d) दोनों पक्षों को 4 से भाग दें; $x = \frac{25}{4}$
   (e) दोनों पक्षों को 8 से भाग दें; $y = \frac{36}{8}$ (f) दोनों पक्षों को 3 से गुणा करें; $z = \frac{15}{4}$
   (g) दोनों पक्षों को 5 से गुणा करें; $a = \frac{7}{3}$ (h) दोनों पक्षों को 20 से भाग दें; $t = -\frac{1}{2}$
3. (a) चरण 1: दोनों पक्षों में 2 जोड़ें
   चरण 2: दोनों पक्षों को 3 से भाग दें; $n = 16$
   (b) चरण 1: दोनों पक्षों में से 7 घटाइए
   चरण 2: दोनों पक्षों को 5 से भाग दें; $m = 2$
   (c) चरण 1: दोनों पक्षों को 3 से गुणा करें
   चरण 2: दोनों पक्षों को 20 से भाग दें; $p = 6$
   (d) चरण 1: दोनों पक्षों को 10 से गुणा करें
   चरण 2: दोनों पक्षों को 3 से भाग दें; $p = 20$

4. (a) $p = 10$ (b) $p = 9$ (c) $p = 20$ (d) $p = -15$ (e) $p = 8$ (f) $s = -3$
(g) $s = -4$ (h) $s = 0$ (i) $q = 3$ (j) $q = 3$ (k) $q = -3$ (l) $q = 3$

प्रश्नावली 4.3

1. (a) $y = 8$ (b) $t = \frac{-18}{5}$ (c) $a = -5$ (d) $q = -8$ (e) $x = -4$ (f) $x = \frac{5}{2}$
(g) $m = \frac{1}{2}$ (h) $z = -2$ (i) $l = \frac{4}{9}$ (j) $b = 12$

2. (a) $x = 2$ (b) $n = 12$ (c) $n = -2$ (d) $x = -4$ (e) $x = 0$

3. (a) $p = \frac{14}{3}$ (b) $p = \frac{6}{5}$ (c) $t = 2$ (d) $p = 7$ (e) $m = 2$

4. (a) वे संभावित समीकरण हैं: $10x + 2 = 22$; $\frac{x}{5} = \frac{2}{5}$; $5x - 3 = 7$
(b) वे संभावित समीकरण हैं: $3x = -6$; $3x + 7 = 1$; $3x + 10 = 4$

प्रश्नावली 4.4

1. (a) $8x + 4 = 60$; $x = 7$ (b) $\frac{x}{5} - 4 = 3$; $x = 35$ (c) $\frac{3}{4}y + 3 = 21$; $y = 24$
(d) $2m - 11 = 15$; $m = 13$ (e) $50 - 3x = 8$; $x = 14$ (f) $\frac{x+19}{5} = 8$; $x = 21$
(g) $\frac{5n}{2} - 7 = 23$; $n = 12$

2. (a) न्यूनतम अंक = 40 (b) प्रत्येक कोण 70° (c) सचिन : 132 रन, राहुल: 66 रन

3. (i) 6 (ii) 15 वर्ष (iii) 25 4. 30

प्रश्नावली 5.1

1. (i) 70° (ii) 27° (iii) 33°
2. (i) 75° (ii) 93° (iii) 26°
3. (i) संपूरक (ii) पूरक (iii) संपूरक
(iv) संपूरक (v) पूरक (vi) पूरक
4. 45° 5. 90° 6. जिस माप से $\angle 1$ घटेगा उसी माप से $\angle 2$ बढ़ेगा
7. (i) नहीं (ii) नहीं (iii) हाँ 8. 45° से कम
9. (i) हाँ (ii) नहीं (iii) हाँ (iv) हाँ (v) हाँ (vi) $\angle COB$
10. (i) $\angle 1, \angle 4$; $\angle 5, \angle 2 + \angle 3$ (ii) $\angle 1, \angle 5$; $\angle 4, \angle 5$
11. $\angle 1$ और $\angle 2$ आसन्न कोण नहीं हैं क्योंकि उनके शीर्ष उभयनिष्ठ नहीं है
12. (i) $x = 55°, y = 125°, z = 125°$ (ii) $x = 115°, y = 140°, z = 40°$

13. (i) 90° (ii) 180° (iii) संपूरक (iv) रैखिक युग्म (v) समान
(vi) अधिक कोण

14. (i) $\angle$AOD, $\angle$BOC (ii) $\angle$EOA, $\angle$AOB (iii) $\angle$EOB, $\angle$EOD
(iv) $\angle$EOA, $\angle$EOC (v) $\angle$AOB, $\angle$AOE; $\angle$AOE, $\angle$EOD; $\angle$EOD, $\angle$COD

प्रश्नावली 5.2

1. (i) संगत कोण गुणधर्म (ii) अंत: एकांतर कोण गुणधर्म
(iii) तिर्यक छेदी रेखा के एक ही तरफ बने अंत: कोणों का प्रत्येक युग्म संपूरक होता है।

2. (i) $\angle 1, \angle 5; \angle 2, \angle 6; \angle 3, \angle 7; \angle 4, \angle 8$ (ii) $\angle 2, \angle 8; \angle 3, \angle 5$
(iii) $\angle 2, \angle 5; \angle 3, \angle 8$ (iv) $\angle 1, \angle 3; \angle 2, \angle 4; \angle 5, \angle 7; \angle 6, \angle 8$

3. $a = 55°; b = 125°; c = 55°; d = 125°; e = 55°; f = 55°$

4. (i) $x = 70°$ (ii) $x = 100°$

5. (i) $\angle$DGC = 70° (ii) $\angle$DEF = 70°

6. (i) l , m के समांतर नहीं है। (ii) l , m के समांतर नहीं है।
(iii) l , m के समांतर है। (iv) l , m के समांतर नहीं है।

प्रश्नावली 6.1

1. ऊँचाई, माध्यिका, नहीं

प्रश्नावली 6.2

1. (i) 120° (ii) 110° (iii) 70° (iv) 120° (v) 100° (vi) 90°

2. (i) 65° (ii) 30° (iii) 35° (iv) 60° (v) 50° (vi) 40°

प्रश्नावली 6.3

1. (i) 70° (ii) 60° (iii) 40° (iv) 65° (v) 60° (vi) 30°

2. (i) $x = 70°, y = 60°$ (ii) $x = 50°, y = 80°$ (iii) $x = 110°, y = 70°$
(iv) $x = 60°, y = 90°$ (v) $x = 45°, y = 90°$ (vi) $x = 60°, y = 60°$

प्रश्नावली 6.4

1. (i) संभव नहीं है (ii) संभव है (iii) संभव नहीं है

2. (i) हाँ (ii) हाँ (iii) हाँ **3.** हाँ **4.** हाँ **5.** नहीं

6. 3 और 27 के बीच

प्रश्नावली 6.5

1. 26 cm **2.** 24 cm **3.** 9 m **4.** (i) और (iii) **5.** 18m **6.** (ii)

7. 98 cm **8.** 68 cm

प्रश्नावली 7.1

1. (a) दोनों की लंबाई समान है (b) 70° (c) $m\angle A = m\angle B$

3. $\angle A \leftrightarrow \angle F$, $\angle B \leftrightarrow \angle E$, $\angle C \leftrightarrow \angle D$, $\overline{AB} \leftrightarrow \overline{FE}$, $\overline{BC} \leftrightarrow \overline{ED}$, $\overline{AC} \leftrightarrow \overline{FD}$

4. (i) $\angle C$ (ii) $\overline{CA}$ (iii) $\angle A$ (iv) $\overline{BA}$

प्रश्नावली 7.2

1. (a) SSS सर्वांगसमता प्रतिबंध (b) SAS सर्वांगसमता प्रतिबंध
(c) ASA सर्वांगसमता प्रतिबंध (d) RHS सर्वांगसमता प्रतिबंध

2. (a) (i) PE (ii) EN (iii) PN (b) (i) EN (ii) AT
(c) (i) $\angle RAT = \angle EPN$ (ii) $\angle ATR = \angle PNE$

3. (i) दिया है (ii) दिया है (iii) उभयनिष्ठ (iv) SAS सर्वांगसमता प्रतिबंध **4.** नहीं

5. ΔWON **6.** ΔBTA, ΔTPQ **9.** BC = QR, ASA सर्वांगसमता प्रतिबंध

प्रश्नावली 8.1

1. (a) 10:1 (b) 500:7 (c) 100:3 (d) 20:1 **2.** 12 कंप्यूटर

3. (i) राजस्थान : 190 व्यक्ति ; उत्तर प्रदेश : 830 व्यक्ति (ii) राजस्थान

प्रश्नावली 8.2

1. (a) 12.5% (b) 125% (c) 7.5% (d) $28\frac{4}{7}\%$

2. (a) 65% (b) 210% (c) 2% (d) 1235%

3. (i) $\frac{1}{4}$, 25% (ii) $\frac{3}{5}$; 60% (iii) $\frac{3}{8}$; 37.5%

4. (a) 37.5 (b) $\frac{3}{5}$ मिनट या 36 सेकंड (c) ₹ 500 (d) 0.75 kg या 750 g

5. (a) 12000 (b) ₹ 9000 (c) 1250 km (d) 20 मिनट (e) 500 लिटर

6. (a) 0.25; $\frac{1}{4}$ (b) 1.5; $\frac{3}{2}$ (c) 0.2; $\frac{1}{5}$ (d) 0.05; $\frac{1}{20}$ **7.** 30%

8. 40%; 6000 **9.** ₹ 40000 **10.** 5 मैच

प्रश्नावली 8.3

1. (a) लाभ = ₹ 75; लाभ % = 30 (b) लाभ = ₹ 1500; लाभ % = 12.5
(c) लाभ = ₹ 500; लाभ % = 20 (d) हानि = ₹ 100; हानि % = 40

2. (a) 75%; 25% (b) 20%, 30%, 50% (c) 20%; 80% (d) 12.5%; 25%; 62.5%

3. 2% **4.** $5\frac{5}{7}\%$ **5.** ₹ 12000 **6.** ₹ 16875

7. (i) 12% (ii) 25 g **8.** ₹ 233.75 **9.** (a) ₹ 1632 (b) ₹ 8625

10. 0.25% **11.** ₹ 500

प्रश्नावली 9.1

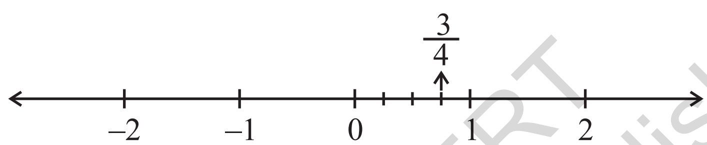
1. (i) $\frac{-2}{3}, \frac{-1}{2}, \frac{-2}{5}, \frac{-1}{3}, \frac{-2}{7}$ (ii) $\frac{-3}{2}, \frac{-5}{3}, \frac{-8}{5}, \frac{-10}{7}, \frac{-9}{5}$

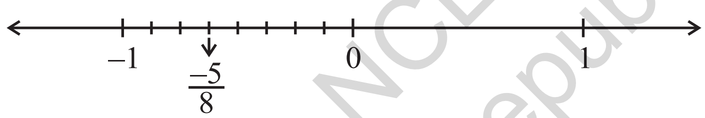
(iii) $\frac{-35}{45} = \frac{-7}{9}, \frac{-34}{45}, \frac{-33}{45} = \frac{-11}{15}, \frac{-32}{45}, \frac{-31}{45}$ (iv) $\frac{-1}{3}, \frac{-1}{4}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$

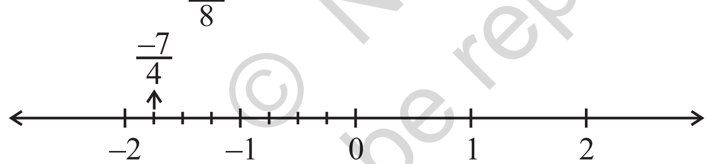
2. (i) $\frac{-15}{25}, \frac{-18}{30}, \frac{-21}{35}, \frac{-24}{40}$ (ii) $\frac{-4}{16}, \frac{-5}{20}, \frac{-6}{24}, \frac{-7}{28}$

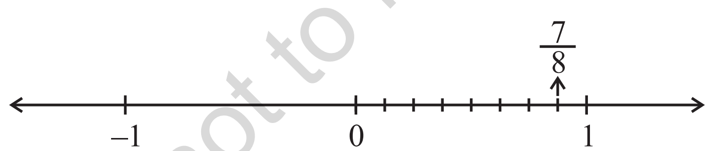
(iii) $\frac{5}{-30}, \frac{6}{-36}, \frac{7}{-42}, \frac{8}{-48}$ (iv) $\frac{8}{-12}, \frac{10}{-15}, \frac{12}{-18}, \frac{14}{-21}$

3. (i) $\frac{-4}{14}, \frac{-6}{21}, \frac{-8}{28}, \frac{-10}{35}$ (ii) $\frac{10}{-6}, \frac{15}{-9}, \frac{20}{-12}, \frac{25}{-15}$ (iii) $\frac{8}{18}, \frac{12}{27}, \frac{16}{36}, \frac{28}{63}$

4. (i)


(ii)


(iii)


(iv)


5. P निरूपित करता है $\frac{7}{3}$; Q निरूपित करता है $\frac{8}{3}$;R निरूपित करता है $\frac{-4}{3}$; S निरूपित करता है $\frac{-5}{3}$

6. (ii), (iii), (iv), (v)

7. (i) $\frac{-4}{3}$ (ii) $\frac{5}{9}$ (iii) $\frac{-11}{18}$ (iv) $\frac{-4}{5}$

8. (i) $<$ (ii) $<$ (iii) $=$ (iv) $>$ (v) $<$ (vi) $=$ (vii) $>$

9. (i) $\frac{5}{2}$ (ii) $\frac{-5}{6}$ (iii) $\frac{2}{-3}$ (iv) $\frac{1}{4}$ (v) $-3\frac{2}{7}$

10. (i) $\frac{-3}{5}, \frac{-2}{5}, \frac{-1}{5}$ (ii) $\frac{-4}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-2}{9}$ (iii) $\frac{-3}{2}, \frac{-3}{4}, \frac{-3}{7}$

प्रश्नावली 9.2

1. (i) $\frac{-3}{2}$ (ii) $\frac{34}{15}$ (iii) $\frac{17}{30}$ (iv) $\frac{82}{99}$

(v) $\frac{-26}{57}$ (vi) $\frac{-2}{3}$ (vii) $\frac{34}{15}$

2. (i) $\frac{-13}{72}$ (ii) $\frac{23}{63}$ (iii) $\frac{1}{195}$ (iv) $\frac{-89}{88}$ (v) $\frac{-73}{9}$

3. (i) $\frac{-63}{8}$ (ii) $\frac{-27}{10}$ (iii) $\frac{-54}{55}$ (v) $\frac{-6}{35}$ (v) $\frac{6}{55}$

(vi) 1

4. (i) – 6 (ii) $\frac{-3}{10}$ (iii) $\frac{4}{15}$ (iv) $\frac{-1}{6}$ (v) $\frac{-14}{13}$

(vi) $\frac{91}{24}$ (vii) $\frac{-15}{4}$

प्रश्नावली 11.1

1. (i) 150000 m^2 (ii) ₹ 1,500,000,000

2. 6400 m^2 **3.** 20 m **4.** 15 cm; 525 cm^2 **5.** 40 m

6. 31cm; Square **7.** 35cm; 1050 cm^2 **8.** ₹ 284

प्रश्नावली 11.2

1. (a) 28 cm^2 (b) 15 cm^2 (c) 8.75 cm^2 (d) 24 cm^2 (e) 8.8 cm^2

2. (a) 6 cm^2 (b) 8 cm^2 (c) 6 cm^2 (d) 3 cm^2

3. (a) 12.3 cm (b) 10.3 cm (c) 5.8 cm (d) 1.05 cm

4. (a) 11.6 cm (b) 80 cm (c) 15.5 cm

5. (a) 91.2 cm^2 (b) 11.4 cm

6. BM की लंबाई = 30cm; DL की लंबाई = 42 cm

7. ΔABC का क्षेत्रफल = 30 cm^2; AD की लंबाई = $\frac{60}{13}$ cm

8. ΔABC का क्षेत्रफल = 27 cm^2; CE की लंबाई = 7.2 cm

प्रश्नावली 11.3

1. (a) 88 cm (b) 176 mm (c) 132 cm

2. (a) 616 mm^2 (b) 1886.5 m^2 (c) $\frac{550}{7}$ cm^2

3. 24.5 m; 1886.5 m^2 **4.** 132 m; ₹ 528 **5.** 21.98 cm^2

6. 4.71 m; ₹ 70.65 **7.** 25.7 cm **8.** ₹ 30.14 (लगभग) **9.** 7 cm; 154 cm^2; 11cm; वृत

10. 536 cm^2 **11.** 23.44 cm^2 **12.** 5 cm; 78.5 cm^2 **13.** 879.20 m^2

14. हाँ **15.** 119.32 m; 56.52m **16.** 200 बार **17.** 94.2 cm

प्रश्नावली 11.4

1. 1750 m^2 ; 0.675 ha **2.** 1176 m^2 **3.** 30 cm^2

4. (i) 63 m^2 (ii) ₹ 12,600 **5.** (i) 116 m^2 (ii) ₹ 31,360

6. 0.99 ha; 20.01 ha **7.** (i) 441 m^2 (ii) ₹ 48,510 **8.** हाँ, 12 cm रस्सी बचती है

9. (i) 50 m^2 (ii) 12.56 m^2 (iii) 37.44 m^2 (iv) 12.56 m

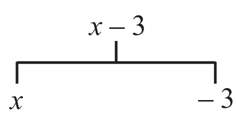
10. (i) 110 cm^2 (ii) 150 cm^2 **11.** 66 cm^2

प्रश्नावली 12.1

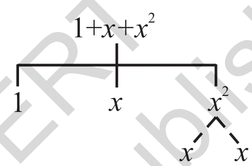
1. (i) $y - z$ (ii) $\frac{1}{2}(x + y)$ (iii) z^2 (iv) $\frac{1}{4}pq$ (v) $x^2 + y^2$ (vi) $5 + 3\,mn$

(vii) $10 - yz$ (viii) $ab - (a + b)$

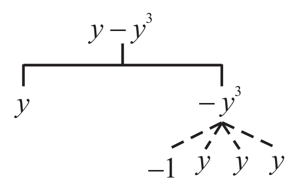
2. (i) (a)



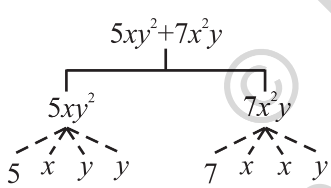
(b)



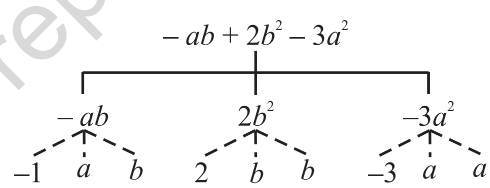
(c)



(d)



(e)



(ii)

	व्यंजक	पद	गुणनखंड
(a)	$-4x + 5$	$-4x$ 5	$-4, x$ 5
(b)	$-4x + 5y$	$-4x$ $5y$	$-4, x$ $5, y$
(c)	$5y + 3y^2$	$5y$ $3y^2$	$5, y$ $3, y, y$
(d)	$xy + 2x^2y^2$	xy $2x^2y^2$	x, y $2, x, x, y, y$
(e)	$pq + q$	pq q	p, q q
(f)	$1.2ab - 2.4b + 3.6a$	$1.2ab$ $-2.4b$ $3.6a$	$1.2, a, b$ $-2.4, b$ $3.6, a$

(g)	$\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}x$ $\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}, x$ $\frac{1}{4}$
(h)	$0.1p^2 + 0.2q^2$	$0.1p^2$ $0.2q^2$	$0.1, p, p$ $0.2, q, q$

3.

	व्यंजक	पद	गुणनखंड
(i)	$5 - 3t^2$	$-3t^2$	-3
(ii)	$1 + t + t^2 + t^3$	t t^2 t^3	1 1 1
(iii)	$x + 2xy + 3y$	x $2xy$ $3y$	1 2 3
(iv)	100 m +1000 n	100 m 1000 n	100 1000
(v)	$-p^2q^2 + 7pq$	$-p^2q^2$ $7pq$	-1 7
(vi)	$1.2a + 0.8b$	$1.2\ a$ $0.8\ b$	1.2 0.8
(vii)	$3.14r^2$	$3.14r^2$	3.14
(viii)	$2(l + b)$	$2l$ $2b$	2 2
(ix)	$0.1y + 0.01y^2$	$0.1y$ $0.01y^2$	0.1 0.01

4. (a)

	व्यंजक	गुणनखंड x वाला	x का गुणनखंड
(i)	$y^2x + y$	y^2x	y^2
(ii)	$13y^2 - 8yx$	$-8yx$	$-8y$
(iii)	$x + y + 2$	x	1
(iv)	$5 + z + zx$	zx	z
(v)	$1 + x + xy$	x xy	1 y
(vi)	$12xy^2 + 25$	$12xy^2$	$12y^2$
(vii)	$7 + xy^2$	xy^2	y^2

(b)

	व्यंजक	गुणनखंड y^2 वाला	y^2 का गुणनखंड
(i)	$8 - xy^2$	$-xy^2$	$-x$
(ii)	$5y^2 + 7x$	$5y^2$	5
(iii)	$2x^2y - 15xy^2 + 7y^2$	$-15xy^2$ $7y^2$	$-15x$ 7

5. (i) द्विपद (ii) एकपदी (iii) त्रिपद (iv) एकपदी
(v) त्रिपद (vi) द्विपद (vii) द्विपद (viii) एकपदी
(ix) त्रिपद (x) द्विपद (xi) द्विपद (xii) त्रिपद

6. (i) समान पद (ii) समान पद (iii) असमान पद (iv) समान पद
(v) असमान पद (vi) असमान पद

7. (a) $-xy^2, 2xy^2; -4yx^2, 20x^2y; 8x^2, -11x^2, -6x^2; 7y, y; -100x, 3x; -11yx, 2xy.$
(b) $10pq, -7qp, 78qp; 7p, 2405p; 8q, -100q; -p^2q^2, 12q^2p^2; -23, 41; -5p^2, 701p^2; 13p^2q, qp^2$

प्रश्नावली 12.2

1. (i) $8b - 32$ (ii) $7z^3 + 12z^2 - 20z$ (iii) $p - q$ (iv) $a + ab$
(v) $8x^2y + 8xy^2 - 4x^2 - 7y^2$ (vi) $4y^2 - 3y$

2. (i) $2mn$ (ii) $-5tz$ (iii) $12mn - 4$ (iv) $a + b + 3$
(v) $7x + 5$ (vi) $3m - 4n - 3mn - 3$ (vii) $9x^2y - 8xy^2$
(viii) $5pq + 20$ (ix) 0 (x) $-x^2 - y^2 - 1$

3. (i) $6y^2$ (ii) $-18xy$ (iii) $2b$ (iv) $5a + 5b - 2ab$
(v) $5m^2 - 8mn + 8$ (vi) $x^2 - 5x - 5$
(vii) $10ab - 7a^2 - 7b^2$ (viii) $8p^2 + 8q^2 - 5pq$

4. (a) $x^2 + 2xy - y^2$ (b) $5a + b - 6$

5. $4x^2 - 3y^2 - xy$

6. (a) $-y + 11$ (b) $2x + 4$

प्रश्नावली 12.3

1. (i) 0 (ii) 1 (iii) –1 (iv) 1 (v) 1

2. (i) –1 (ii) –13 (iii) 3 **3.** (i) –9 (ii) 3 (iii) 0 (iv) 1

4. (i) 8 (ii) 4 (iii) 0 **5.** (i) –2 (ii) 2 (iii) 0 (iv) 2

6. (i) $5x - 13; -3$ (ii) $8x - 1; 15$ (iii) $11x - 10; 12$ (iv) $11x + 7; 29$

7. (i) $2x+4; 10$ (ii) $-4x + 6; -6$ (iii) $-5a + 6; 11$ (iv) $-8b + 6; 22$ (v) $3a - 2b - 9; -8$

8. (i) 1000 (ii) 20 **9.** –5 **10.** $2a^2 + ab + 3; 38$

प्रश्नावली 12.4

1.

अंक	अंकों की संख्या	रेखाखंडों की संख्या
6	5	26
	10	51
	100	501
4	5	16
	10	31
	100	301
8	5	27
	10	52
	100	502

2. (i) $2n - 1 \rightarrow$ 100 वाँ : 199

(ii) $3n + 2 \rightarrow$ 5 वाँ : 17; 10 वाँ : 32; 100 वाँ : 302

(iii) $4n + 1 \rightarrow$ 5 वाँ : 21; 10 वाँ : 41; 100 वाँ : 401

(iv) $7n + 20 \rightarrow$ 5 वाँ : 55; 10 वाँ : 90; 100 वाँ : 720

(v) $n^2 + 1 \rightarrow$ 5 वाँ : 26; 10 वाँ : 101

प्रश्नावली 13.1

1. (i) 64 (ii) 729 (iii) 121 (iv) 625

2. (i) 6^4 (ii) t^2 (iii) b^4 (iv) $5^2 \times 7^3$ (v) $2^2 \times a^2$ (vi) $a^3 \times c^4 \times d$

3. (i) 2^9 (ii) 7^3 (iii) 3^6 (iv) 5^5

4. (i) 3^4 (ii) 3^5 (iii) 2^8 (iv) 2^{100} (v) 2^{10}

5. (i) $2^3 \times 3^4$ (ii) 5×3^4 (iii) $2^2 \times 3^3 \times 5$ (iv) $2^4 \times 3^2 \times 5^2$

6. (i) 2000 (ii) 196 (iii) 40 (iv) 768 (v) 0
(vi) 675 (vii) 144 (viii) 90000

7. (i) – 64 (ii) 24 (iii) 225 (iv) 8000

8. (i) $2.7 \times 10^{12} > 1.5 \times 10^8$ (ii) $4 \times 10^{14} < 3 \times 10^{17}$

प्रश्नावली 13.2

1. (i) 3^{14} (ii) 6^5 (iii) a^5 (iv) 7^{x+2} (v) 5^3 (vi) $(10)^5$
(vii) $(ab)^4$ (viii) 3^{12} (ix) 2^8 (x) 8^{t-2}

2. (i) 3^3 (ii) 5^3 (iii) 5^5 (iv) 7×11^5 (v) 3^0 or 1 (vi) 3
(vii) 1 (viii) 2 (ix) $(2a)^2$ (x) a^{10} (xi) a^3b (xii) 2^8

3. (i) असत्य; $10 \times 10^{11} = 10^{12}$ और $(100)^{11} = 10^{22}$ (ii) असत्य; $2^3 = 8$, $5^2 = 25$
(iii) असत्य; $6^5 = 2^5 \times 3^5$ (iv) सत्य; $3^0 = 1$, $(1000)^0 = 1$

4. (i) $2^8 \times 3^4$ (ii) $2 \times 3^3 \times 5$ (iii) $3^6 \times 2^6$ (iv) $2^8 \times 3$ **5.** (i) 98 (ii) $\frac{5t^4}{8}$ (iii) 1

प्रश्नावली 13.3

1. 279404 $= 2 \times 10^5 + 7 \times 10^4 + 9 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 4 \times 10^0$

3006194 $= 3 \times 10^6 + 0 \times 10^5 + 0 \times 10^4 + 6 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 4 \times 10^0$

2806196 $= 2 \times 10^6 + 8 \times 10^5 + 0 \times 10^4 + 6 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 6 \times 10^0$

120719 $= 1 \times 10^5 + 2 \times 10^4 + 0 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 9 \times 10^0$

20068 $= 2 \times 10^4 + 0 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 8 \times 10^0$

2. (a) 86045 (b) 405302 (c) 30705 (d) 900230

3. (i) 5×10^7 (ii) 7×10^6 (iii) 3.1865×10^9 (iv) 3.90878×10^5

(v) 3.90878×10^4 (vi) 3.90878×10^3

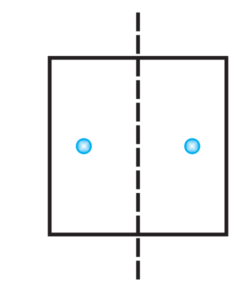
4. (a) 3.84×10^8m (b) 3×10^8 m/s (c) 1.2756×10^7m (d) 1.4×10^9 m

(e) 1×10^{11} (f) 1.2×10^{10} वर्ष (g) 3×10^{20} m (h) 6.023×10^{22}

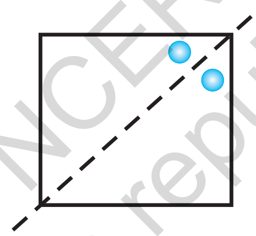
(i) 1.353×10^9 km^3 (j) 1.027×10^9

प्रश्नावली 14.1

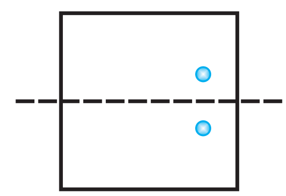
1.



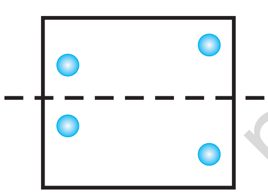
(a)



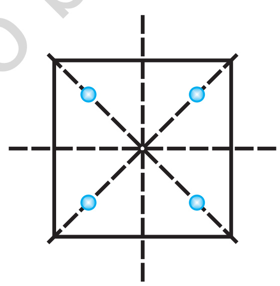
(b)



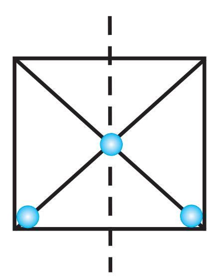
(c)



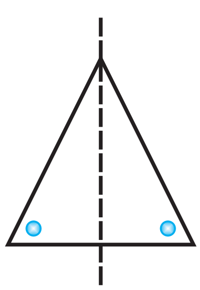
(d)



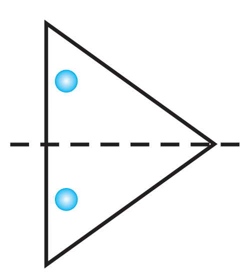
(e)



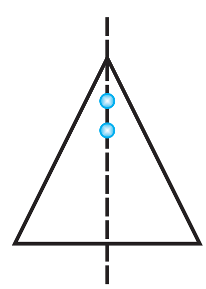
(f)



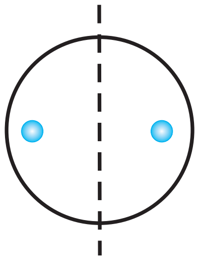
(g)



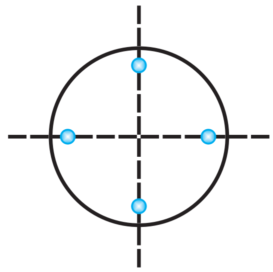
(h)



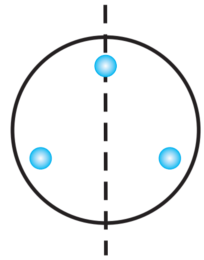
(i)



(j)

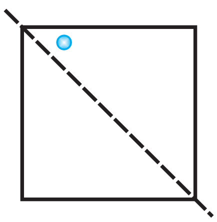


(k)

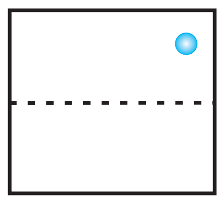


(l)

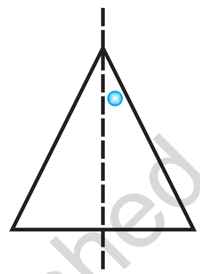
2.



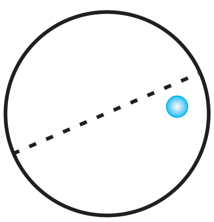
(a)



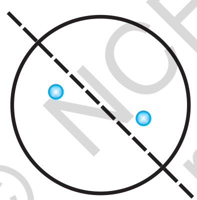
(b)



(c)

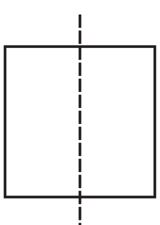


(d)

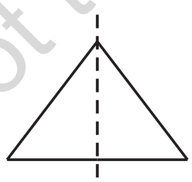


(e)

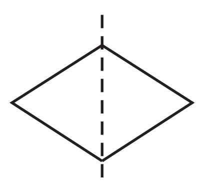
3.



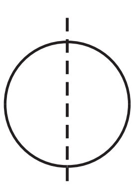
(a) वर्ग



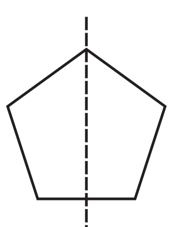
(b) त्रिभुज



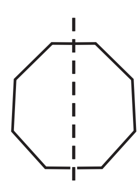
(c) समचतुर्भुज



(d) वृत

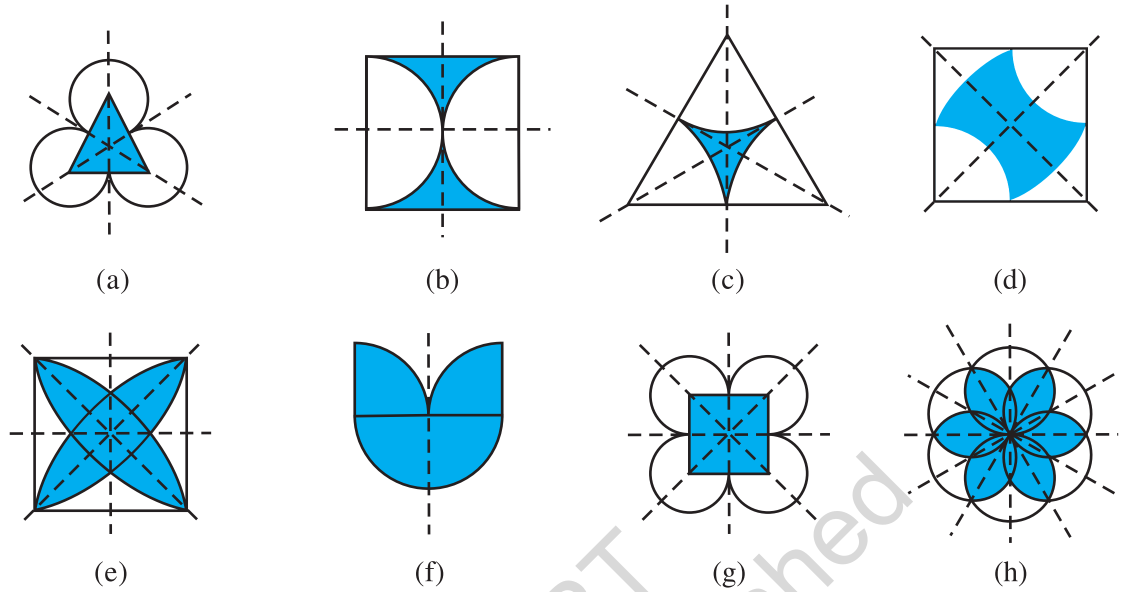


(e) पंचभुज



(f) अष्टभुज

4.



7. (a) 3 (b) 1 (c) 0 (d) 4 (e) 2 (f) 2
(g) 0 (h) 0 (i) 6 (j) अनंत

8. (a) A, H, I, M, O, T, U, V, W, X, Y (b) B, C, D, E, H, I, O, X
(c) O, X, I, H

10. (a) माध्यिका (b) व्यास

प्रश्नावली 14.2

1. (a), (b), (d), (e), (f)

2. (a) 2 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 4 (f) 5
(g) 6 (h) 3

प्रश्नावली 14.3

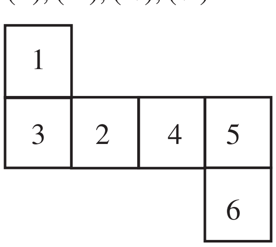
3. हाँ **5.** वर्ग **6.** 120°, 180°, 240°, 300°, 360°

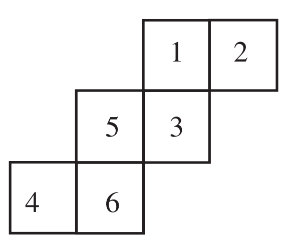
7. (i) हाँ (ii) नहीं

प्रश्नावली 15.1

1. (ii), (iii), (iv), (vi) के जाल घन बनाते हैं।

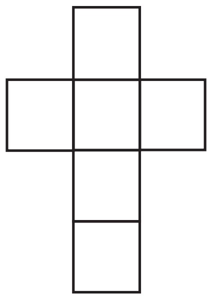
2.

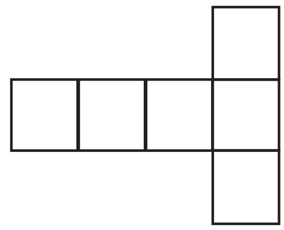




3. नहीं, क्योंकि सम्मुख फलकों के एक युग्म पर 1 और 4 होंगे जिनका योग 7 नहीं है और सम्मुख फलकों के दूसरे युग्म पर 3 और 6 होंगे जिनका भी योग 7 नहीं होगा।

4. तीन फलक





5. (a) (ii) (b) (iii) (c) (iv) (d) (i)

दिमागी-कसरत

1. इस संख्या-पहेली को सुलझाइए:

(i) बताइए मैं कौन हूँ! मैं कौन हूँ!

मुझसे संख्या आठ निकालकर

फिर उसे एक दर्जन से भाग देने पर

पाएँगे आप क्रिकेट की पूरी टीम!

(ii) एक संख्या के छः गुने में चार मिलाकर

पाएँगे आप चौंसठ!

पूरा श्रेय होगा आपका

यदि तुरंत बताएँ स्कोर आप!

2. इन पहेलियों को सुलझाइए:

(i) किसी जंगल में था एक पीपल का वृक्ष

इस विशाल वृक्ष की शाखाएँ थीं दस और तीन

हर शाखा पर रहते थे पक्षी चौदह

चिड़ियाँ भूरी, कौवे काले और तोते हरे!

तोतों के दुगुने थे कौवे

और कौवों की दुगुनी थी चिड़ियाँ।

हमें आश्चर्य है कितने थे पक्षी हर प्रकार के,

क्या आप नहीं करेंगे मदद यह ढूँढने में हमारी?

(ii) मेरे पास कुछ पाँच रुपए के और कुछ दो रुपए के सिक्के हैं। दो रुपए के सिक्कों की संख्या पाँच रुपए के सिक्कों की संख्या की दुगुनी है। मेरे पास कुल 108 रुपए हैं। मेरे पास पाँच रुपए के कितने सिक्के हैं? और दो रुपए के कितने होंगे?

3. मेरे पास दो वैट हैं, और प्रत्येक में दो मैट (दरियाँ) हैं। हर मैट पर दो कैट (बिल्लियाँ) हैं। हर कैट ने दो पुराने हास्यकर हैट (टोपियाँ) पहनी हैं। हर हैट पर दो छोटे रैट (चूहे) हैं। हर रैट पर दो बैट (छोटे चमगादड़) बैठे हैं। बताइए, मेरे वैट में कितनी वस्तुएँ हैं?
4. सत्ताईस छोटे घनों को चिपकाकर एक बड़ा घन बनाया गया। बड़े घन के बाहरी भाग को पीला रंग दिया गया। इन 27 छोटे घनों में से कितने घनों पर पीला रंग
   (i) उनके सिर्फ एक फलक पर होगा?
   (ii) दो फलकों पर होगा?
   (iii) तीन फलकों पर होगा?
5. राहुल अपने बगीचे के एक वृक्ष की ऊँचाई ज्ञात करना चाहता था। उसने अपनी और अपनी परछाई की लंबाइयों का अनुपात देखा। वह 4:1 था । फिर उसने उस वृक्ष की परछाई को मापा। उसकी माप 15 फीट थी। अत: वृक्ष की ऊँचाई क्या होगी?
6. एक लकड़हारा 12 मिनट में लकड़ी के एक खंड को तीन टुकड़ों मे तोड़ता है। ऐसे पाँच टुकड़े करने के लिए कितना समय लगेगा?
7. धोने के बाद एक कपड़ा 0.5% सिकुड़ता है। यह कितनी भिन्न है?
8. स्मिता की माँ की आयु 34 वर्ष है। आज से दो साल बाद माँ की आयु स्मिता की वर्तमान आयु से चार गुना होगी। स्मिता की वर्तमान आयु क्या है?
9. माया, मधुरा और मोहसिना मित्र हैं जो एक ही कक्षा में पढ़ती हैं। एक वर्ग परीक्षा (class test) में, भूगोल में, 25 में से माया को 16 और मधुरा को 20 अंक प्राप्त होते हैं। उनका औसत अंक 19 था। मोहसिना को कितने अंक प्राप्त हुए?

उत्तर

1. (i) 140 (ii) 10
2. (i) चिड़ियाँ : 104, कौवे : 52, तोते : 26
   (ii) ₹ 5 के सिक्कों की संख्या = 12, ₹ 2 के सिक्कों की संख्या = 24
3. 124 **4.** (i) 6 (ii) 10 (iii) 8 **5.** 60 फीट
6. 24 मिनट **7.** $\frac{1}{200}$ **8.** 7 वर्ष **9.** 21

गणित

कक्षा 7 के लिए पाठ्यपुस्तक

0757

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

ISBN 81-7450-691-8

प्रथम संस्करण
फरवरी 2007 फाल्गुन 1928

पुनर्मुद्रण
जनवरी 2009 माघ 1930
जनवरी 2010 माघ 1931
दिसंबर 2010 अग्रहायण 1932
मार्च 2012 फाल्गुन 1933
नवंबर 2013 कार्तिक 1935
अक्तूबर 2014 कार्तिक 1936
दिसंबर 2015 अग्रहायण 1937
दिसंबर 2016 पौष 1938
दिसंबर 2017 पौष 1939
जनवरी 2019 पौष 1940
अगस्त 2019 भाद्रपद 1941

PD 80T RPS

₹ 65.00

एन.सी.ई.आर.टी. वाटरमार्क 80 जी.एस.एम. पेपर पर मुद्रित।

प्रकाशन प्रभाग में सचिव, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, श्री अरविंद मार्ग, नयी दिल्ली 110 016 द्वारा प्रकाशित तथा बबलू बाईंडिंग हाऊस, पटना कोल्ड स्टोरेज, शाहगंज, पटना-800 006 द्वारा मुद्रित।

एन सी ई आर टी के प्रकाशन प्रभाग के कार्यालय

एन.सी.ई.आर.टी. कैंपस
श्री अरविंद मार्ग
नयी दिल्ली 110 016 फोन : 011-26562708

108, 100 फीट रोड
हेली एक्सटेंशन, होस्डेकेरे
बनाशंकरी III इस्टेज
बेंगलुरु 560 085 फोन : 080-26725740

नवजीवन ट्रस्ट भवन
डाकघर नवजीवन
अहमदाबाद 380 014 फोन : 079-27541446

सी.डब्ल्यू.सी. कैंपस
निकट-धनकल बस स्टॉप पनिहटी
कोलकाता 700 114 फोन : 033-25530454

सी.डब्ल्यू.सी. कॉम्प्लैक्स
मालीगांव
गुवाहाटी 781021 फोन : 0361-2674869

प्रकाशन सहयोग

अध्यक्ष, प्रकाशन प्रभाग	:	*एम. सिराज अनवर*
मुख्य संपादक	:	*श्वेता उप्पल*
मुख्य उत्पादन अधिकारी	:	*अरुण चितकारा*
मुख्य व्यापार प्रबंधक	:	*बिबाष कुमार दास*
संपादक	:	*रेखा अग्रवाल*
उत्पादन सहायक	:	*ओम प्रकाश*

आवरण
श्वेता राव

चित्रांकन
प्रशांत सोनी

आमुख

राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा (2005) सुझाती है कि बच्चों के स्कूली जीवन को बाहर के जीवन से जोड़ा जाना चाहिए। यह सिद्धांत किताबी ज्ञान की उस विरासत के विपरीत है जिसके प्रभाववश हमारी व्यवस्था आज तक स्कूल और घर के बीच अंतराल बनाए हुए है। नयी राष्ट्रीय पाठ्यचर्या पर आधारित पाठ्यक्रम और पाठ्यपुस्तकें इस बुनियादी विचार पर अमल करने का प्रयास है। इस प्रयास में हर विषय को एक मज़बूत दीवार से घेर देने और जानकारी को रटा देने की प्रवृत्ति का विरोध शामिल है। आशा है कि ये कदम हमें राष्ट्रीय शिक्षा नीति (1986) में वर्णित बाल-केंद्रित व्यवस्था की दिशा में काफ़ी दूर तक ले जाएँगे।

इस प्रयत्न की सफलता अब इस बात पर निर्भर है कि स्कूलों के प्राचार्य और अध्यापक बच्चों को कल्पनाशील गतिविधियों और सवालों की मदद से सीखने और सीखने के दौरान अपने अनुभव पर विचार करने का अवसर देते हैं। हमें यह मानना होगा कि यदि जगह, समय और आज़ादी दी जाए तो बच्चे बड़ों द्वारा सौंपी गई सूचना-सामग्री से जुड़कर और जूझकर नए ज्ञान का सृजन कर सकते हैं। शिक्षा के विविध साधनों एवं स्रोतों की अनदेखी किए जाने का प्रमुख कारण पाठ्यपुस्तक को परीक्षा का एकमात्र आधार बनाने की प्रवृत्ति है। सर्जना और पहल को विकसित करने के लिए ज़रूरी है कि हम बच्चों को सीखने की प्रक्रिया में पूरा भागीदार मानें और बनाएँ, उन्हें ज्ञान की निर्धारित खुराक का ग्राहक मानना छोड़ दें।

ये उद्देश्य स्कूल की दैनिक ज़िंदगी और कार्यशैली में काफ़ी फेरबदल की माँग करते हैं। दैनिक समय-सारणी में लचीलापन उतना ही ज़रूरी है, जितना वार्षिक कैलेंडर के अमल में चुस्ती, जिससे शिक्षण के लिए नियत दिनों की संख्या हकीकत बन सके। शिक्षण और मूल्यांकन की विधियाँ भी इस बात को तय करेंगी कि यह पाठ्यपुस्तक स्कूल में बच्चों के जीवन को मानसिक दबाव तथा बोरियत की जगह खुशी का अनुभव बनाने में कितनी प्रभावी सिद्ध होती है। बोझ की समस्या से निपटने के लिए उपलब्ध समय का ध्यान रखने की पहले से अधिक सचेत कोशिश की है। इस कोशिश को और गहराने के यत्न में यह पाठ्यपुस्तक सोच-विचार और विस्मय, छोटे समूहों में बातचीत एवं बहस और हाथ से की जाने वाली गतिविधियों को प्राथमिकता देती है।

एन.सी.ई.आर.टी. इस पुस्तक की रचना के लिए बनाई गई पाठ्यपुस्तक निर्माण समिति के परिश्रम के लिए कृतज्ञता व्यक्त करती है। परिषद् इस पाठ्यपुस्तक के सलाहकार समूह के अध्यक्ष प्रोफ़ेसर जयंत विष्णु नारलीकर और इस पुस्तक के सलाहकार डॉ. हृद्‌यकांत दीवान की विशेष आभारी है। इस पाठ्यपुस्तक के विकास में कई शिक्षकों ने योगदान दिया; इस योगदान को संभव बनाने के लिए हम उनके प्राचार्यों के आभारी हैं। हम उन सभी संस्थाओं और संगठनों के प्रति कृतज्ञ हैं जिन्होंने अपने संसाधनों, सामग्री तथा सहयोगियों की मदद लेने में हमें उदारतापूर्वक सहयोग दिया। हम, विशेष रूप से माध्यमिक एवं उच्चतर शिक्षा विभाग, मानव संसाधन विकास मंत्रालय द्वारा प्रो. मृणाल मिरी और प्रो. जी.पी. देशपांडे की अध्यक्षता में गठित, राष्ट्रीय मानीटरिंग समिति द्वारा प्रदत्त बहुमूल्य समय एवं योगदान के लिए कृतज्ञ हैं। व्यवस्थागत सुधारों और अपने प्रकाशनों में निरंतर निखार लाने के प्रति समर्पित एन.सी.ई.आर.टी. टिप्पणियों एवं सुझावों का स्वागत करेगी जिनसे भावी संशोधनों में मदद ली जा सके।

नयी दिल्ली
दिनांक 20 नवंबर 2006

निदेशक
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान
और प्रशिक्षण परिषद्

प्रस्तावना

राष्ट्रीय पाठ्यचर्या रूपरेखा 2005 (NCF-2005), बच्चे में गणितीयकरण की क्षमता विकसित करने की आवश्यकता की ओर संकेत करता है। उसमें यह निर्दिष्ट किया गया है कि गणित पढ़ने का उद्देश्य केवल परिमाणात्मक परिकलनों में समर्थ होना ही नहीं है, अपितु बच्चे में ऐसी क्षमताएँ भी विकसित करना है जिनसे वह विश्व से अपने संबंध पुन:परिभाषित करने में समर्थ हो सके। NCF-2005 इस बात पर भी बल देती है कि बच्चों में तर्कण संबंधी क्षमताएँ तथा अवकाश और आकाशीय रूपांतरणों (spatial transformations) को समझने की क्षमताएँ विकसित हों, साथ ही इन दोनों का मानसिक चित्रण करने की क्षमता भी विकसित हो। NCF-2005 यह सिफ़ारिश करता है कि गणित को गूढ़ता की ओर धीरे-धीरे अग्रसर होने की आवश्यकता है, यद्यपि इसका प्रारंभ सजीव एवं ठोस अनुभवों और मॉडल्स द्वारा होता है। प्रतिरूपों (Patterns) को समझ कर उनका व्यापकीकरण करना इस विषय के गूढ़ एवं तर्कशासित स्वभाव से संबंध स्थापित करने में एक महत्वपूर्ण चरण है।

हम यह भी जानते हैं कि उच्च प्राथमिक और माध्यमिक कक्षाओं के अधिकांश बच्चों में गणित का एक भय उत्पन्न हो जाता है तथा यही विद्यार्थियों द्वारा विद्यालय में अपना अध्ययन आगे जारी न रखने के कई कारणों में से एक कारण है। NCF-2005 में भी इस समस्या का उल्लेख किया गया है तथा इसके निराकरण के लिए उसमें एक सुसंगत एवं अर्थपूर्ण कार्यक्रम विकसित करने की आवश्यकता पर बल दिया गया है। गणित शिक्षण के अवधारणाकरण की आवश्यकता, बच्चों को धारणाओं को खोजने तथा समस्याओं को हल करने की विधियाँ विकसित करने का अवसर, प्रदान करती है, और यह NCF-2005 में उजागर हुए सिद्धांतों की आधारशिला भी है।

कक्षा VI में हमने एक ऐसा कार्यक्रम विकसित करने की प्रक्रिया का शुभारंभ किया था जो बच्चों में धारणाओं की रचना करने की क्षमता विकसित करने के साथ ही गणित के गूढ़ स्वभाव को समझने में सहायता करें। NCF-2005 में दिए गए सुझावों के अनुरूप, प्रश्नों को विविध प्रकार से हल करने के अवसर प्रदान करने का तथा बच्चों को विविध युक्तियाँ, जो एक दूसरे से भिन्न हों, खोजने के लिए प्रोत्साहित करने का एक प्रयत्न किया गया है। संक्षिप्त विधियाँ और एल्गोरिथ्म रटने के स्थान पर मौलिक सिद्धांतों के साथ कार्य करने पर बल दिया गया है।

कक्षा VII की पाठ्यपुस्तक में इस भावना को जारी रखा गया है तथा ऐसी भाषा का प्रयोग करने का प्रयास किया गया है, जिसे बच्चे स्वयं पढ़ सकें और समझ सकें। यह पढ़ाई समूहों में या व्यक्तिगत रूप से हो सकती है तथा कुछ स्थानों पर इसमें अध्यापक द्वारा सहायता और समर्थन प्रदान करने की आवश्यकता पड़ सकती है। हमने विभिन्न प्रकार के उदाहरणों को सम्मिलित करने तथा बच्चों द्वारा स्वयं अपने प्रश्न बनाने के अवसर प्रदान करने का प्रयत्न भी किया है। अनेक चित्रों को सम्मिलित करके, इस पुस्तक के रूप को आकर्षक बनाया गया है। पुस्तक में बच्चे के मस्तिष्क को सक्रिय रूप से व्यस्त रखने का प्रयास किया गया है तथा यह बच्चे को अनावश्यक

जटिल पदों और संख्याओं से जूझने के स्थान पर अवधारणाओं को प्रयोग करने एवं स्वयं अपनी संरचनाओं को विकसित करने के अवसर प्रदान करती है।

हम यह आशा करते हैं कि यह पुस्तक सभी बच्चों का गणित सीखने के उनके प्रयासों में सहायक होगी तथा उनमें गणित की शक्ति एवं सुंदरता की सराहना करने का सामर्थ्य जागृत करेगी। हम यह भी आशा करते हैं कि वे प्राथमिक स्कूलों में सीखी गई अवधारणाओं एवं कुशलताओं का पुनार्वलोकन करने और उन्हें दृढ़ बनाने में समर्थ हो पाएँगे। हम गणित की नींव को मजबूत करने की आशा करते हैं जिसके आधार पर बच्चे का उच्चतर अध्ययन एवं उसका दैनिक जीवन समृद्ध हो सके।

इस पाठ्यपुस्तक को विकसित करने वाली समिति में अनेक अनुभवी अध्यापक सम्मिलित हैं जिन्होंने दल को बच्चों एवं स्कूल के दृष्टिकोण से अवगत कराया। हमारे दल में ऐसे भी सदस्य थे जिन्होंने गणित शिक्षा पर अनुसंधान किया है तथा वे गणित की पुस्तकें अनेक वर्षों से लिखते आ रहे हैं। हमारे दल ने बच्चों के मन से गणित का भय दूर करने तथा उसे स्कूल के बाहर भी दैनिक जीवन का एक भाग बनाने का प्रयास किया है। हमने देश के विभिन्न भागों के कुछ और शिक्षकों से चर्चा की तथा यथासंभव उनके सुझावों और टिप्पणियों को पुस्तक में सम्मिलित किया।

अंत में, मैं प्रो. कृष्ण कुमार, निदेशक, एन.सी.ई.आर.टी.;,प्रो.जी.रविंद्रा, संयुक्त निदेशक, एन.सी.ई.आर.टी; प्रो.हुकुम सिंह, अध्यक्ष, डी.ई.एस.एम. के प्रति अपना आभार प्रकट करना चाहूँगा जिन्होंने मुझे और मेरे दल को यह चुनौतीपूर्ण कार्य करने का अवसर प्रदान किया। मैं विज्ञान एवं गणित के सलाहकार समूह के अध्यक्ष प्रो.जे.वी.नारलीकर का भी उनके सुझावों के लिए आभार प्रकट करता हूँ। मैं एन.सी.ई.आर.टी. के प्रो.एस.के.सिंह गौतम, डॉ. वी.पी.सिंह और डॉ. आशुतोष के.वझलवार का, जो इस समिति के सदस्य भी हैं, इस कार्य को अपने कठोर परिश्रम द्वारा संभव बनाने के लिए आभारी हूँ। अंत में, मुझे एन.सी.ई.आर.टी. के प्रकाशन विभाग का उनकी सहायता और सुझाव के लिए भी धन्यवाद करना चाहिए तथा विद्या भवन के उन व्यक्तियों का भी धन्यवाद करना चाहिए, जिन्होंने इस पुस्तक के निर्माण में सहायता की।

सामग्री विकसित करने की प्रक्रिया निरंतर चलती रहती है और हम इस पुस्तक को और अधिक बेहतर बनाने की आशा रखते हैं। इस पुस्तक पर सुझावों एवं टिप्पणियों का सहर्ष स्वागत किया जाएगा।

डॉ. हृदयकांत दीवान
मुख्य सलाहकार
पाठ्यपुस्तक विकास समिति

अध्यापक के लिए दो शब्द

यह पुस्तक कक्षा VI में प्रारंभ की गई प्रक्रिया को मजबूती प्रदान करते हुए उसे आगे जारी रखती है। हमने आपके साथ राष्ट्रीय पाठ्यचर्या रूपरेखा 2005 (NCF-2005) में निहित मुख्य मुद्दों पर चर्चा की थी। इन मुद्दों में शामिल थे, गणित को बच्चों की क्षमताओं के विकास से जोड़ना तथा जटिल परिकलनों और एल्गोरिथ्मों के अनुसरण समझ एवं समझ की रूपरेखा का निर्माण करना। बच्चों के मस्तिष्क में गणितीय विचार केवल बताने या व्याख्याएँ देने से विकसित नहीं होते हैं। बच्चों को गणित सीखने, गणित में आत्मविश्वास जागृत करने तथा उसके मूलभूत विचारों को समझने के लिए उन्हें अवधारणाओं की अपनी स्वयं की एक रूपरेखा बनानी चाहिए। इसके लिए उन्हें एक ऐसी कक्षा की आवश्यकता होगी जिसमें वे विचार विमर्श कर सकें, समस्याओं के हल खोजें, नए प्रश्न बनाकर केवल उनको हल करने की विधियाँ विकसित करके उन्हें हल ही न करें, अपितु स्वयं को समझ में आने वाली अपनी भाषा में परिभाषाएँ भी बना सकें। जरूरी नहीं है कि ये परिभाषाएँ, आदर्श परिभाषाओं की तरह व्यापक और परिपूर्ण हों।

गणित की कक्षा में बच्चों को पाठ्यपुस्तक और अन्य संदर्भ ग्रंथ समझबूझकर पढ़ने में सहायता करना जरूरी है। सामान्यतः यह माना जाता है कि सामग्री का पढ़ने से गणित की पढ़ाई का कोई संबंध नहीं है लेकिन यह भी सत्य है कि उच्चतर गणित का ज्ञान अर्जित करने के लिए पाठ्यसामग्री पढ़कर उसे समझना जरूरी होता है। गणित की पाठ्यसामग्री में संक्षिप्त भाषा का प्रयोग किया जाता है। इसे पढ़ने के लिए संक्षिप्तता तथा चिह्नों से व्यवहार करने की क्षमता, तर्कसंगत युक्तियों को समझना और कुछ कारणों एवं प्रतिबंधों की आवश्यकता को समझना जरूरी है। गणितीय कथनों को सामान्य कथनों में परिवर्तित करने के तथा सामान्य कथनों को गणितीय कथनों में परिवर्तित करने के अभ्यास की बच्चों को आवश्यकता है। हम चाहेंगे कि बच्चे भाषा का प्रयोग उचित शब्दों द्वारा पूरे आत्मविश्वास से करें और गणितीय कथनों द्वारा संवाद स्थापित कर सकें।

उच्च प्राथमिक स्तर की गणित एक बड़ी चुनौती है, जिसे बच्चे के अनुभव और उसके परिवेश के करीब रहने की दोहरी भूमिका अदा करनी होती है। बच्चे प्रायः केवल धारणाओं से संबंधित कार्यों को करने में समर्थ नहीं हो पाते। उनके अनुभवों से जुड़ी संदर्भों और मॉडल्स की सुविधा की उन्हें आवश्यकता होती है, जिससे वे अर्थ ढूँढ़ पाते हैं। यह अवस्था हमारे सामने एक ऐसी चुनौती प्रस्तुत करती है जिसमें हमें बच्चों को संदर्भों द्वारा व्यस्त रखते हुए धीरे-धीरे उन्हें इस निर्भरता से दूर ले जाना है। इसलिए जहाँ बच्चे संदर्भों में निहित सिद्धांतों की पहचान कर सकने में समर्थ हों वहाँ यह भी आवश्यक है कि वे उन संदर्भों तक सीमित या उन पर निर्भर न हो जाएँ। जैसे-जैसे हम मिडल स्कूल में आगे बढ़ते जाएँगे, वैसे-वैसे बच्चों से ऐसा करने की हमारी अपेक्षाएँ भी बढ़ती जाएँगी।

गणित सीखना केवल हलों या विधियों को याद रखना नहीं है अपितु यह जानना है कि प्रश्नों के हल किस प्रकार निकाले जाएँ। समस्या हल करने की युक्तियाँ, विद्यार्थियों को समझदारी से सोचने के अवसर प्रदान करती हैं तथा उन्हें विधियाँ और प्रक्रियाएँ समझने एवं उनकी रचना करने योग्य बनाती हैं। वे नए ज्ञान की रचना में मूक ग्रहणकर्ता न बनकर एक सक्रिय प्रतिभागी बन जाते

हैं। विद्यार्थियों से यह अपेक्षित है कि वे समस्या को पहचान कर उसे परिभाषित करें, संभावित हलों को चुनें या बनाएँ तथा जरूरत पड़ने पर चरणों को सुधारें या पुनः बनाएँ। इस प्रक्रिया में अध्यापक की भूमिका एक मार्गदर्शक एवं सहायक के रूप में परिवर्तित हो जाती है। विद्यार्थियों को क्रियाकलाप एवं चुनौतिपूर्ण समस्याओं के साथ-साथ समस्या हल करने के अनेक अनुभव प्रदान करने चाहिए।

कोई समस्या प्रस्तुत होने पर बच्चों ने उसे व्यवस्थित रूप से लिखने अर्थात् डिकोड करने की आवश्यकता है। उन्हें समस्या हल करने में उपयुक्त ज्ञान को पहचानना तथा उसके लिए एक मॉडल तैयार करना आवश्यक है। यह मॉडल एक चित्रिय रूप में अथवा एक निर्मित स्थिति के रूप में हो सकता है। हमें यह ध्यान में रखना चाहिए कि ज्यामिति में उपपत्तियों के निर्माण करने में जो आकृतियाँ बनाई जाती हैं वे आदर्श विमारहित आकृतियों के मॉडल हैं। तथापि ये मॉडल, अंकगणित और बीजगणित की समस्याओं को हल करने में आवश्यक ठोस मॉडलों की तुलना में अधिक गूढ़ हैं। समस्याओं को छोटे भागों में विभक्त करके उपयुक्त मॉडल बनाने की क्षमता के विकास करने में, उन्हें स्वयं की युक्तियों का विकास करने में तथा समस्याओं का विश्लेषण करने में, बच्चों की सहायता करना अत्यधिक आवश्यक है। कुछ निर्धारित एल्गोरिथ्म के स्थान पर यह सब होना चाहिए।

शिक्षकों से सहयोगशील शिक्षा को प्रोत्साहित करने की अपेक्षा की जाती है। आपस के उद्देश्यपूर्ण वार्तालाप से बच्चे बहुत कुछ सीखते हैं। हमारी कक्षाएँ विद्यार्थियों में परस्पर स्पर्धा के स्थान पर एक दूसरे से सीखने की इच्छा एवं क्षमता विकसित करें। वार्तालाप करना, शोर करना नहीं होता है और परामर्श लेना नकल करना नहीं है। यह एक चुनौति होगी कि कक्षा में कक्षा समूहों का निर्माण किया जाए जो एक दूसरे के साथ रहकर लाभान्वित हो सकें तथा हर बच्चा अपने समूह के ज्ञानार्जन में कुछ योगदान कर सके। शिक्षकों को यह ध्यान रखना होगा कि भिन्न-भिन्न बच्चे और विभिन्न समूह, अलग-अलग युक्तियों का प्रयोग करेंगे। इनमें कुछ युक्तियाँ अधिक कार्यक्षम प्रतीत होंगी और कुछ कम कार्यक्षम। ये प्रत्येक समूह द्वारा किए गए मॉडलिंग को प्रदर्शित करेंगी तथा प्रयुक्त किए गए विचारों की प्रक्रिया को सूचित करेंगी। सबसे अच्छी युक्ति को छाँटना एवं गलत युक्तियों को नीचा दिखाना अनुचित होगा। सभी युक्तियों को रिकॉर्ड करके उनका विश्लेषण करने की आवश्यकता है। यह करते समय इस बात पर चर्चा करना आवश्यक है कि कुछ युक्तियाँ क्यों असफल रहीं। एक समूह के रूप में पूरी कक्षा असफल व अप्रभावी युक्तियों को सुधार कर उन्हें सही बना सकती है। इसका अर्थ यह है कि कुछ युक्तियों को गलत या अनुपयुक्त मानकर अलग निकालने के बजाए हर युक्ति को पूर्ण बनाने की आवश्यकता है। विविध युक्तियों के प्रभाव से गणित की समझ गहरी होगी तथा अन्य व्यक्तियों से सीखने की क्षमता बढ़ेगी। इससे इस बात का महत्त्व समझने में उन्हें सहायता होगी कि वे क्या कर रहे थे।

समझने के लिए पूछताछ एक स्वाभाविक प्रक्रिया है जिसके द्वारा विद्यार्थी ज्ञान की प्राप्ति एवं उसका निर्माण करते हैं। यह प्रक्रिया सहज निरीक्षणों से भी आरंभ हो सकती है और अंततः ज्ञान की प्राप्ति एवं उसके निर्माण के साथ समाप्त होती है। खोजने वाले, खुले सिरे के (open ended),

प्रासंगिक, त्रुटि पहचानने वाले इत्यादि प्रकार के प्रश्नों के उदाहरणों द्वारा भी इसकी सहायता की जानी चाहिए। विद्यार्थियों के सम्मुख चुनौतिपूर्ण प्रश्न प्रस्तुत करने चाहिए। उदाहरण के तौर पर ज्यामिति में ये प्रश्न इस प्रकार के हो सकते हैं, जैसे, ठोसों के लिए उपयुक्त जालों का प्रयोग, छाया खेल, टुकड़े काटने इत्यादि। अंकगणित में हम उन्हें संबंधों को खोजने, संबंधों का व्यापकीकरण करने, प्रतिरूपों और नियमों को खोजकर उनके बीजीय संबंध बनाने इत्यादि के लिए कह सकते हैं।

बच्चों को तर्कसंगत युक्तियाँ प्रदान करने, तर्कसंगत युक्तियों का अनुसरण करने तथा प्रस्तुत युक्तियों में कमियाँ ज्ञात करने के अवसरों की आवश्यकता है। उनको उपपत्ति की वांछनीयता को समझने के लिए यह आवश्यक है।

यह वह स्तर है जहाँ ज्यामिति जैसे विषय एक औपचारिक स्तर में प्रवेश करेंगे। विद्यार्थियों को ऐसे क्रियाकलाप करने के अवसर दें जिनसे उनकी रचनात्मकता और कल्पनाशक्ति का विकास होगा, साथ ही, वे सरल ज्यामितिय उपकरणों द्वारा ज्यामितिय शब्दावली एवं संबंधों की खोज कर सकेंगे। पुराने एवं जटिल प्रश्नों के उत्तर ढूँढ़ने वाला विषय, इस प्रतिमा के स्थान पर, खोज और रचना करने से संबंधित एक विषय के रूप में गणित की प्रतिमा उभरनी चाहिए। प्रश्नों के हल विविध प्रकारों से ढूँढ़ने के लिए बच्चों को प्रोत्साहित करना आवश्यक है। समस्याएँ हल करते समय अनेक वैकल्पिक एल्गोरिथ्म् एवं युक्तियों के उपयोग की आवश्यकता को समझना उनके लिए आवश्यक है।

पूर्णांक, भिन्न एवं दशमलव, सममिति जैसे विषयों को पिछली कक्षाओं में अध्ययन किए गए उनके आरंभिक भागों से संबंध जोड़कर प्रस्तुत किया गया है। अध्यायों को एक दूसरे से जोड़ने का प्रयास किया गया है तथा प्रारंभिक अध्यायों में प्रस्तुत किए गए विचारों को बाद में आने वाले अध्यायों की अवधारणाएँ विकसित करने में प्रयोग किया गया है।

कृपया, ऋणात्मक पूर्णांक, परिमेय संख्या, ज्यामिति में कथनों की खोज और ठोस आकारों के चित्रण जैसे विचारों पर पर्याप्त समय दें।

हमें आशा है कि यह पुस्तक बच्चों को आनंदपूर्वक गणित सीखने में सहायता करेगी तथा इसमें सम्मिलित की गई अवधारणाओं के प्रति उनमें आत्मविश्वास जागृत करेगी। हम व्यक्तिगत तथा सामूहिक विचार करने के अवसर प्रदान करने की सिफ़ारिश करते हैं। सामूहिक चर्चाएँ कक्षा की एक नियमित विशेषता बन जाए जिससे विद्यार्थी गणित के बारे में विश्वस्त हो जाएँ और गणित का भय भूतकाल की बात हो जाए।

इस पुस्तक के विषय में आपकी टिप्पणियों, एवं सुझावों का हम स्वागत करेंगे तथा आशा करते हैं कि अपने अध्यापन के दौरान विकसित किए गए अभ्यासों, क्रियाकलापों और कार्यों को आप हमें भेजेंगे ताकि हम उन्हें आगामी संस्करणों में सम्मिलित कर सकें।

भारत का संविधान

भाग 4क

नागरिकों के मूल कर्तव्य

अनुच्छेद 51 क

मूल कर्तव्य – भारत के प्रत्येक नागरिक का यह कर्तव्य होगा कि वह –

(क) संविधान का पालन करे और उसके आदर्शों, संस्थाओं, राष्ट्रध्वज और राष्ट्रगान का आदर करे;

(ख) स्वतंत्रता के लिए हमारे राष्ट्रीय आंदोलन को प्रेरित करने वाले उच्च आदर्शों को हृदय में संजोए रखे और उनका पालन करे;

(ग) भारत की संप्रभुता, एकता और अखंडता की रक्षा करे और उसे अक्षुण्ण बनाए रखे;

(घ) देश की रक्षा करे और आह्वान किए जाने पर राष्ट्र की सेवा करे;

(ङ) भारत के सभी लोगों में समरसता और समान भ्रातृत्व की भावना का निर्माण करे जो धर्म, भाषा और प्रदेश या वर्ग पर आधारित सभी भेदभावों से परे हो, ऐसी प्रथाओं का त्याग करे जो महिलाओं के सम्मान के विरुद्ध हों;

(च) हमारी सामासिक संस्कृति की गौरवशाली परंपरा का महत्त्व समझे और उसका परिरक्षण करे;

(छ) प्राकृतिक पर्यावरण की, जिसके अंतर्गत वन, झील, नदी और वन्य जीव हैं, रक्षा करे और उसका संवर्धन करे तथा प्राणिमात्र के प्रति दयाभाव रखे;

(ज) वैज्ञानिक दृष्टिकोण, मानववाद और ज्ञानार्जन तथा सुधार की भावना का विकास करे;

(झ) सार्वजनिक संपत्ति को सुरक्षित रखे और हिंसा से दूर रहे;

(ञ) व्यक्तिगत और सामूहिक गतिविधियों के सभी क्षेत्रों में उत्कर्ष की ओर बढ़ने का सतत् प्रयास करे, जिससे राष्ट्र निरंतर बढ़ते हुए प्रयत्न और उपलब्धि की नई ऊँचाइयों को छू सके; और

(ट) यदि माता-पिता या संरक्षक है, छह वर्ष से चौदह वर्ष तक की आयु वाले अपने, यथास्थिति, बालक या प्रतिपाल्य को शिक्षा के अवसर प्रदान करे।

पाठ्यपुस्तक विकास समिति

अध्यक्ष, विज्ञान और गणित सलाहकार समिति

जयंत विष्णु नारलीकर, इमिरिटस *प्रोफ़ेसर,* इंटर यूनिवर्सिटी सेंटर फॉर ॲसट्रॉनॉमि एंड ॲस्ट्रोफिज़िक्स (IUCCA), गणेशखिंड, पुणे यूनिवर्सिटी, पुणे (महाराष्ट्र)

मुख्य सलाहकार

हृदयकांत दीवान, विद्याभवन सोसायटी, उदयपुर (राजस्थान)

मुख्य समन्वयक

हुकुम सिंह, *प्रोफ़ेसर* एवं विभागाध्यक्ष (अवकाश प्राप्त), डी.ई.एस.एम, एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली

सदस्य

अवंतिका दाम, *टी.जी.टी.,* सी.आई.ई., एक्सपेरिमेंटल स्कूल, शिक्षा विभाग, दिल्ली
अंजली गुप्ते, *अध्यापिका,* विद्या भवन पब्लिक स्कूल, उदयपुर (राजस्थान)
आर. आत्मारामन, *गणित शिक्षा सलाहकार,* टी.आई.मैट्रिक हायर सेकेंडरी स्कूल और ए.एम.टी.आई., चेन्नई (तमिलनाडु)
आशुतोष के. वझलवार, *प्रवाचक* (समन्वयक अंग्रेज़ी संस्करण), डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली
एच.सी.प्रधान, *प्रोफ़ेसर,* होमी भाभा विज्ञान शिक्षा केंद्र, टी.आई.एफ.आर., मुंबई (महाराष्ट्र)
महेंद्र शंकर, *प्रवक्ता* (सिलेक्शन ग्रेड) (अवकाशप्राप्त), एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली
मीना श्रीमाली, *अध्यापिका,* विद्या भवन सीनियर सेकेंडरी स्कूल, उदयपुर (राजस्थान)
वी.पी.सिंह, *प्रवाचक,* डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नई दिल्ली
सुरेश कुमार सिंह गौतम, *प्रोफ़ेसर,* डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली
सृजाता दास, *वरिष्ठ प्रवक्ता,* एस.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली
श्रद्धा अग्रवाल, *पी.जी.टी.,* पदमपत सिंघानिया शिक्षा केंद्र, कानपुर (उत्तर प्रदेश)

हिंदी अनुवादक

डी.आर.शर्मा, *पी.जी.टी.,* जवाहर नवोदय विद्यालय, दिल्ली
बी.एम.गुप्ता, *पी.जी.टी.* (अवकाशप्राप्त) एस.सी.ई.आर.टी., दिल्ली
महेंद्र शंकर, *प्रवक्ता* (सिलेक्शन ग्रेड) (अवकाशप्राप्त), एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली
राजकुमार धवन, गीता सीनियर सेकेंडरी स्कूल नं. 2, सुल्तानपुरी, दिल्ली

सदस्य समन्वयक

आशुतोष के. वझलवार, *प्रोफ़ेसर,* डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली

आभार

परिषद् पाठ्य पुस्तक समीक्षा के लिए आयोजित कार्यशाला में भाग लेने वाले निम्नलिखित प्रतिभागियों के बहुमूल्य योगदान के लिए हार्दिक आभार व्यक्त करती है। निरुपमा साहनी, *टी.जी.टी,* महावीर दिंगबर जैन सीनियर सेकेंडरी स्कूल, जयपुर राजस्थान; डॉ. रूही फातिमा, *टी.जी.टी.,* जामिया मिडल स्कूल, नयी दिल्ली; दीप्ति माथुर, *टी.जी.टी.*, मदर्स इंटरनैशनल स्कूल, नयी दिल्ली; के.बालाजी, *टी.जी.टी.,* केंद्रीय विद्यालय, दोनीमलाई, कर्नाटक; अमित बजाज, *टी.जी.टी.,* सी.आर.पी.एफ पब्लिक स्कूल, दिल्ली; ओमलता सिंह, *टी.जी.टी.,* प्रेझेंटेशन कॉन्व्हेंट सीनियर सेकेंडरी स्कूल, दिल्ली; नागेश मोने, *टी.जी.टी.,* द्रविड़ हाई स्कूल, वाई, महाराष्ट्र; गोरखनाथ शर्मा, *पी.जी.टी.,* जवाहर नवोदय विद्यालय, मेसरा, रांची, झारखंड; अजय कुमार सिंह, *टी.जी.टी.,* रामजस सीनियर सेकेंडरी स्कूल, नं.3, दिल्ली; रागिणी सुब्रमण्यन, *टी.जी.टी.,* एस.आर.डी.एफ. विवेकानंद विद्यालय, चैन्नई, तमिलनाडु; राजकुमार धवन, *पी.जी.टी.,* गीता सीनियर सेकेंडरी स्कूल नं.2, दिल्ली; डॉ. संजय मुद्‌गिल, प्रवक्ता, सी.आई.ई.टी., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली; डॉ. सुषमा जयरथ, प्रवाचक, डी.डब्ल्यू.एस., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली; डॉ. मोना यादव, प्रवक्ता, डी.डब्ल्यू.एस., एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली।

परिषद्, डॉ. राम अवतार (अवकाश प्राप्त *प्रोफ़ेसर,* एन.सी.ई.आर.टी.), सलाहकार, डी.ई.एस.एम, एन.सी.ई.आर.टी, नयी दिल्ली एवं डॉ. आर.पी.मौर्य, *प्रवाचक,* डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी. नयी दिल्ली द्वारा दिए गए सुझावों और टिप्पणियों के प्रति उनका आभार व्यक्त करती है।

परिषद् हिंदी रूपांतरण के पुनरावलोकन हेतु एन.सी.ई.आर.टी. में आयोजित कार्यशाला में निम्न भागियों की बहुमूल्य टिप्पणियों के लिए आभारी है: प्रताप सिंह रावत, *प्रवक्ता,* एस.सी.ई.आर.टी; गुड़गाँव; कविता खर्ब, *टी.जी.टी,* केंद्रीय विद्यालय, नयी दिल्ली; डी.पी.वार्ष्णेय, *पी.जी.टी;* केंद्रीय विद्यालय नं.1, दिल्ली; डी.के.शर्मा, *टी.जी.टी.,* राजकीय प्रतिभा विकास विद्यालय, दिल्ली; डी.आर.शर्मा, *पी.जी.टी.*, जवाहर नवोदय विद्यालय, दिल्ली; चंद्रशेखर सिंह, *टी.जी.टी.*, सनबीम एकेडमी, वाराणसी, उत्तर प्रदेश; बी.एम.गुप्ता, *पी.जी.टी.*, डायरेक्टरेट ऑफ एज्युकेशन, दिल्ली (अवकाशप्राप्त); जी.डी.ढल, *प्रवाचक,* एन.सी.ई.आर.टी (अवकाशप्राप्त), नयी दिल्ली।

पाठ्यपुस्तक विकास समिति की कार्यशालाओं में सुविधा एवं संसाधन प्रदान करने हेतु परिषद्, विद्या भवन सोसायटी, उदयपुर और उसके संकाय सदस्यों की आभारी है। पुस्तकालय सहायता के लिए निदेशक, सेंटर फॉर साइंस एजुकेशन एंड कम्युनिकेशन (C-SEC) दिल्ली विश्वविद्यालय के प्रति भी परिषद् आभार ज्ञापित करती है।

शैक्षिक व प्रशासनिक सहयोग के लिए परिषद् *प्रोफ़ेसर* हुकुम सिंह, विभाग प्रमुख, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी., की आभारी है।

परिषद् सज्जाद हैदर अंसारी, नरेश कुमार, राकेश कुमार, नरगिस इस्लाम डी.टी.पी. ऑपरेटर; एल.आर.भारती, अवध किशोर सिंह, कॉपी एडिटर; अभिमन्यू मोहांती, रितू झा, रूबी कुमारी प्रूफ रीडर; दीपक कपूर, कंप्यूटर स्टेशन प्रभारी, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी; ए.पी.सी. ऑफिस एवं प्रशासन विभाग, डी.ई.एस.एम., एन.सी.ई.आर.टी. एवं प्रकाशन विभाग, एन.सी.ई.आर.टी. के प्रति हार्दिक आभार ज्ञापित करती है।

विषय-सूची

भारत का संविधान

भाग-3 (अनुच्छेद 12-35)
(अनिवार्य शर्तों, कुछ अपवादों और युक्तियुक्त निर्बंधन के अधीन)
द्वारा प्रदत्त

मूल अधिकार

समता का अधिकार

- विधि के समक्ष एवं विधियों के समान संरक्षण;
- धर्म, मूलवंश, जाति, लिंग या जन्मस्थान के आधार पर;
- लोक नियोजन के विषय में;
- अस्पृश्यता और उपाधियों का अंत।

स्वातंत्र्य-अधिकार

- अभिव्यक्ति, सम्मेलन, संघ, संचरण, निवास और वृत्ति का स्वातंत्र्य;
- अपराधों के लिए दोष सिद्धि के संबंध में संरक्षण;
- प्राण और दैहिक स्वतंत्रता का संरक्षण;
- छः से चौदह वर्ष की आयु के बच्चों को निःशुल्क एवं अनिवार्य शिक्षा;
- कुछ दशाओं में गिरफ्तारी और निरोध से संरक्षण।

शोषण के विरुद्ध अधिकार

- मानव के दुर्व्यापार और बलात श्रम का प्रतिषेध;
- परिसंकटमय कार्यों में बालकों के नियोजन का प्रतिषेध।

धर्म की स्वतंत्रता का अधिकार

- अंतःकरण की और धर्म के अबाध रूप से मानने, आचरण और प्रचार की स्वतंत्रता;
- धार्मिक कार्यों के प्रबंध की स्वतंत्रता;
- किसी विशिष्ट धर्म की अभिवृद्धि के लिए करों के संदाय के संबंध में स्वतंत्रता;
- राज्य निधि से पूर्णतः पोषित शिक्षा संस्थाओं में धार्मिक शिक्षा या धार्मिक उपासना में उपस्थित होने के संबंध में स्वतंत्रता।

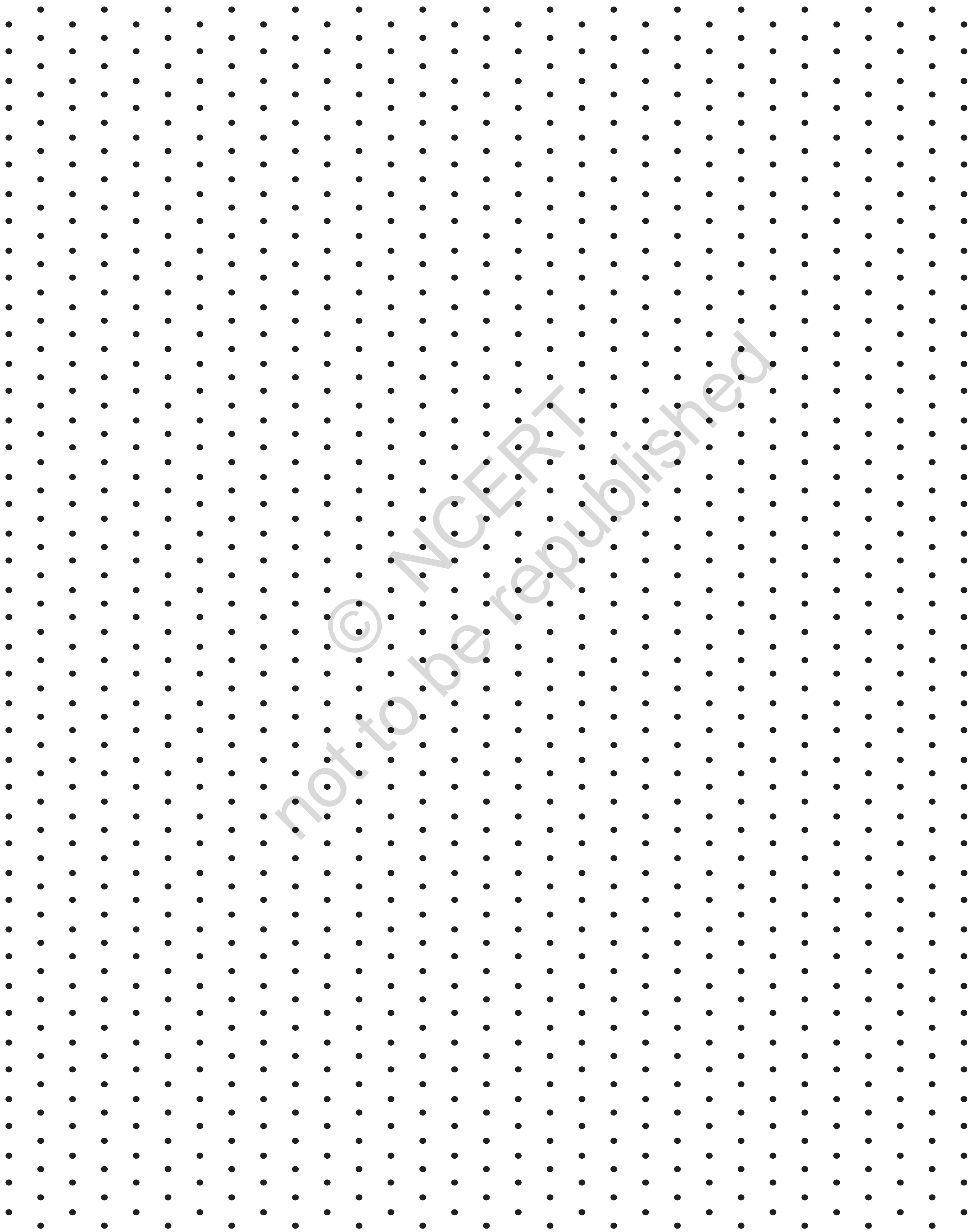
संस्कृति और शिक्षा संबंधी अधिकार

- अल्पसंख्यक-वर्गों को अपनी भाषा, लिपि या संस्कृति विषयक हितों का संरक्षण;
- अल्पसंख्यक-वर्गों द्वारा अपनी शिक्षा संस्थाओं का स्थापन और प्रशासन।

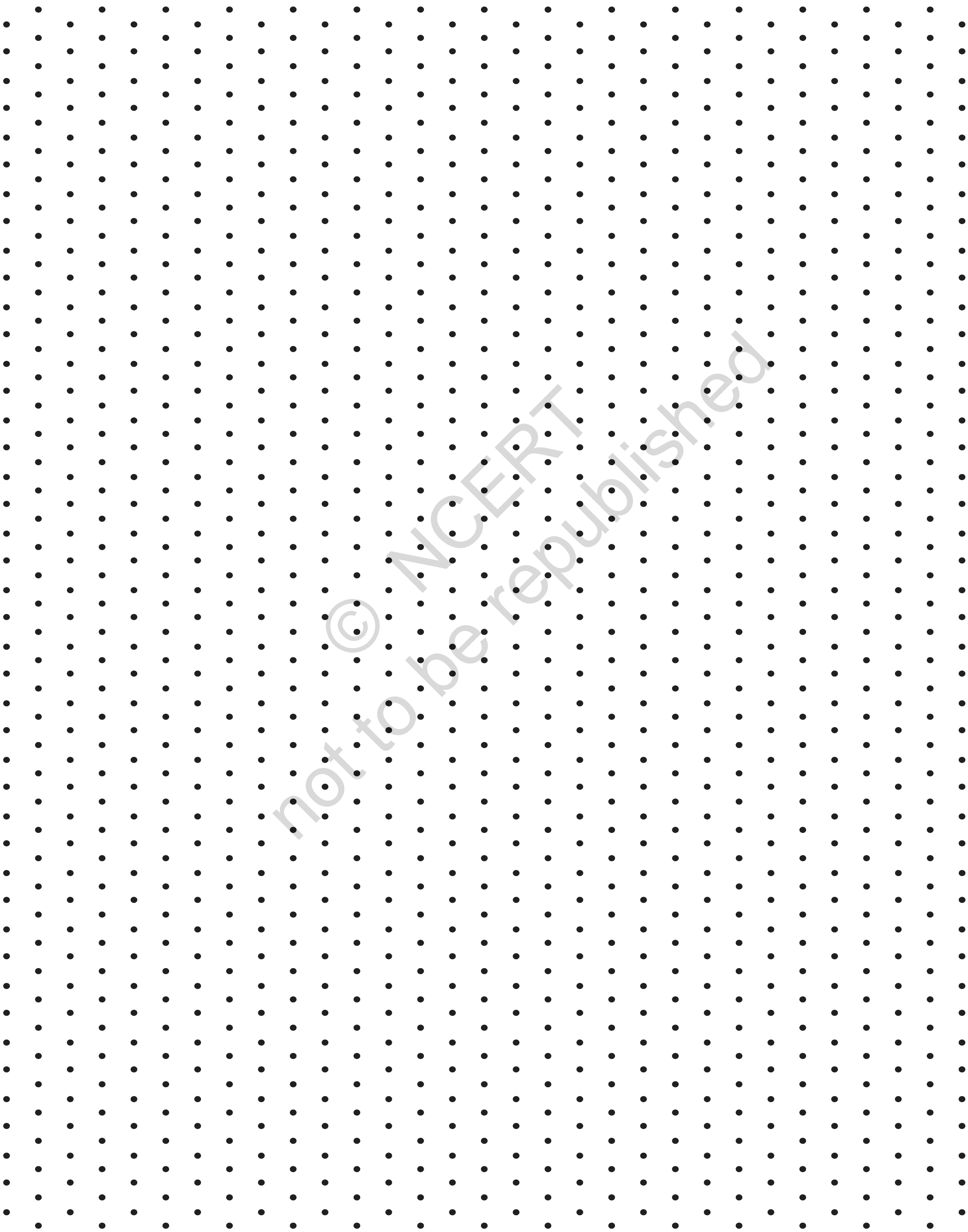
सांविधानिक उपचारों का अधिकार

- उच्चतम न्यायालय एवं उच्च न्यायालय के निर्देश या आदेश या रिट द्वारा प्रदत्त अधिकारों को प्रवर्तित कराने का उपचार।

आइसोमेट्रिक डॉट शीट



आइसोमेट्रिक डॉट शीट

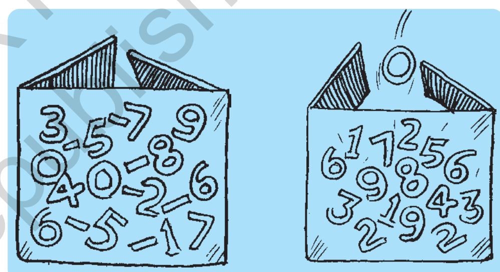


अध्याय 1

पूर्णांक

0757CH01

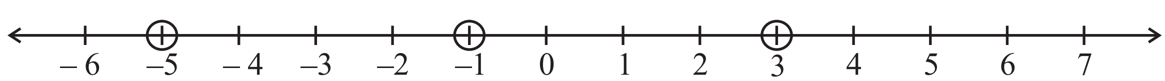
1.1 भूमिका



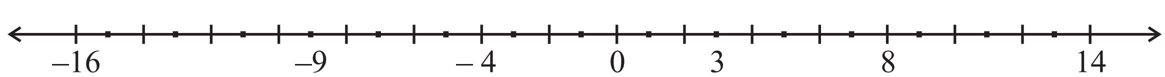
हम कक्षा VI में पूर्ण संख्याओं एवं पूर्णांकों के बारे में अध्ययन कर चुके हैं। हम जानते हैं कि पूर्णांक, संख्याओं का एक बड़ा संग्रह होता है, जिसमें पूर्ण संख्याएँ एवं ऋणात्मक संख्याएँ सम्मिलित होती हैं। आपने पूर्णांकों एवं पूर्ण संख्याओं में और क्या अंतर पाया है? इस अध्याय में, हम पूर्णांकों, उनके गुणों एवं संक्रियाओं के बारे में और अधिक अध्ययन करेंगे। सर्वप्रथम हम पिछली कक्षा में पूर्णांकों से संबंधित किए गए कार्य की समीक्षा करेंगे एवं उसे दोहराएँगे।

1.2 पुनरावलोकन

हम जानते हैं कि पूर्णांकों को संख्या रेखा पर कैसे निरूपित किया जाता है। नीचे दी गई संख्या रेखा पर कुछ पूर्णांकों को अंकित किया गया है :



क्या आप इन अंकित पूर्णांकों को आरो6ही क्रम में लिख सकते हैं? इन संख्याओं का आरोही क्रम – 5, – 1, 3 है। हमने – 5 को सबसे छोटी संख्या के रूप में क्यों चुना?



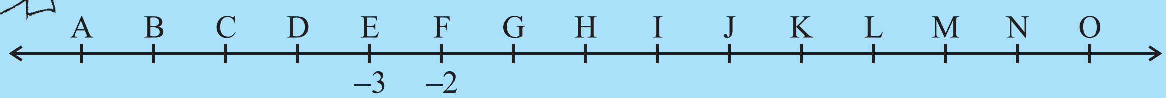
निम्नलिखित संख्या रेखा पर पूर्णांकों के साथ कुछ बिंदु अंकित किए गए हैं। इन पूर्णांकों को अवरोही क्रम में लिखिए।

प्रयास कीजिए

इन पूर्णांकों का अवरोही क्रम 14, 8, 3, ... है।

उपर्युक्त संख्या रेखा पर केवल कुछ पूर्णांक लिखे गए हैं। प्रत्येक बिंदु पर उचित संख्या लिखिए।

1. पूर्णांकों को निरूपित करने वाली एक संख्या रेखा नीचे दी हुई है :



–3 एवं –2 को क्रमश: E और F से अंकित किया गया है। B, D, H, J, M एवं O द्वारा कौन से पूर्णांक अंकित किए जाएँगें ?

2. पूर्णांकों 7, –5, 4, 0 एवं – 4 को आरोही क्रम में क्रमबद्ध कीजिए और अपने उत्तर की जाँच करने के लिए इन्हें एक संख्या रेखा पर अंकित कीजिए।

हम अपनी पिछली कक्षा में पूर्णांकों के योग एवं व्यवकलन का अध्ययन कर चुके हैं। निम्नलिखित कथनों को पढ़िए :

किसी संख्या रेखा पर जब हम

(i) एक धनात्मक पूर्णांक को जोड़ते हैं, तो दाईं ओर चलते हैं।

(ii) एक ऋणात्मक पूर्णांक को जोड़ते हैं, तो बाईं ओर चलते हैं।

(iii) एक धनात्मक पूर्णांक को घटाते हैं, तो बाईं ओर चलते हैं।

(iv) एक ऋणात्मक पूर्णांक को घटाते हैं, तो दाईं ओर चलते है।

बताइए कि निम्नलिखित कथन सही हैं अथवा गलत। जो कथन गलत है उनको सही कीजिए।

(i) जब दो धनात्मक पूर्णांकों को जोड़ा जाता है, तो हमें एक धनात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है।

(ii) जब दो ऋणात्मक पूर्णांकों को जोड़ा जाता है, तो हमें एक धनात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है।

(iii) जब एक धनात्मक पूर्णांक और एक ऋणात्मक पूर्णांक को जोड़ा जाता है, तो हमें हमेशा एक ऋणात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है।

(iv) पूर्णांक 8 का योज्य प्रतिलोम (– 8) है एवं पूर्णांक (– 8) का योज्य प्रतिलोम 8 है।

(v) व्यवकलन के लिए, जिस पूर्णांक को घटाया जाना है उसके योज्य प्रतिलोम को दूसरे पूर्णांक में जोड़ देते हैं।

(vi) $(-10) + 3 = 10 - 3$

(vii) $8 + (-7) - (-4) \neq 8 + 7 - 4$

अपने उत्तरों की तुलना निम्नलिखित उत्तरों के साथ कीजिए:

(i) सही है। उदाहरणत:

(a) $56 + 73 = 129$ (b) $113 + 82 = 195$ इत्यादि।

इस कथन के समर्थन में पाँच और उदाहरण दीजिए।

(ii) गलत, क्योंकि $(-6) + (-7) = -13$ है, जो कि धनात्मक पूर्णांक नहीं है। सही कथन इस प्रकार है :

जब दो ऋणात्मक पूर्णांक जोड़े जाते हैं, तो हम एक ऋणात्मक पूर्णांक ही प्राप्त करते हैं।: उदाहरणतः

(a) $(-56) + (-73) = -129$ (b) $(-113) + (-82) = -195$, इत्यादि

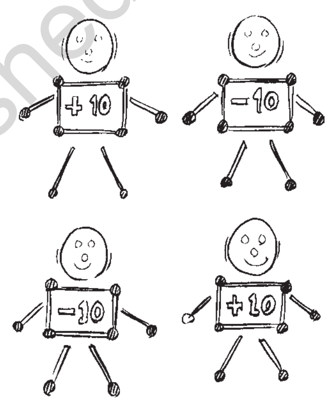
इस कथन को सत्यापित करने के लिए अपनी तरफ़ से पाँच और उदाहरण दीजिए ।

(iii) गलत, क्योंकि $-9 + 16 = 7$, यह एक ऋणात्मक पूर्णांक नहीं है। सही कथन इस प्रकार है: जब एक धनात्मक पूर्णांक और एक ऋणात्मक पूर्णांक को जोड़ा जाता है, तो हम उनका अंतर लेते हैं और बड़े पूर्णांक का चिह्न उस अंतर के पहले रख दिया जाता है। बड़े पूर्णांक का निर्णय दोनों पूर्णांकों के चिह्नों की अवहेलना करते हुए लिया जाता है। उदाहरणतः

(a) $(-56) + (73) = 17$ (b) $(-113) + 82 = -31$

(c) $16 + (-23) = -7$ (d) $125 + (-101) = 24$

इस कथन का सत्यापन करने के लिए पाँच और उदाहरण बनाइए।



(iv) सही! योज्य प्रतिलोम के कुछ और उदाहरण निम्नलिखित हैं :

पूर्णांक	**योज्य प्रतिलोम**
10	–10
–10	10
76	–76
–76	76

अतः, किसी पूर्णांक a का योज्य प्रतिलोम $-a$ है और $(-a)$ का योज्य प्रतिलोम a है।

(v) सही! व्यवकलन, योग का विपरीत होता है और इसलिए हम घटाए जाने वाले पूर्णांक के योज्य प्रतिलोम को दूसरे पूर्णांक में जोड़ देते हैं। उदाहरणतः,

(a) $56 - 73 =$ 56 + 73 का योज्य प्रतिलोम $= 56 + (-73) = -17$

(b) $56 - (-73) =$ 56 + (–73) का योज्य प्रतिलोम $= 56 + 73 = 129$

(c) $(-79) - 45 = (-79) + (-45) = -124$

(d) $(-100) - (-172) = -100 + 172 = 72$ इत्यादि ।

इस कथन का सत्यापन करने के लिए ऐसे कम से कम पाँच उदाहरण लिखिए।

इस प्रकार, हम पाते हैं कि किन्हीं भी दो पूर्णांकों a एवं b के लिए,

$a - b = a + b$ का योज्य प्रतिलोम $= a + (-b)$

और $a - (-b) = a + (-b)$ का योज्य प्रतिलोम $= a + b$

(vi) गलत है। क्योंकि $(-10) + 3 = -7$ और $10 - 3 = 7$,

इसलिए $(-10) + 3 \neq 10 - 3$ है ।

(vii) गलत । क्योंकि $8 + (-7) - (-4) = 8 + (-7) + 4 = 1 + 4 = 5$

और $8 + 7 - 4 = 15 - 4 = 11$ है, इसलिए

$8 + (-7) - (-4) = 8 - 7 + 4$ है ।

प्रयास कीजिए

अपनी पिछली कक्षा में हमने संख्याओं के साथ विभिन्न प्रकार के प्रतिरूप (पैटर्न) ज्ञात किए हैं। क्या आप निम्नलिखित में से प्रत्येक के लिए एक पैटर्न ज्ञात कर सकते हैं? यदि हाँ, तो इनको पूरा कीजिए।

(a) 7, 3, – 1, – 5, ______, ______, ______.

(b) – 2, – 4, – 6, – 8, ______, ______, ______.

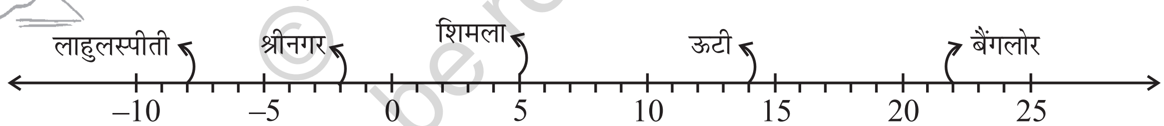
(c) 15, 10, 5, 0, ______, ______, ______.

(d) – 11, – 8, – 5, – 2, ______, ______, ______.

ऐसे कुछ और पैटर्न बनाइए और उन्हें पूरा करने के लिए अपने मित्रों से कहिए।

प्रश्नावली 1.1

1. किसी विशिष्ट दिन विभिन्न स्थानों के तापमानों को डिग्री सेल्सियस (°C) में निम्नलिखित संख्या रेखा द्वारा दर्शाया गया है :

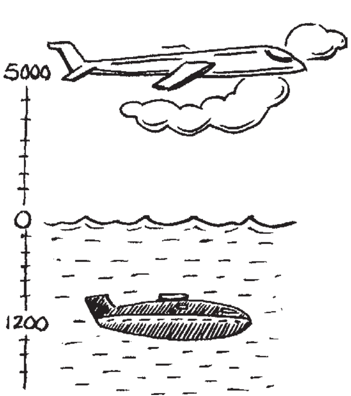


(a) इस संख्या रेखा को देखिए और इस पर अंकित स्थानों के तापमान लिखिए।

(b) उपर्युक्त स्थानों में से सबसे गर्म और सबसे ठंडे स्थानों के तापमानों में क्या अंतर है ?

(c) लाहुलस्पिति एवं श्रीनगर के तापमानों में क्या अंतर है ?

(d) क्या हम कह सकते हैं कि शिमला और श्रीनगर के तापमानों का योग शिमला के तापमान से कम है? क्या इन दोनों स्थानों के तापमानों का योग श्रीनगर के तापमान से भी कम है ?



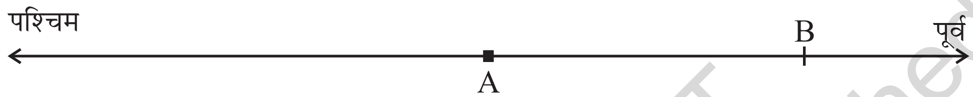
2. किसी प्रश्नोत्तरी में सही उत्तर के लिए धनात्मक अंक दिए जाते हैं और गलत उत्तर के लिए ऋणात्मक अंक दिए जाते हैं। यदि पाँच उत्तरोत्तर चक्करों (rounds) में जैक द्वारा प्राप्त किए गए अंक 25, – 5, – 10, 15 और 10 थे, तो बताइए अंत में उसके अंकों का कुल योग कितना था।

3. सोमवार को श्रीनगर का तापमान – 5°C था और मंगलवार को तापमान 2°C कम हो गया। मंगलवार को श्रीनगर का तापमान क्या था ? बुधवार को तापमान 4°C बढ़ गया। बुधवार को तापमान कितना था ?

4. एक हवाई जहाज़ समुद्र तल से 5000 मीटर की ऊँचाई पर उड़ रहा है। एक विशिष्ट बिंदु पर यह हवाई जहाज़ समुद्र तल से 1200 मीटर नीचे तैरती हुई पनडुब्बी के ठीक ऊपर है। पनडुब्बी और हवाई जहाज़ के बीच की ऊर्ध्वाधर दूरी कितनी है?

5. मोहन अपने बैंक खाते में ₹ 2000 जमा करता है और अगले दिन इसमें से ₹ 1642 निकाल लेता है। यदि खाते में से निकाली गई राशि को ऋणात्मक संख्या से निरूपित किया जाता है, तो खाते में जमा की गई राशि को आप कैसे निरूपित करोगे ? निकासी के पश्चात् मोहन के खाते में शेष राशि ज्ञात कीजिए ।

6. रीता बिंदु A से पूर्व की ओर बिंदु B तक 20 किलोमीटर की दूरी तय करती है। उसी सड़क के अनुदिश बिंदु B से वह 30 किलोमीटर की दूरी पश्चिम की ओर तय करती है। यदि पूर्व की ओर तय की गई दूरी को धनात्मक पूर्णांक से निरूपित किया जाता है, तो पश्चिम की ओर तय की गई दूरी को आप कैसे निरूपित करोगे ? बिंदु A से उसकी अंतिम स्थिति को किस पूर्णांक से निरूपित करोगे ?



7. किसी मायावी वर्ग में प्रत्येक पंक्ति, प्रत्येक स्तंभ एवं प्रत्येक विकर्ण की संख्याओं का योग समान होता है। बताइए निम्नलिखित में से कौनसा वर्ग एक मायावी वर्ग है।

5	–1	– 4
–5	–2	7
0	3	–3

(i)

1	–10	0
– 4	–3	–2
– 6	4	–7

(ii)

8. a और b के निम्नलिखित मानों के लिए $a - (-b) = a + b$ का सत्यापन कीजिए :

(i) $a = 21, b = 18$ (ii) $a = 118$, b = 125

(iii) $a = 75, b = 84$ (iv) $a = 28, b = 11$

9. निम्नलिखित कथनों को सत्य बनाने के लिए, बॉक्स में संकेत >, < अथवा = का उपयोग कीजिए :

(a) $(-8) + (-4)$ $\boxed{}$ $(-8) - (-4)$

(b) $(-3) + 7 - (19)$ $\boxed{}$ $15 - 8 + (-9)$

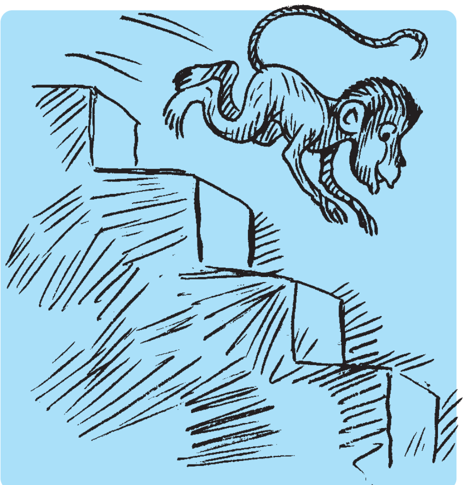
(c) $23 - 41 + 11$ $\boxed{}$ $23 - 41 - 11$

(d) $39 + (-24) - (15)$ $\boxed{}$ $36 + (-52) - (-36)$

(e) $-231 + 79 + 51$ $\boxed{}$ $-399 + 159 + 81$

10. पानी के एक तालाब में अंदर की ओर सीढ़ियाँ हैं। एक बंदर सबसे ऊपर वाली सीढ़ी (यानी पहली सीढ़ी) पर बैठा हुआ है। पानी नौवीं सीढ़ी पर है ।

(i) वह एक छलाँग में तीन सीढ़ियाँ नीचे की ओर और अगली छलाँग में दो सीढ़ियाँ ऊपर की ओर जाता है। कितनी छलाँगों में वह पानी के स्तर तक पहुँच पाएगा।



(ii) पानी पीने के पश्चात् वह वापस जाना चाहता है। इस कार्य के लिए वह एक छलाँग में 4 सीढ़ियाँ ऊपर की ओर और अगली छलाँग में 2 सीढ़ियाँ नीचे की ओर जाता है। कितनी छलाँगों में वह वापस सबसे ऊपर वाली सीढ़ी पर पहुँच जाएगा ?

(iii) यदि नीचे की ओर पार की गई सीढ़ियों की संख्या को ऋणात्मक पूर्णांक से निरूपित किया जाता है और ऊपर की ओर पार की गई सीढ़ियों की संख्या को धनात्मक पूर्णांक से निरूपित किया जाता है, तो निम्नलिखित को पूरा करते हुए भाग (i) और (ii) में उसकी गति को निरूपित कीजिए:
(a) $-3 + 2 + \ldots = -8$ (b) $4 - 2 + \ldots = 8$.
(a) में योग (-8) आठ सीढ़ियाँ नीचे जाने को निरूपित करता है, तो (b) में योग 8 किसको निरूपित करेगा ?

1.3 पूर्णांकों के योग एवं व्यवकलन के गुण

1.3.1 योग के अंतर्गत संवृत

हम सीख चुके हैं कि दो पूर्ण संख्याओं का योग पुन: एक पूर्ण संख्या ही होती है। उदाहरणत: $17 + 24 = 41$ है, जो कि पुन: एक पूर्ण संख्या है। हम जानते हैं कि यह गुण पूर्ण संख्याओं के योग का संवृत गुण कहलाता है ।

आइए देखें कि क्या यह गुण पूर्णांकों के लिए भी सत्य है अथवा नहीं। पूर्णांकों के कुछ युग्म नीचे दिए जा रहे हैं। नीचे दी हुई सारणी को देखिए और इसे पूरा कीजिए :

कथन	प्रेक्षण
(i) $17 + 23 = 40$	परिणाम एक पूर्णांक है।
(ii) $(-10) + 3 =$ _____	_______________
(iii) $(-75) + 18 =$ _____	_______________
(iv) $19 + (-25) = -6$	परिणाम एक पूर्णांक है।
(v) $27 + (-27) =$ _____	_______________
(vi) $(-20) + 0 =$ _____	_______________
(vii) $(-35) + (-10) =$ _____	_______________

आप क्या देखते हैं ? क्या दो पूर्णांकों का योग हमेशा एक पूर्णांक प्राप्त करता है ?
क्या आपको पूर्णांकों का कोई ऐसा युग्म मिला जिसका योग पूर्णांक नहीं है ?

क्योंकि पूर्णांक का योग एक पूर्णांक होता है, इसलिए हम कहते हैं कि पूर्णांक योग के अंतर्गत संवृत (closed) होते हैं ?

व्यापक रूप में, किन्हीं दो पूर्णांकों a तथा b के लिए $a + b$ एक पूर्णांक होता है।

1.3.2 व्यवकलन के अंतर्गत संवृत

जब हम एक पूर्णांक को दूसरे पूर्णांक में से घटाते हैं, तो क्या होता है ? क्या हम कह सकते हैं कि उनका अंतर भी एक पूर्णांक होता है ?

निम्नलिखित सारणी को देखिए और इसे पूरा कीजिए:

कथन	प्रेक्षण
(i) $7 - 9 = -2$	परिणाम एक पूर्णांक है ।
(ii) $17 - (-21) =$ _______	____________
(iii) $(-8) - (-14) = 6$	परिणाम एक पूर्णांक है ।
(iv) $(-21) - (-10) =$ _______	____________
(v) $32 - (-17) =$ _______	____________
(vi) $(-18) - (-18) =$ _______	____________
(vii) $(-29) - 0 =$ _______	____________

आप क्या देखते हैं? क्या पूर्णांकों का कोई ऐसा युग्म है जिसका अंतर पूर्णांक नहीं है ? क्या हम कह सकते हैं कि पूर्णांक व्यवकलन के अंतर्गत संवृत हैं ? *हाँ, हम कह सकते हैं कि पूर्णांक व्यवकलन के अंतर्गत संवृत होते हैं।*

अत:, *यदि a और b दो पूर्णांक हैं, तो $a - b$ भी एक पूर्णांक होता है।* क्या पूर्ण संख्याएँ भी इस गुण को संतुष्ट करती हैं ?

1.3.3 क्रमविनिमेय गुण

हम जानते हैं कि $3 + 5 = 5 + 3 = 8$ है, अर्थात् दो पूर्ण संख्याओं को किसी भी क्रम में जोड़ा जा सकता है। दूसरे शब्दों में, पूर्ण संख्याओं के लिए योग क्रमविनिमेय होता है।

क्या इसी कथन को हम पूर्णांकों के लिए भी कह सकते हैं ?

हम पाते हैं कि $5 + (-6) = -1$ और $(-6) + 5 = -1$ है।

इसलिए $5 + (-6) = (-6) + 5$ है।

क्या निम्नलिखित समान हैं ?

(i) $(-8) + (-9)$ और $(-9) + (-8)$

(ii) $(-23) + 32$ और $32 + (-23)$

(iii) $(-45) + 0$ और $0 + (-45)$

पाँच अन्य पूर्णांकों के युग्मों के लिए ऐसा प्रयास कीजिए। क्या आपको पूर्णांकों का कोई ऐसा युग्म मिलता है जिसके लिए पूर्णांकों का क्रम बदल देने से उनका योग भी बदल जाता है। नि:सन्देह नहीं। योग पूर्णांकों के लिए क्रमविनिमेय होता है ।

व्यापक रूप में, किन्हीं दो पूर्णांकों a और b, के लिए हम कह सकते हैं कि

$$a + b = b + a$$

- हम जानते हैं कि व्यवकलन पूर्ण संख्याओं के लिए क्रमविनिमेय नहीं है। क्या यह पूर्णांकों के लिए क्रमविनिमेय है ?

  पूर्णांक 5 एवं (–3) लीजिए। क्या 5 – (–3) एवं (–3) –5 समान हैं? नहीं, क्योंकि

  $$5 - (-3) = 5 + 3 = 8 \text{ है एवं } (-3) - 5 = -3 - 5 = -8 \text{ है।}$$

  पूर्णांकों के कम से कम पाँच विभिन्न युग्म लीजिए और इस कथन की जाँच कीजिए।

हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि *व्यवकलन पूर्णांकों के लिए क्रमविनिमेय नहीं है।*

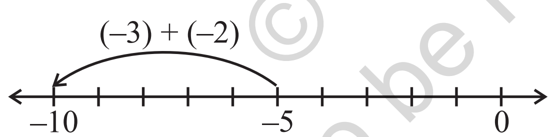
1.3.4 साहचर्य गुण

निम्नलिखित उदाहरणों को देखिए :

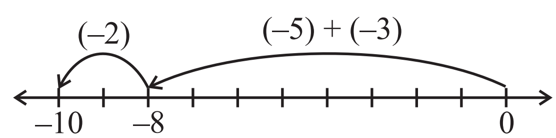
पूर्णांकों –3, –2 एवं –5 को लीजिए।

(–5) + [(–3) + (–2)] और [(–5) + (–3)] + (–2) पर ध्यान दीजिए।

प्रथम योग में (–3) और (–2) को मिलाकर एक समूह बनाया गया है और दूसरे योग में (–5) एवं (–3) को मिलाकर एक समूह बनाया गया है। हम इसकी जाँच करेंगे कि क्या हमको विभिन्न परिणाम प्राप्त होते हैं।



(–5) + [(–3) + (–2)]



[(–5) + (–3)] + (–2)

इन दोनों ही स्थितियों में हमें –10 प्राप्त होता है।

अर्थात्, $(-5) + [(-3) + (-2)] = [(-5) + (-2)] + (-3)$

इसी प्रकार, –3 , 1 और –7 को लीजिए।

$(-3) + [1 + (-7)] = -3 +$ ___________ = ___________

$[(-3) + 1] + (-7) = -2 +$ ___________ = ___________

क्या $(-3) + [1 + (-7)]$ एवं $[(-3) + 1] + (-7)$ समान हैं ?

इस प्रकार के पाँच और उदाहरण लीजिए। आप ऐसा कोई उदाहरण नहीं पाएँगे जिसके लिए इस तरह के योग विभिन्न हैं। यह दर्शाता है कि पूर्णांकों के लिए योग सहचारी (associative) होता है। व्यापक रूप में, पूर्णांकों a, b और c के लिए हम कह सकते हैं कि

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

1.3.5 योज्य तत्समक

जब हम किसी पूर्ण संख्या में शून्य को जोड़ते हैं, तो हमें वही पूर्ण संख्या प्राप्त होती है। पूर्ण संख्याओं के लिए शून्य एक योज्य तत्समक (additive identity) है। क्या यह पूर्णांकों के लिए भी एक योज्य तत्समक है ?

निम्नलिखित को देखिए और रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

(i) $(-8) + 0 = -8$ (ii) $0 + (-8) = -8$

(iii) $(-23) + 0 =$ _____ (iv) $0 + (-37) = -37$

(v) $0 + (-59) =$ _____ (vi) $0 +$ _____ $= -43$

(vii) $-61 +$ _____ $= -61$ (viii) _____ $+ 0 =$ _____

उपर्युक्त उदाहरण दर्शाते हैं कि शून्य, पूर्णांकों के लिए भी एक योज्य तत्समक है। आप किन्हीं पाँच अन्य पूर्णांकों में शून्य जोड़कर इसे सत्यापित कर सकते हैं।

व्यापक रूप में, किसी भी पूर्णांक a के लिए,

$$a + 0 = a = 0 + a$$

प्रयास कीजिए

1. एक ऐसा पूर्णांक युग्म लिखिए जिसके योग से हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :
   (a) एक ऋणात्मक पूर्णांक (b) शून्य
   (c) दोनों पूर्णांकों से छोटा एक पूर्णांक (d) दोनों पूर्णांकों में से केवल किसी एक से छोटा पूर्णांक
   (e) दोनों पूर्णांकों से बड़ा एक पूर्णांक
2. एक ऐसा पूर्णांक युग्म लिखिए जिसके अंतर से हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :
   (a) एक ऋणात्मक पूर्णांक (b) शून्य
   (c) दोनों पूर्णांकों से छोटा एक पूर्णांक (d) दोनों पूर्णांकों में से केवल किसी एक से बड़ा पूर्णांक
   (e) दोनों पूर्णांकों से बड़ा एक पूर्णांक

उदाहरण 1 ऐसे पूर्णांक युग्म लिखिए जिनका

(a) योग -3 है (b) अंतर -5 है

(c) अंतर 2 है (d) योग 0 है

हल

(a) $-1, -2, \because (-1) + (-2) = -3$ या $-5, 2, \because (-5) + 2 = -3$

(b) $-9, -4, \because (-9) - (-4) = -5$ या $-2, 3, \because (-2) - 3 = -5$

(c) $-7, -9, \because (-7) - (-9) = 2$ या $1, -1, \because 1 - (-1) = 2$

(d) $-10, 10, \because (-10) + 10 = 0$ या $5, -5, \because 5 + (-5) = 0$

क्या आप इन उदाहरणों में और अधिक युग्म लिख सकते हैं ?

प्रश्नावली 1.2

1. ऐसा पूर्णांक युग्म लिखिए जिसका
   (a) योग –7 है (b) अंतर –10 है (c) योग 0 है
2. (a) एक ऐसा ऋणात्मक पूर्णांक युग्म लिखिए जिसका अंतर 8 है।
   (b) एक ऋणात्मक पूर्णांक और एक धनात्मक पूर्णांक लिखिए जिनका योग –5 है।
   (c) एक ऋणात्मक पूर्णांक और एक धनात्मक पूर्णांक लिखिए जिनका अंतर –3 है।
3. किसी प्रश्नोत्तरी के तीन उत्तरोत्तर चक्करों (rounds) में टीम A द्वारा प्राप्त किए गए अंक – 40, 10, 0 थे और टीम B द्वारा प्राप्त किए गए अंक 10, 0, – 40 थे। किस टीम ने अधिक अंक प्राप्त किए? क्या हम कह सकते हैं कि पूर्णांकों को किसी भी क्रम में जोड़ा जा सकता है?
4. निम्नलिखित कथनों को सत्य बनाने के लिए रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:
   (i) $(–5) + (– 8) = (– 8) + (\ldots\ldots\ldots\ldots)$
   (ii) $–53 + \ldots\ldots\ldots\ldots = –53$
   (iii) $17 + \ldots\ldots\ldots\ldots = 0$
   (iv) $[13 + (– 12)] + (\ldots\ldots\ldots\ldots) = 13 + [(–12) + (–7)]$
   (v) $(– 4) + [15 + (–3)] = [– 4 + 15] + \ldots\ldots\ldots\ldots$

1.4 पूर्णांकों का गुणन

हम पूर्णांकों का योग एवं व्यवकलन कर सकते हैं। आईए अब सीखें कि पूर्णांकों को कैसे गुणा किया जाता है।

1.4.1 एक धनात्मक और एक ऋणात्मक पूर्णांक का गुणन

हम जानते हैं कि पूर्ण संख्याओं का गुणन बार-बार योग है।

प्रयास कीजिए

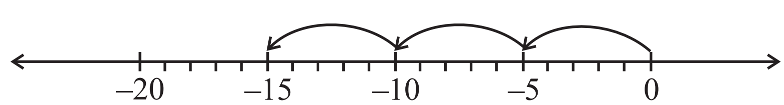
संख्या रेखा का उपयोग करते हुए, ज्ञात कीजिए:

$4 \times (– 8)$,
$8 \times (–2)$,
$3 \times (–7)$,
$10 \times (–1)$

उदाहरणतः, $5 + 5 + 5 = \quad 3 \times 5 = 15$

क्या आप पूर्णांकों के योग को भी इसी प्रकार निरूपित कर सकते हैं?

निम्नलिखित संख्या रेखा से हम पाते हैं कि $(–5) + (–5) + (–5) = –15$ है।

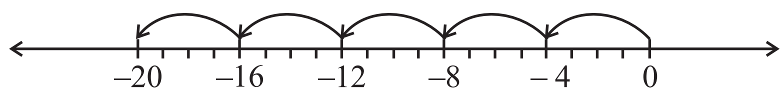


परंतु इसे हम निम्नलिखित रूप में भी लिख सकते हैं:

$$(–5) + (–5) + (–5) = 3 \times (–5)$$

इसलिए, $3 \times (–5) = –15$

इसी प्रकार, $(-4) + (-4) + (-4) + (-4) + (-4) = 5 \times (-4) = -20$



और $(-3) + (-3) + (-3) + (-3) =$ ___________ = ___________

साथ ही, $(-7) + (-7) + (-7) =$ ___________ = ___________

आइए देखें कि संख्या रेखा का उपयोग किए बिना एक धनात्मक पूर्णांक एवं एक ऋणात्मक पूर्णांक का गुणनफल कैसे ज्ञात किया जाए।

आइए एक अन्य प्रकार से $3 \times (-5)$ ज्ञात करें। सर्वप्रथम 3×5 ज्ञात कीजिए और प्राप्त गुणनफल से पहले ऋण (–) रखिए। आप –15 प्राप्त करते हैं। अर्थात् –15 प्राप्त करने के लिए हम $-(3 \times 5)$ प्राप्त करते हैं।

इसी प्रकार, $5 \times (-4) = -(5 \times 4) = -20$ है।

इसी प्रकार, निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए :

$4 \times (-8) =$ _____ = _____ , $3 \times (-7) =$ _____ = _____

$6 \times (-5) =$ _____ = _____ , $2 \times (-9) =$ _____ = _____

इस विधि का उपयोग करते हुए, हम पाते हैं कि

$10 \times (-43) =$ _____ $-(10 \times 43) = -430$

अभी तक हमने पूर्णांकों को (धनात्मक पूर्णांक) × (ऋणात्मक पूर्णांक) के रूप में गुणा किया है।

आइए अब इनको (ऋणात्मक पूर्णांक) × (धनात्मक पूर्णांक) के रूप में गुणा करें।

सर्वप्रथम हम -3×5 ज्ञात करते हैं।

यह ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित पैटर्न को देखिए:

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए:

(i) $6 \times (-19)$

(ii) $12 \times (-32)$

(iii) $7 \times (-22)$

हम पाते हैं :

$3 \times 5 = 15$

$2 \times 5 = 10 = 15 - 5$

$1 \times 5 = 5 = 10 - 5$

$0 \times 5 = 0 = 5 - 5$

इसलिए,

$-1 \times 5 = 0 - 5 = -5$

$-2 \times 5 = -5 - 5 = -10$

$-3 \times 5 = -10 - 5 = -15$

हम पहले ही प्राप्त कर चुके हैं कि $3 \times (-5) = -15$

अतः, हम पाते हैं कि $(-3) \times 5 = -15 = 3 \times (-5)$

इस प्रकार के पैटर्नों का उपयोग करते हुए, हम $(-5) \times 4 = -20 = 5 \times (-4)$ भी प्राप्त करते हैं।

पैटर्नों का उपयोग करते हुए, $(-4) \times 8$, $(-3) \times 7$, $(-6) \times 5$ और $(-2) \times 9$ ज्ञात कीजिए और जाँच कीजिए कि क्या

$$(-4) \times 8 = 4 \times (-8),\ (-3) \times 7 = 3 \times (-7),\ (-6) \times 5 = 6 \times (-5)$$

और $(-2) \times 9 = 2 \times (-9)$ है?

इसका उपयोग करते हुए, हम $(-33) \times 5 = 33 \times (-5) = -165$ प्राप्त करते हैं।

इस प्रकार, हम पाते हैं कि एक धनात्मक पूर्णांक और एक ऋणात्मक पूर्णांक को गुणा करते समय हम उनको पूर्ण संख्याओं के रूप में गुणा करते हैं और गुणनफल से पहले ऋण चिह्न (–) रख देते हैं। इस प्रकार हमें एक ऋणात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है।

प्रयास कीजिए

1. ज्ञात कीजिए:

(a) $15 \times (-16)$ (b) $21 \times (-32)$

(c) $(-42) \times 12$ (d) -55×15

2. जाँच कीजिए कि क्या

(a) $25 \times (-21) = (-25) \times 21$ है।

(b) $(-23) \times 20 = 23 \times (-20)$ है।

इस प्रकार के पाँच और उदाहरण लिखिए।

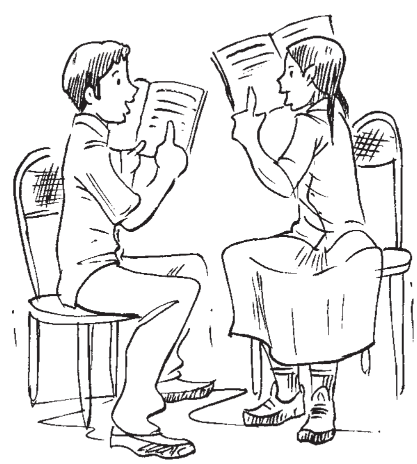
व्यापक रूप में, किन्हीं दो धनात्मक पूर्णांकों के लिए, हम कह सकते हैं कि:

$$a \times (-b) = (-a) \times b = -(a \times b)$$

1.4.2 दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणन

क्या आप गुणनफल $(-3) \times (-2)$ ज्ञात कर सकते हैं?

निम्नलिखित को देखिए :



$-3 \times 4 = -12$

$-3 \times 3 = -9 = -12 - (-3)$

$-3 \times 2 = -6 = -9 - (-3)$

$-3 \times 1 = -3 = -6 - (-3)$

$-3 \times 0 = 0 = -3 - (-3)$

$-3 \times (-1) = 0 - (-3) = 0 + 3 = 3$

$-3 \times (-2) = 3 - (-3) = 3 + 3 = 6$

क्या आपको कोई पैटर्न दिखाई देता है? ध्यान दीजिए कि गुणनफल कैसे परिवर्तित हुए हैं।

इन प्रेक्षणों के आधार पर, निम्नलिखित को पूरा कीजिए :

$-3 \times -3 =$ ______, $-3 \times -4 =$ ______

अब इन गुणनफलों को देखिए और रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

$-4 \times 4 = -16$

$-4 \times 3 = -12 = -16 + 4$

$-4 \times 2 =$ ______ $= -12 + 4$

$-4 \times 1 =$ ______

$-4 \times 0 =$ ______

$-4 \times (-1) =$ ______

$-4 \times (-2) =$ ______

$-4 \times (-3) =$ ______

प्रयास कीजिए

(i) $(-5) \times 4$, से शुरू करते हुए, $(-5) \times (-6)$ ज्ञात कीजिए ।

(ii) $(-6) \times 3$ से शुरू करते हुए, $(-6) \times (-7)$ ज्ञात कीजिए ।

इन पैटर्नों से हम देखते हैं कि

$(-3) \times (-1) = 3 = 3 \times 1$

$(-3) \times (-2) = 6 = 3 \times 2$

$(-3) \times (-3) = 9 = 3 \times 3$

और $(-4) \times (-1) = 4 = 4 \times 1$

इसलिए, $(-4) \times (-2) = 4 \times 2 =$ ______

$(-4) \times (-3) =$ ______ $=$ ______

अतः इन गुणनफलों को देखते हुए हम कह सकते हैं कि *दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल एक धनात्मक पूर्णांक होता है। हम दो ऋणात्मक पूर्णांकों को पूर्ण संख्याओं के रूप में गुणा करते हैं और गुणनफल से पहले धनात्मक चिह्न (+) रख देते हैं।*

इस प्रकार, हम पाते हैं कि $(-10) \times (-12) = +120 = 120$ है।

इसी प्रकार, $(-15) \times (-6) = +90 = 90$ है।

व्यापक रूप में, किन्हीं दो धनात्मक पूर्णांकों a एवं b के लिए,

$$(-a) \times (-b) = a \times b$$

प्रयास कीजिए ज्ञात कीजिए: $(-31) \times (-100)$, $(-25) \times (-72)$, $(-83) \times (-28)$

खेल 1

(i) एक ऐसा बोर्ड लीजिए जिस पर –104 से 104 तक के पूर्णांक अंकित हों, जैसा कि आकृति में दर्शाया गया है ।

(ii) एक थैले में दो नीले पासे और दो लाल पासे लीजिए। नीले पासों पर अंकित बिंदुओं की संख्या धनात्मक पूर्णांकों को दर्शाती हैं और लाल पासों पर अंकित बिंदुओं की संख्या ऋणात्मक पूर्णांकों को दर्शाती हैं।

(iii) प्रत्येक खिलाड़ी अपने काउंटर को शून्य पर रखेगा।

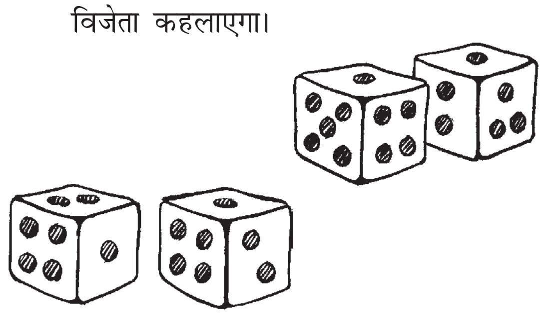
(iv) प्रत्येक खिलाड़ी थैले में से एक साथ दो पासे निकालेगा और उनको फेंकेगा।

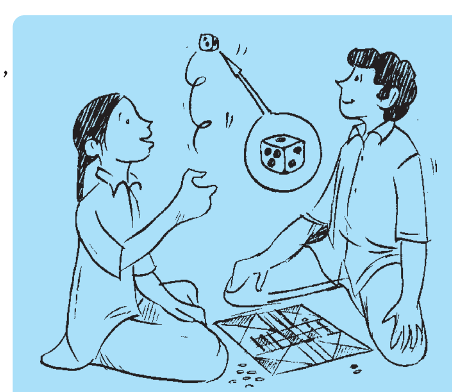
104	103	102	101	100	99	98	97	96	95	94
83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93
82	81	80	79	78	77	76	75	74	73	72
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
60	59	58	57	56	55	54	53	52	51	50
39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28
17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6
–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
–6	–7	–8	–9	–10	–11	–12	–13	–14	–15	–16
–27	–26	–25	–24	–23	–22	–21	–20	–19	–18	–17
–28	–29	–30	–31	–32	–33	–34	–35	–36	–37	–38
–49	–48	–47	–46	–45	–44	–43	–42	–41	–40	–39
–50	–51	–52	–53	–54	–55	–56	–57	–58	–59	–60
–71	–70	–69	–68	–67	–66	–65	–64	–63	–62	–61
–72	–73	–74	–75	–76	–77	–78	–79	–80	–81	–82
–93	–92	–91	–90	–89	–88	–87	–86	–85	–84	–83
–94	–95	–96	–97	–98	–99	–100	–101	–102	–103	–104

(v) पासों को फेंकने के बाद खिलाड़ी को प्रत्येक बार प्राप्त पासों पर अंकित संख्याओं को गुणा करना है।

(vi) यदि गुणनफल एक धनात्मक पूर्णांक है, तो खिलाड़ी अपने काउंटर को 104 की ओर खिसकाएगा और यदि गुणनफल एक ऋणात्मक पूर्णांक है, तो वह अपने काउंटर को –104 की ओर खिसकाएगा ।

(vii) जो खिलाड़ी पहले –104 या 104 पर पहुँचता है, विजेता कहलाएगा।





1.4.3 तीन अथवा अधिक ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल

हमने देखा कि दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल एक धनात्मक पूर्णांक होता है। तीन ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल क्या होगा? चार ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल क्या होगा? आइए निम्नलिखित उदाहरणों को देखते हैं :

Euler सबसे पहले गणितज्ञ थे जिन्होंने अपनी पुस्तक Ankitung zur Algebra (1770) में यह सिद्ध करने का प्रयास किया कि $(-1) \times (-1) = 1$ होता है।

(a) $(-4) \times (-3) = 12$

(b) $(-4) \times (-3) \times (-2) = [(-4) \times (-3)] \times (-2) = 12 \times (-2) = -24$

(c) $(-4) \times (-3) \times (-2) \times (-1) = [(-4) \times (-3) \times (-2)] \times (-1) = (-24) \times (-1) = 24$

(d) $(-5) \times [(-4) \times (-3) \times (-2) \times (-1)] = (-5) \times 24 = -120$

उपर्युक्त उदाहरणों से हम देखते हैं कि

(a) दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल एक धनात्मक पूर्णांक है।

(b) तीन ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल एक ऋणात्मक पूर्णांक है।

(c) चार ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल एक धनात्मक पूर्णांक है।

(d) में पाँच ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल क्या है?

6 ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल क्या होगा?

इसके अतिरिक्त हम यह भी देखते हैं कि उपर्युक्त (a) और (c) में गुणा किए गए पूर्णांकों की संख्या सम है (क्रमश: दो और चार) और (a) एवं (c) में प्राप्त गुणनफल धनात्मक पूर्णांक हैं। (b) एवं (d) में गुणा किए गए ऋणात्मक पूर्णांकों की संख्या विषम है। और (b) एवं (d) में प्राप्त गुणनफल ऋणात्मक पूर्णांक हैं।

इस प्रकार, हम पाते हैं कि *गुणा किए जाने वाले ऋणात्मक पूर्णांकों की संख्या यदि सम है, तो गुणनफल धनात्मक है और यदि गुणा किए जाने वाले ऋणात्मक पूर्णांकों की संख्या विषम है, तो गुणनफल एक ऋणात्मक पूर्णांक है।*

प्रत्येक प्रकार के पाँच और उदाहरण देकर इस कथन की पुष्टि कीजिए।

एक विशेष स्थिति

निम्नलिखित कथनों एवं परिणामी गुणनफलों पर विचार कीजिए :

$(-1) \times (-1) = +1$

$(-1) \times (-1) \times (-1) = -1$

$(-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = +1$

$(-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = -1$

इसका अर्थ यह हुआ कि यदि पूर्णांक (-1) को सम संख्या बार गुणा किया जाता है तो गुणनफल $+1$ है और यदि पूर्णांक (-1) को विषम संख्या बार गुणा किया जाता है तो गुणनफल -1 है। आप ऊपर दिए कथन में (-1) के युग्म बनाकर इसकी जाँच कर सकते हैं। पूर्णांकों का गुणनफल ज्ञात करने में यह बहुत उपयोगी है।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

(i) गुणनफल $(-9) \times (-5) \times (-6) \times (-3)$ धनात्मक है, जबकि गुणनफल $(-9) \times (-5) \times 6 \times (-3)$ ऋणात्मक है। क्यों?

(ii) गुणनफल का चिह्न क्या होगा, यदि हम निम्नलिखित को एक साथ गुणा करते हैं?

(a) आठ ऋणात्मक पूर्णांक एवं तीन धनात्मक पूर्णांक

(b) पाँच ऋणात्मक पूर्णांक और चार धनात्मक पूर्णांक

(c) (–1) को बारह बार

(d) (–1) को $2m$ बार, जहाँ m एक प्राकृत संख्या है।

1.5 पूर्णांकों के गुणन के गुण

1.5.1 गुणन के अंतर्गत संवृत

1. निम्नलिखित सारणी को देखिए और इसे पूरा कीजिए:

कथन	निष्कर्ष
$(-20) \times (-5) = 100$	गुणनफल एक पूर्णांक है
$(-15) \times 17 = -255$	गुणनफल एक पूर्णांक है
$(-30) \times 12 =$ _____	
$(-15) \times (-23) =$ _____	
$(-14) \times (-13) =$ _____	
$12 \times (-30) =$ _____	

आप क्या देखते हैं? क्या आप एक ऐसा पूर्णांक युग्म ज्ञात कर सकते हैं जिसका गुणनफल एक पूर्णांक नहीं है? नहीं, इससे हमें यह ज्ञात होता है कि दो पूर्णांकों का गुणनफल पुन: एक पूर्णांक ही होता है। अत: हम कह सकते हैं कि पूर्णांक गुणन के अंतर्गत संवृत होते हैं।

व्यापक रूप में,

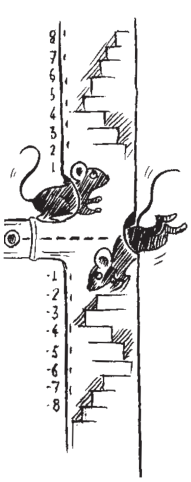
सभी पूर्णांकों a तथा b के लिए $a \times b$ एक पूर्णांक होता है।

पाँच और पूर्णांक युग्मों के गुणनफल ज्ञात कीजिए और उपर्युक्त कथन को सत्यापित कीजिए।

1.5.2 गुणन की क्रमविनिमेयता

हम जानते हैं कि पूर्ण संख्याओं के लिए गुणन क्रमविनिमेय होता है। क्या हम कह सकते हैं कि पूर्णांकों के लिए भी गुणन क्रमविनिमेय है?

निम्नलिखित सारणी को देखिए और इसे पूरा कीजिए:



कथन 1	कथन 2	निष्कर्ष
$3 \times (-4) = -12$	$(-4) \times 3 = -12$	$3 \times (-4) = (-4) \times 3$
$(-30) \times 12 =$ _____	$12 \times (-30) =$ _____	
$(-15) \times (-10) = 150$	$(-10) \times (-15) = 150$	
$(-35) \times (-12) =$ _____	$(-12) \times (-35) =$	
$(-17) \times 0 =$ _____		
__________ = _____	$(-1) \times (-15) =$	

आप क्या देखते हैं ? उपर्युक्त उदाहरण संकेत करते हैं कि पूर्णांकों के लिए गुणन क्रमविनिमेय है। इस प्रकार के पाँच और उदाहरण लिखिए एवं सत्यापन कीजिए।

व्यापक रूप में, किन्हीं दो पूर्णांकों a तथा b के लिए,

$$a \times b = b \times a$$

1.5.3 शून्य से गुणन

हम जानते है कि जब किसी पूर्ण संख्या को शून्य से गुणा किया जाता है, तो गुणनफल के रूप में शून्य प्राप्त होता है। ऋणात्मक पूर्णांकों एवं शून्य के निम्नलिखित गुणनफलों को देखिए। पहले किए गए पैटर्नों के आधार पर हम इन्हें प्राप्त करते हैं।

$(-3) \times 0 = 0$

$0 \times (-4) = 0$

$-5 \times 0 =$ ______

$0 \times (-6) =$ ______

यह सारणी दर्शाती है कि एक ऋणात्मक पूर्णांक और शून्य का गुणनफल शून्य होता है। व्यापक रूप में, किसी भी पूर्णांक a के लिए,

$$a \times 0 = 0 \times a = 0$$

1.5.4 गुणनात्मक तत्समक

हम जानते है कि पूर्ण संख्याओं के लिए 1 गुणनात्मक तत्समक (multiplicative identity) है।

जाँच कीजिए कि 1 पूर्णांकों के लिए भी गुणनात्मक तत्समक है। 1 के साथ पूर्णांकों के निम्नलिखित गुणनफलों को देखिए :

$(-3) \times 1 = -3$	$1 \times 5 = 5$
$(-4) \times 1 =$ ______	$1 \times 8 =$ ______
$1 \times (-5) =$ ______	$3 \times 1 =$ ______
$1 \times (-6) =$ ______	$7 \times 1 =$ ______

यह दर्शाता है कि 1 पूर्णांकों के लिए भी गुणनात्मक तत्समक है।

व्यापक रूप में, किसी भी पूर्णांक a के लिए, हम पाते हैं कि

$$a \times 1 = 1 \times a = a$$

यदि किसी भी पूर्णांक को -1 से गुणा किया जाए, तो क्या होता है ? निम्नलिखित को पूरा कीजिए:

$(-3) \times (-1) = 3$

$3 \times (-1) = -3$

$(-6) \times (-1) =$ ______

$(-1) \times 13 =$ ______

$(-1) \times (-25) =$ ______

$18 \times (-1) =$ ______

पूर्णांकों के लिए शून्य योज्य तत्समक है, जबकि 1 गुणनात्मक तत्समक है। जब किसी पूर्णांक a को (-1) से गुणा किया जाता है, तो हमें उस पूर्णांक का योज्य प्रतिलोम प्राप्त होता है, अर्थात्

$a \times (-1) = (-1) \times a = -a$ होता है।

आप क्या देखते हैं ?

क्या हम कह सकते हैं कि -1 पूर्णांकों के लिए गुणनात्मक तत्समक है ? नहीं।

1.5.5 गुणन साहचर्य गुण

–3, –2 और 5 को लीजिए।

$[(-3) \times (-2)] \times 5$ और $(-3) \times [(-2) \times 5]$ पर विचार कीजिए।

प्रथम स्थिति में, (–3) एवं (–2) को मिलाकर एक समूह बनाया गया है और दूसरी स्थिति में, (–2) एवं 5 को मिलाकर एक समूह बनाया गया है।

हम पाते हैं कि $[(-3) \times (-2)] \times 5 = 6 \times 5 = 30$

और $(-3) \times [(-2) \times 5] = (-3) \times (-10) = 30$

इस प्रकार, दोनों ही स्थितियों में हम एक ही उत्तर प्राप्त करते हैं।

अतः, $[(-3) \times (-2)] \times 5 = (-3) \times [(-2) \times 5]$

निम्नलिखित पर विचार कीजिए और गुणनफलों को पूरा कीजिए:

$[7 \times (-6)] \times 4 =$ ___________ $\times 4 =$ ___________

$7 \times [(-6) \times 4] = 7 \times$ ___________ $=$ ___________

क्या $[7 \times (-6)] \times 4 = 7 \times [(-6) \times (4)]$ है?

क्या पूर्णांकों के विभिन्न प्रकार के समूहों से गुणनफल प्रभावित होता है?

व्यापक रूप में, किन्हीं तीन पूर्णांकों a, b तथा c के लिए,

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

a, b और c मे से प्रत्येक के लिए पाँच मान लीजिए और इस गुण का सत्यापन कीजिए।

अतः पूर्ण संख्याओं की तरह तीन पूर्णांकों का गुणनफल उनके समूह बनाने पर निर्भर नहीं करता है और यह पूर्णांकों के लिए गुणन का साहचर्य गुण कहलाता है।

1.5.6 वितरण गुण

हम जानते हैं कि

$16 \times (10 + 2) = (16 \times 10) + (16 \times 2)$ [योग पर गुणन का वितरण नियम]

आइए जाँच करते हैं क्या यह पूर्णांकों के लिए भी सत्य है? निम्नलिखित को देखिए:

(a) $(-2) \times (3 + 5) = -2 \times 8 = -16$

और $[(-2) \times 3] + [(-2) \times 5] = (-6) + (-10) = -16$

अत :, $(-2) \times (3 + 5) = [(-2) \times 3] + [(-2) \times 5]$

(b) $(-4) \times [(-2) + 7] = (-4) \times 5 = -20$

और $[(-4) \times (-2)] + [(-4) \times 7] = 8 + (-28) = -20$

अत :, $(-4) \times [(-2) + 7] = [(-4) \times (-2)] + [(-4) \times 7]$

(c) $(-8) \times [(-2) + (-1)] = (-8) \times (-3) = 24$

और $[(-8) \times (-2)] + [(-8) \times (-1)] = 16 + 8 = 24$

इसलिए, $(-8) \times [(-2) + (-1)] = [(-8) \times (-2)] + [(-8) \times (-1)]$

क्या हम कह सकते हैं कि पूर्णांकों के लिए भी योग पर गुणन का वितरण नियम सत्य है? हाँ

व्यापक रूप में, किन्हीं तीन पूर्णांकों a, b और c के लिए,

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

a, b और c में से प्रत्येक के लिए कम से कम पाँच विभिन्न मान लीजिए और उपर्युक्त वितरण गुण को सत्यापित कीजिए।

प्रयास कीजिए

(i) क्या $10 \times [(6 + (-2)] = 10 \times 6 + 10 \times (-2)$?

(ii) क्या $(-15) \times [(-7) + (-1)] = (-15) \times (-7) + (-15) \times (-1)$?

अब निम्नलिखित पर विचार कीजिए :

क्या हम कह सकते हैं कि $4 \times (3 - 8) = 4 \times 3 - 4 \times 8$ है?

आइए इसकी जाँच करें :

$$4 \times (3 - 8) = 4 \times (-5) = -20$$

$$4 \times 3 - 4 \times 8 = 12 - 32 = -20$$

इसलिए, $4 \times (3 - 8) = 4 \times 3 - 4 \times 8$ है।

निम्नलिखित पर विचार कीजिए :

$$(-5) \times [(-4) - (-6)] = (-5) \times 2 = -10$$

$$[(-5) \times (-4)] - [(-5) \times (-6)] = 20 - 30 = -10$$

अत :, $(-5) \times [(-4) - (-6)] = [(-5) \times (-4)] - [(-5) \times (-6)]$

$(-9) \times [10 - (-3)]$ और $[(-9) \times 10] - [(-9) \times (-3)]$ के लिए इस कथन की जाँच कीजिए।

आप पाएँगे कि ये भी समान हैं।

व्यापक रूप में किन्हीं भी तीन पूर्णांकों a, b और c के लिए,

$$a \times (b - c) = a \times b - a \times c$$

a, b और c में से प्रत्येक के लिए कम से कम पाँच मान लीजिए और इस गुण को सत्यापित कीजिए।

प्रयास कीजिए

(i) क्या $10 \times (6 - (-2)] = 10 \times 6 - 10 \times (-2)$ है?

(ii) क्या $(-15) \times [(-7) - (-1)] = (-15) \times (-7) - (-15) \times (-1)$ है?

1.5.7 गुणन को आसान बनाना

निम्नलिखित पर विचार कीजिए :

(i) $(-25) \times 37 \times 4$ को हम $[(-25) \times 37] \times 4 = (-925) \times 4 = -3700$ के रूप में ज्ञात कर सकते हैं।

अथवा हम इसे इस प्रकार भी कर सकते हैं :

$(-25) \times 37 \times 4 = (-25) \times 4 \times 37 = [(-25) \times 4] \times 37 = (-100) \times 37 = -3700$

कौन-सी विधि आसान है ?

स्पष्ट रूप से दूसरी विधि आसान है, क्योंकि (-25) को 4 से गुणा करने पर -100 प्राप्त होता है, जिसे 37 से गुणा करना आसान है। ध्यान दीजिए दूसरी विधि में पूर्णांकों की क्रमविनिमेयता और सहचारिता सम्मिलित हैं।

इस प्रकार, हम देखते हैं कि पूर्णांकों की क्रमविनिमेयता, सहचारिता और वितरणता, परिकलन को सरल बनाने में हमारी सहायता करती हैं। आइए इससे आगे और देखें कि इन गुणों का उपयोग करते हुए कैसे परिकलनों को आसान बनाया जा सकता है।

(ii) 16×12 ज्ञात कीजिए।

16×12 को $16 \times (10 + 2)$ के रूप में लिखा जा सकता है।

$16 \times 12 = 16 \times (10 + 2) = 16 \times 10 + 16 \times 2 = 160 + 32 = 192$

(iii) $(-23) \times 48 = (-23) \times [50 - 2] = (-23) \times 50 - (-23) \times 2 = (-1150) - (-46)$

$= -1104$

(iv) $(-35) \times (-98) = (-35) \times [(-100) + 2] = (-35) \times (-100) + (-35) \times 2$

$= 3500 + (-70) = 3430$

(v) $52 \times (-8) + (-52) \times 2$

$(-52) \times 2$ को $52 \times (-2)$ के रूप में भी लिखा जा सकता है।

इसलिए, $52 \times (-8) + (-52) \times 2 = 52 \times (-8) + 52 \times (-2)$

$= 52 \times [(-8) + (-2)] = 52 \times [(-10)] = -520$

प्रयास कीजिए

वितरण गुण का उपयोग करते हुए, $(-49) \times 18$; $(-25) \times (-31)$; $70 \times (-19) + (-1) \times 70$ के मान ज्ञात कीजिए।

उदाहरण 2 निम्नलिखित में से प्रत्येक गुणनफल को ज्ञात कीजिए :

(i) $(-18) \times (-10) \times 9$ (ii) $(-20) \times (-2) \times (-5) \times 7$

(iii) $(-1) \times (-5) \times (-4) \times (-6)$

हल

(i) $(-18) \times (-10) \times 9 = [(-18) \times (-10)] \times 9 = 180 \times 9 = 1620$

(ii) $(-20) \times (-2) \times (-5) \times 7 = -20 \times (-2 \times -5) \times 7 = [-20 \times 10] \times 7 = -1400$

(iii) $(-1) \times (-5) \times (-4) \times (-6) = [(-1) \times (-5)] \times [(-4) \times (-6)] = 5 \times 24 = 120$

उदाहरण 3 सत्यापित कीजिए

$(-30) \times [13 + (-3)] = [(-30) \times 13] + [(-30) \times (-3)]$

हल $(-30) \times [13 + (-3)] = (-30) \times 10 = -300$

$[(-30) \times 13] + [(-30) \times (-3)] = -390 + 90 = -300$

इसलिए, $(-30) \times [13 + (-3)] = [(-30) \times 13] + [(-30) \times (-3)]$

उदाहरण 4 15 प्रश्नों वाले एक कक्षा टेस्ट में, प्रत्येक सही उत्तर के लिए 4 अंक दिए जाते हैं और प्रत्येक गलत उत्तर के लिए (–2) अंक दिए जाते हैं। (i) गुरुप्रीत सभी प्रश्नों को हल करती है, परंतु उसके उत्तरों में से केवल 9 सही हैं। उसने कुल कितने अंक प्राप्त किए हैं ? (ii) उसके एक मित्र के केवल 5 उत्तर सही हैं। उस मित्र के द्वारा प्राप्त अंक कितने हैं?

हल

(i) एक सही उत्तर के लिए दिए जाने वाले अंक $= 4$

इसलिए 9 सही उत्तरों के लिए दिए गए अंक $= 4 \times 9 = 36$

एक गलत उत्तर के लिए दिए जाने वाले अंक $= -2$

इसलिए 6 $(= 15 - 9)$ गलत उत्तरों के लिए दिए जाने वाले अंक $= (-2) \times 6 = -12$

इसलिए, गुरुप्रीत द्वारा प्राप्त किए गए अंक $= 36 + (-12) = 24$

(ii) एक सही उत्तर के लिए दिए जाने वाले अंक $= 4$

इस प्रकार, 5 सही उत्तरों के लिए दिए गए अंक $= 4 \times 5 = 20$

एक गलत उत्तर के लिए दिए जाने वाले अंक $= (-2)$

अत :, 10 $(=15 - 5)$ गलत उत्तरों के लिए दिए जाने वाले अंक $= (-2) \times 10 = -20$

इसलिए, गुरुप्रीत के मित्र द्वारा प्राप्त किए गए अंक $= 20 + (-20) = 0$

उदाहरण 5 मान लीजिए कि हम पृथ्वी से ऊपर की दूरी को धनात्मक पूर्णांक से निरूपित करते हैं और पृथ्वी से नीचे की दूरी को ऋणात्मक पूर्णांक से निरूपित करते हैं, तो निम्नलिखित के उत्तर दीजिए :

(i) एक उत्थापक (elevator) किसी खान कूपक मे 5 m प्रति मिनट की दर से नीचे जाता है। एक घंटे पश्चात् उसकी स्थिति क्या होगी ?

(ii) यदि वह भूमि से 15 m ऊपर से नीचे जाना शुरू करता है, तो 45 मिनट बाद उसकी स्थिति क्या होगी ?

हल

(i) क्योंकि उत्थापक नीचे की ओर जा रहा है, इसलिए इसके द्वारा तय की गई दूरी को ऋणात्मक पूर्णांक से निरूपित किया जाएगा।

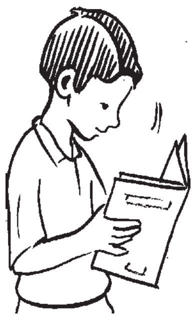
एक मिनट में उत्थापक की स्थिति में परिवर्तन $= -5$ m

60 मिनट पश्चात् उत्थापक की स्थिति में परिवर्तन $= (-5) \times 60 = -300$ m, अर्थात् भूमि की सतह से 300 m नीचे।

(ii) 45 m में उत्थापक की स्थिति में परिवर्तन $= (-5) \times 45 = -225$ m

इसलिए, उत्थापक की अंतिम स्थिति $= -225 + 15 = -210$ m, अर्थात् भूमि की सतह से 210 m नीचे।

प्रश्नावली 1.3



1. निम्नलिखित गुणनफलों को ज्ञात कीजिए :

(a) $3 \times (-1)$ (b) $(-1) \times 225$

(c) $(-21) \times (-30)$ (d) $(-316) \times (-1)$

(e) $(-15) \times 0 \times (-18)$ (f) $(-12) \times (-11) \times (10)$

(g) $9 \times (-3) \times (-6)$ (h) $(-18) \times (-5) \times (-4)$

(i) $(-1) \times (-2) \times (-3) \times 4$ (j) $(-3) \times (-6) \times (-2) \times (-1)$

2. निम्नलिखित को सत्यापित कीजिए :

(a) $18 \times [7 + (-3)] = [18 \times 7] + [18 \times (-3)]$

(b) $(-21) \times [(-4) + (-6)] = [(-21) \times (-4)] + [(-21) \times (-6)]$

3. (i) किसी भी पूर्णांक a के लिए, $(-1) \times a$ किसके समान है ?

(ii) वह पूर्णांक ज्ञात कीजिए, जिसका (-1) के साथ गुणनफल है :

(a) -22 (b) 37 (c) 0

4. $(-1) \times 5$ से आरंभ करके विभिन्न गुणनफलों द्वारा कोई पैटर्न दर्शाते हुए $(-1) \times (-1) = 1$ को निरूपित कीजिए।

5. उचित गुणों का उपयोग करते हुए, गुणनफल ज्ञात कीजिए :

(a) $26 \times (-48) + (-48) \times (-36)$ (b) $8 \times 53 \times (-125)$

(c) $15 \times (-25) \times (-4) \times (-10)$ (d) $(-41) \times 102$

(e) $625 \times (-35) + (-625) \times 65$ (f) $7 \times (50 - 2)$

(g) $(-17) \times (-29)$ (h) $(-57) \times (-19) + 57$

6. किसी हिमीकरण (ठंडा) प्रक्रिया में, कमरे के तापमान को $40°C$ से, $5°C$ प्रति घंटे की दर से कम करने की आवश्यकता है। इस प्रक्रिया के शुरू होने के 10 घंटे बाद, कमरे का तापमान क्या होगा ?

7. दस प्रश्नों वाले एक कक्षा टेस्ट में प्रत्येक सही उत्तर के लिए 5 अंक दिए जाते हैं और प्रत्येक गलत उत्तर के लिए (-2) अंक दिए जाते हैं एवं प्रयत्न नहीं किए गए प्रश्नों के लिए शून्य दिया जाता है।

(i) मोहन चार प्रश्नों का सही और छः प्रश्नों का गलत उत्तर देता है। उसके द्वारा प्राप्त अंक कितने हैं ?

(ii) रेशमा के पाँच उत्तर सही हैं और पाँच उत्तर गलत है। उसके द्वारा प्राप्त अंक कितने हैं ?

(iii) हीना ने कुल सात प्रश्न किए हैं उनमें से दो का उत्तर सही है और पाँच का उत्तर गलत है। तो उसे कितने अंक प्राप्त होते हैं ?

8. एक सीमेंट कंपनी को सफ़ेद सीमेंट बेचने पर ₹ 8 प्रति बोरी की दर से लाभ होता है और स्लेटी (Grey) रंग की सीमेंट बेचने पर ₹ 5 प्रति बोरी की दर से हानि होती है।

(a) किसी महीने में वह कंपनी 3000 बोरियाँ सफ़ेद सीमेंट की और 5000 बोरियाँ स्लेटी सीमेंट की बेचती है। उसका लाभ अथवा हानि क्या है ?

(b) यदि बेची गई स्लेटी सीमेंट की बोरियों की संख्या 6400 है, तो कंपनी को स्लेटी सीमेंट की कितनी बोरियाँ बेचनी चाहिए, ताकि उसे न तो लाभ हो और ना ही हानि ?

9. निम्नलिखित को सत्य कथन में परिवर्तित करने के लिए, रिक्त स्थान को एक पूर्णांक से प्रतिस्थापित कीजिए :

(a) $(–3) \times$ _____ $= 27$ (b) $5 \times$ _____ $= –35$

(c) _____ $\times (– 8) = –56$ (d) _____ $\times (–12) = 132$

1.6 पूर्णांकों का विभाजन

हम जानते हैं कि विभाजन, गुणा की विपरीत संक्रिया है। आइए पूर्ण संख्याओं के लिए एक उदाहरण देखें:

क्योंकि $3 \times 5 = 15$ है, इसलिए $15 \div 5 = 3$ और $15 \div 3 = 5$ है।

इसी प्रकार, $4 \times 3 = 12$ से $12 \div 4 = 3$ एवं $12 \div 3 = 4$ प्राप्त होता है।

इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि पूर्ण संख्याओं के प्रत्येक गुणन कथन के लिए दो विभाजन या भाग, कथन हैं।

क्या आप पूर्णांकों के लिए गुणन कथन एवं संगत भाग कथनों को लिख सकते हैं?

- निम्नलिखित सारणी को देखिए और इसे पूरा कीजिए।

गुणन कथन	संगत भाग कथन	
$2 \times (– 6) = (–12)$	$(–12) \div (– 6) = 2$,	$(–12) \div 2 = (– 6)$
$(– 4) \times 5 = (–20)$	$(–20) \div (5) = (– 4)$,	$(–20) \div (– 4) = 5$
$(– 8) \times (–9) = 72$	$72 \div$ _____ = _____ ,	$72 \div$ _____ = _____
$(–3) \times (–7) =$ _____	_____ $\div (–3) =$ _____ ,	_____
$(– 8) \times 4 =$ _____	_____ ,	_____
$5 \times (– 9) =$ _____	_____ ,	_____
$(–10) \times (–5) =$	_____ ,	_____

उपर्युक्त से हम देखते हैं कि

$(–12) \div 2 = (– 6)$ $(–20) \div (5) = (– 4)$

$(–32) \div 4 = – 8$ $(– 45) \div 5 = – 9$

हम देखते हैं कि जब हम एक ऋणात्मक पूर्णांक को धनात्मक पूर्णांक से भाग देते हैं, तो हम उन्हें पूर्ण संख्याओं के रूप में भाग देते हैं और उसके पश्चात् भागफल से पहले ऋण चिह्न (–) रख देते हैं।

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए :

(a) $(–100) \div 5$ (b) $(–81) \div 9$

(c) $(–75) \div 5$ (d) $(–32) \div 2$

- हम यह भी देखते हैं कि

$72 \div (–8) = –9$ और $50 \div (–10) = –5$

$72 \div (–9) = – 8$ $50 \div (–5) = –10$

इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि जब हम एक धनात्मक पूर्णांक को एक ऋणात्मक पूर्णांक से भाग देते हैं, तो सर्वप्रथम हम उन्हें पूर्ण संख्याओं के रूप में भाग देते हैं और उसके पश्चात् भागफल के सामने ऋण चिह्न (–) रख देते हैं।

क्या हम कह सकते हैं कि $(-48) \div 8 = 48 \div (-8)$? आइए जाँच करते हैं। हम जानते हैं कि $(-48) \div 8 = -6$ और $48 \div (-8) = -6$। इसलिए $(-48) \div 8 = 48 \div (-8)$।
निम्नलिखित के लिए इसकी जाँच कीजिए
(i) $90 \div (-45)$ और $(-90) \div 45$ (ii) $(-136) \div 4$ और $136 \div (-4)$

व्यापक रूप में, किन्हीं दो धनात्मक पूर्णांकों a तथा b के लिए,

$a \div (-b) = (-a) \div b$, जहाँ $b \neq 0$

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए: (a) $125 \div (-25)$ (b) $80 \div (-5)$ (c) $64 \div (-16)$

- अंत में, हम देखते हैं कि

  $(-12) \div (-6) = 2; (-20) \div (-4) = 5; (-32) \div (-8) = 4; (-45) \div (-9) = 5$

  इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि जब हम एक ऋणात्मक पूर्णांक को एक ऋणात्मक पूर्णांक से भाग देते हैं, तो सर्वप्रथम हम उन्हें पूर्ण संख्याओं के रूप में भाग देते हैं और उसके पश्चात् भागफल से पहले धनात्मक चिह्न (+) रख देते हैं।

व्यापक रूप में, किन्हीं दो ऋणात्मक पूर्णांकों a तथा b के लिए,

$(-a) \div (-b) = a \div b$, जहाँ $b \neq 0$ है।

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए : (a) $(-36) \div (-4)$ (b) $(-201) \div (-3)$ (c) $(-325) \div (-13)$

1.7 पूर्णांकों के भाग के गुण

निम्नलिखित सारणी को देखिए और इसे पूरा कीजिए :

कथन	निष्कर्ष	कथन	निष्कर्ष
$(-8) \div (-4) = 2$	परिणाम एक पूर्णांक है	$(-8) \div 3 = \frac{-8}{3}$	__________________
$(-4) \div (-8) = \frac{-4}{-8}$	परिणाम एक पूर्णांक नहीं है	$3 \div (-8) = \frac{3}{-8}$	__________________

आप क्या देखते हैं? हम देखते हैं कि पूर्णांक भाग के अंतर्गत संवृत नहीं हैं। अपनी ओर से पाँच और उदाहरण लेते हुए, इस कथन की सत्यता के लिए उचित कारण बताइए।

- हम जानते हैं कि पूर्ण संख्याओं के लिए भाग क्रमविनिमेय नहीं है। आइए पूर्णांकों के लिए भी इसकी जाँच करें।

  आप सारणी से देख सकते हैं कि $(-8) \div (-4) \neq (-4) \div (-8)$ है।

क्या $(-9) \div 3$ और $3 \div (-9)$ एक समान हैं ?

क्या $(-30) \div (-6)$ और $(-6) \div (-30)$ एक समान हैं ?

क्या हम कह सकते हैं कि पूर्णांकों के लिए भाग क्रमविनिमेय है ?

नहीं। आप पाँच और पूर्णांक युग्म लेकर इसे सत्यापित कर सकते हैं।

- पूर्ण संख्याओं की तरह, किसी भी पूर्णांक को शून्य से भाग करना अर्थहीन है और शून्येतर पूर्णांक से शून्य को भाग देने पर शून्य प्राप्त होता है, अर्थात् किसी भी पूर्णांक a के लिए $a \div 0$ परिभाषित नहीं है। परंतु $0 \div a = 0$, $a \neq 0$ के लिए है।
- जब हम किसी पूर्ण संख्या को 1 से भाग देते हैं, तो हमें वही पूर्ण संख्या प्राप्त होती है। आइए इसकी जाँच करते हैं कि क्या यह ऋणात्मक पूर्णांकों के लिए भी सत्य है।

  निम्नलिखित को देखिए :

  $(-8) \div 1 = (-8)$ $\quad$ $(-11) \div 1 = -11$ $\quad$ $(-13) \div 1 = -13$

  $(-25) \div 1 =$ _____ $\quad$ $(-37) \div 1 =$ _____ $\quad$ $(-48) \div 1 =$ _____

  यह दर्शाता है कि ऋणात्मक पूर्णांक को 1 से भाग देने पर वही ऋणात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है। *अत: किसी भी पूर्णांक को 1 से भाग देने पर वही पूर्णांक प्राप्त होता है।* व्यापक रूप में, किसी भी पूर्णांक a के लिए $\quad a \div 1 = a$

- किसी पूर्णांक को (-1) से भाग देने पर क्या होता है ? निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए :

  $(-8) \div (-1) = 8$ $\quad$ $11 \div (-1) = -11$ $\quad$ $13 \div (-1) =$ _____

  $(-25) \div (-1) =$ _____ $\quad$ $(-37) \div (-1) =$ _____ $\quad$ $-48 \div (-1) =$ _____

  आप क्या देखते हैं ?

  हम कह सकते हैं कि किसी भी पूर्णांक को (-1) से भाग देने पर वही पूर्णांक प्राप्त नहीं होता है।

- क्या हम कह सकते हैं कि $[(-16) \div 4] \div (-2)$ एवं $(-16) \div [4 \div (-2)]$ समान हैं ?

  हम जानते हैं कि $\quad [(-16) \div 4] \div (-2) = (-4) \div (-2) = 2$

  और $\quad (-16) \div [4 \div (-2)] = (-16) \div (-2) = 8$

  अत:, $\quad [(-16) \div 4] \div (-2) \neq (-16) \div [4 \div (-2)]$

  क्या आप कह सकते हैं कि पूर्णांकों के लिए भाग साहचर्य है नहीं! अपनी ओर से पाँच अन्य उदाहरण लेकर इसे सत्यापित कीजिए।

प्रयास कीजिए

क्या किसी भी पूर्णांक a के लिए

(i) $1 \div a = 1$ है ?

(ii) $a \div (-1) = -a$ है ?

a के विभिन्न मानों के लिए इनकी जाँच कीजिए।

उदाहरण 6 किसी टेस्ट में प्रत्येक सही उत्तर के लिए $(+5)$ अंक दिए जाते हैं ओर प्रत्येक गलत उत्तर के लिए (-2) अंक दिए जाते हैं। (i) राधिका ने सभी प्रश्नों के उत्तर दिए और 30 अंक प्राप्त किए, जबकि उसके 10 उत्तर सही पाए गए। (ii) जय ने भी सभी प्रश्नों के उत्तर दिए और उसने (-12) अंक प्राप्त किए, जबकि उसके चार उत्तर सही पा गए गए। उनमें से प्रत्येक ने कितने प्रश्नों के उत्तर गलत दिए ?

हल

(i) एक सही उत्तर के लिए दिए गए अंक = 5

अतः, 10 सही उत्तरों के लिए दिए गए अंक = $5 \times 10 = 50$

राधिका के द्वारा प्राप्त किए गए अंक = 30

गलत उत्तरों के लिए प्राप्तांक $= 30 - 50 = -20$

एक गलत उत्तर के लिए दिए गए अंक = (-2)

इसलिए, गलत उत्तरों की संख्या $= (-20) \div (-2) = 10$

(ii) चार सही उत्तरों के लिए दिए गए अंक $= 5 \times 4 = 20$

जय द्वारा प्राप्त किए गए अंक = -12

गलत उत्तरों के लिए प्राप्तांक $= -12 - 20 = -32$

इसलिए, गलत उत्तरों की संख्या $= (-32) \div (-2) = 16$

उदाहरण 7 कोई दुकानदार एक पेन बेचने पर ₹ 1 का लाभ अर्जित करती है और अपने पुराने स्टॉक की पेंसिलों को बेचते हुए 40 पैसे प्रति पेंसिल की हानि उठाती है।

(i) किसी विशिष्ट महीने में उसने ₹ 5 की हानि उठाई।
इस अवधि में उसने 45 पेन बेचे। बताइए इस अवधि में उसने कितनी पेंसिलें बेचीं।

(ii) अगले महीने में उसे न तो लाभ हुआ और न ही हानि हुई। यदि इस महीने में उसने 70 पेन बेचे, तो उसने कितनी पेंसिलें बेचीं ?

हल

(i) एक पेन को बेचने पर अर्जित लाभ = ₹ 1

45 पेनों को बेचने पर अर्जित लाभ = ₹ 45

जिसे हम + ₹ 45 से निर्दिष्ट करते हैं।

दी हुई कुल हानि = ₹ 5 जिसे – ₹ 5 से निर्दिष्ट करते हैं।

अर्जित लाभ + उठाई गई हानि = कुल हानि

इसलिए उठाई गई हानि = कुल हानि – अर्जित लाभ

= ₹ $(-5 - 45)$ = ₹ $(-50) = -5000$ पैसे

एक पेंसिल को बेचने से उठाई गई हानि = 40 पैसे जिसे हम -40 पैसे के रूप में लिखते हैं।

इसलिए बेची गई पेंसिलों की संख्या $= (-5000) \div (-40) = 125$

(ii) अगले महीने में न तो लाभ हुआ और न ही हानि हुई।

इसलिए अर्जित लाभ + उठाई गई हानि = 0

अर्थात् अर्जित लाभ = – उठाई गई हानि

अब, 70 पेनों की बेचने से अर्जित लाभ = ₹ 70

इसलिए पेंसिलों को बेचने से उठाई गई हानि = ₹ 70, जिसे हम – ₹ 70 अर्थात् – 7000 पैसे से दर्शाते हैं।

बेची गई पेंसिलों की कुल संख्या $= (-7000) \div (-40) = 175$ पेंसिलें

प्रश्नावली 1.4

1. निम्नलिखित में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए :
   (a) $(-30) \div 10$ (b) $50 \div (-5)$ (c) $(-36) \div (-9)$
   (d) $(-49) \div (49)$ (e) $13 \div [(-2) + 1]$ (f) $0 \div (-12)$
   (g) $(-31) \div [(-30) + (-1)]$
   (h) $[(-36) \div 12] \div 3$ (i) $[(-6) + 5)] \div [(-2) + 1]$
2. a, b और c के निम्नलिखित मानों में से प्रत्येक के लिए, $a \div (b + c) \neq (a \div b) + (a \div c)$ को सत्यापित कीजिए
   (a) $a = 12, b = -4, c = 2$ (b) $a = (-10), b = 1, c = 1$
3. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :
   (a) $369 \div$ _____ $= 369$ (b) $(-75) \div$ _____ $= -1$
   (c) $(-206) \div$ _____ $= 1$ (d) $-87 \div$ _____ $= 87$
   (e) _____ $\div 1 = -87$ (f) _____ $\div 48 = -1$
   (g) $20 \div$ _____ $= -2$ (h) _____ $\div (4) = -3$
4. पाँच ऐसे पूर्णांक युग्म (a, b) लिखिए, ताकि $a \div b = -3$ हो । ऐसा एक युग्म $(6, -2)$ है, क्योंकि $6 \div (-2) = (-3)$ है।
5. दोपहर 12 बजे तापमान शून्य से 10°C ऊपर था। यदि यह आधी रात तक 2°C प्रति घंटे की दर से कम होता है, तो किस समय तापमान शून्य से 8°C नीचे होगा ? आधी रात को तापमान क्या होगा ?
6. एक कक्षा टेस्ट में प्रत्येक सही उत्तर के लिए $(+3)$ अंक दिए जाते हैं और प्रत्येक गलत उत्तर के लिए (-2) अंक दिए जाते हैं और किसी प्रश्न को हल करने का प्रयत्न नहीं करने पर कोई अंक नहीं दिया जाता है। (i) राधिका ने 20 अंक प्राप्त किए। यदि उसके 12 उत्तर सही पाए जाते हैं, तो उसने कितने प्रश्नों का उत्तर गलत दिया है ? (ii) मोहिनी टेस्ट में (-5) अंक प्राप्त करती है, जबकि उसके 7 उत्तर सही पाए जाते हैं । उसने कितने प्रश्नों का उत्तर गलत दिया है?
7. एक उत्थापक किसी खान कूपक में 6 m प्रति मिनट की दर से नीचे जाता है। यदि नीचे जाना भूमि तल से 10 m ऊपर से शुरू होता है, तो -350 m पहुँचने में कितना समय लगेगा ?

हमने क्या चर्चा की ?

1. पूर्णांक, संख्याओं का एक विशाल संग्रह है जिसमें पूर्ण संख्याएँ और उनके ऋणात्मक सम्मिलित हैं। इनका परिचय कक्षा VI मे कराया गया था।
2. आपने पिछली कक्षा में पूर्णांकों को संख्या रेखा पर निरूपित करने के बारे में एवं उनके योग और व्यवकलन के बारे में अध्ययन किया है।
3. अब हमने योग एवं व्यवकलन द्वारा संतुष्ट होने वाले गुणों का अध्ययन किया है।
   (a) पूर्णांक योग एवं व्यवकलन दोनों के लिए संवृत्त है। अर्थात्, $a + b$ और $a - b$ दोनों पुनः पूर्णांक होते हैं, जहाँ a और b कोई भी पूर्णांक हैं।

(b) पूर्णांकों के लिए योग क्रमविनिमेय है, अर्थात् सभी पूर्णांकों a तथा b के लिए, $a + b = b + a$

(c) पूर्णांकों के लिए योग साहचर्य है, अर्थात् सभी पूर्णांकों a, b तथा c के लिए $(a + b) + c = a + (b + c)$ होता है।

(d) योग के अंतर्गत पूर्णांक शून्य तत्समक है, अर्थात किसी भी पूर्णांक a के लिए, $a + 0 = 0 + a = a$ होता है।

4. हमने यह भी अध्ययन किया है कि पूर्णांकों को कैसे गुणा किया जा सकता है और हमने पाया कि एक धनात्मक एवं एक ऋणात्मक पूर्णांक का गुणनफल एक ऋणात्मक पूर्णांक है, जबकि दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल एक धनात्मक पूर्णांक है। उदाहरणत:, $-2 \times 7 = -14$ और $-3 \times (-8) = 24$ है।

5. ऋणात्मक पूर्णांकों की संख्या सम होने पर उनका गुणनफल धनात्मक होता है जबकि यह संख्या विषम होने पर उनका गुणनफल ऋणात्मक होता है।

6. पूर्णांक गुणन के अंतर्गत कुछ गुणों को दर्शाते हैं।

(a) गुणन के अंतर्गत पूर्णांक संवृत होते हैं, अर्थात् किन्हीं दो पूर्णांकों a तथा b के लिए $a \times b$ एक पूर्णांक होता है।

(b) पूर्णांकों के लिए गुणन क्रमविनिमेय होता है, अर्थात् किन्हीं दो पूर्णांको a तथा b के लिए $a \times b = b \times a$ होता है।

(c) गुणन के अंतर्गत पूर्णांक 1, तत्समक है, अर्थात् किसी भी पूर्णांक a के लिए $1 \times a = a \times 1 = a$ होता है।

(d) पूर्णांकों के लिए गुणन साहचर्य होता है, अर्थात् किन्हीं तीन पूर्णांकों $a, b,$ तथा c के लिए, $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ होता है।

7. योग एवं गुणन के अंतर्गत पूर्णांक एक गुण को दर्शाते हैं, जिसे वितरण गुण कहा जाता है, अर्थात् किन्हीं तीन पूर्णांकों a, b तथा c के लिए, $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ होता है।

8. योग एवं गुणन के अंतर्गत क्रमविनिमेयता, सहचारिता और वितरणता के गुण हमारे परिकलन को आसान बनाते हैं।

9. हमने यह भी सीखा है कि पूर्णांकों को कैसे भाग दिया जाता है। हमने पाया कि

(a) जब एक धनात्मक पूर्णांक को एक ऋणात्मक पूर्णांक से भाग दिया जाता है या जब एक ऋणात्मक पूर्णांक को एक धनात्मक पूर्णांक से भाग दिया जाता है, तो प्राप्त भागफल एक ऋणात्मक होता है।

(b) एक ऋणात्मक पूर्णांक को दूसरे ऋणात्मक पूर्णांक से भाग देने पर प्राप्त भागफल एक धनात्मक होता है।

10. किसी भी पूर्णांक a के लिए, हम पाते हैं कि

(a) $a \div 0$ परिभाषित नहीं है।

(b) $a \div 1 = a$ है।

भिन्न एवं दशमलव

अध्याय 2

0757CH02

2.1 भूमिका

आपने पिछली कक्षाओं में भिन्न एवं दशमलव के बारे में अध्ययन किया है। भिन्नों के अध्ययन में हम उचित भिन्न, विषम भिन्न, मिश्रित भिन्न और भिन्नों के योग एवं व्यवकलन के बारे में चर्चा कर चुके हैं। हमने, भिन्नों की तुलना, तुल्य भिन्न, भिन्नों को संख्या रेखा पर निरूपित करना और भिन्नों को क्रमबद्ध करना, के बारे में भी अध्ययन किया है।

दशमलवों के अध्ययन में हम, उनकी तुलना, संख्या रेखा पर उनका निरूपण और उनका योग एवं व्यवकलन, के बारे में चर्चा कर चुके हैं।

अब हम भिन्नों एवं दशमलवों के गुणन एवं भाग के बारे में अध्ययन करेंगे।

2.2 भिन्नों के बारे में आपने कितनी अच्छी तरह अध्ययन किया है?

उचित भिन्न वह भिन्न होती है जो संपूर्ण के एक भाग को निरूपित करती है। क्या $\frac{7}{4}$ एक उचित भिन्न है? इसके अंश अथवा हर में कौन बड़ा है?

विषम भिन्न, संपूर्ण एवं उचित भिन्न का संयोजन होता है। क्या $\frac{7}{4}$ एक विषम भिन्न है? यहाँ अंश अथवा हर में कौन बड़ा है?

विषम भिन्न $\frac{7}{4}$ को $1\frac{3}{4}$ के रूप में लिखा जा सकता है। यह एक **मिश्रित भिन्न** है।

क्या आप उचित, विषम एवं मिश्रित भिन्न में से प्रत्येक के पाँच उदाहरण लिख सकते हैं?

उदाहरण 1 $\frac{3}{5}$ के पाँच तुल्य भिन्न लिखिए।

हल $\frac{3}{5}$ के तुल्य भिन्नों में से एक $\frac{3}{5} = \frac{3\times2}{5\times2} = \frac{6}{10}$ है।

शेष चार तुल्य भिन्न आप स्वयं ज्ञात कीजिए।

उदाहरण 2 रमेश ने एक प्रश्नावली का $\frac{2}{7}$ भाग हल किया जबकि सीमा ने उस प्रश्नावली का $\frac{4}{5}$ भाग हल किया। ज्ञात कीजिए कि दोनों में से किसने कम भाग हल किया।

हल यह ज्ञात करने के लिए कि किसने प्रश्नावली का कम भाग हल किया, आइए $\frac{2}{7}$ और $\frac{4}{5}$ की तुलना करते हैं।

इनको समान भिन्नों में परिवर्तित करने पर हम पाते हैं :

$\frac{2}{7} = \frac{10}{35}$, $\frac{4}{5} = \frac{28}{35}$

क्योंकि $10 < 28$, इसलिए $\frac{10}{35} < \frac{28}{35}$.

अत: $\frac{2}{7} < \frac{4}{5}$.

रमेश ने सीमा की तुलना में कम भाग हल किया।

उदाहरण 3 समीरा ने $3\frac{1}{2}$ kg सेब और $4\frac{3}{4}$ kg संतरे खरीदे। समीरा द्वारा खरीदे गए फलों का कुल भार कितना है?

हल फलों का कुल भार = $3\frac{1}{2} + 4\frac{3}{4}$ kg

$= \frac{7}{2} + \frac{19}{4}$ kg = $\frac{14}{4} + \frac{19}{4}$ kg

$= \frac{33}{4}$ kg $= 8\frac{1}{4}$ kg है।

उदाहरण 4 सुमन प्रतिदिन $5\frac{2}{3}$ घंटे पढ़ती है। वह अपने इस समय में से $2\frac{4}{5}$ घंटे विज्ञान और गणित में लगा देती है। दूसरे विषयों के लिए वह कितना समय लगाती है?

हल सुमन के अध्ययन का कुल समय = $5\frac{2}{3}$ घंटे = $\frac{17}{3}$ घंटे

सुमन द्वारा विज्ञान एवं गणित में लगाया समय = $2\frac{4}{5}$ = $\frac{14}{5}$ घंटे

अत: उसके द्वारा दूसरे विषयों में लगाया गया समय $= \frac{17}{3} - \frac{14}{5}$ घंटे

$= \frac{17 \times 5}{15} - \frac{14 \times 3}{15}$ घंटे

$= \frac{85 - 42}{15}$ घंटे $= \frac{43}{15}$ घंटे $= 2\frac{13}{15}$ घंटे

प्रश्नावली 2.1

1. हल कीजिए:

(i) $2 - \frac{3}{5}$ (ii) $4 + \frac{7}{8}$ (iii) $\frac{3}{5} + \frac{2}{7}$ (iv) $\frac{9}{11} - \frac{4}{15}$

(v) $\frac{7}{10} + \frac{2}{5} + \frac{3}{2}$ (vi) $2\frac{2}{3} + 3\frac{1}{2}$ (vii) $8\frac{1}{2} - 3\frac{5}{8}$

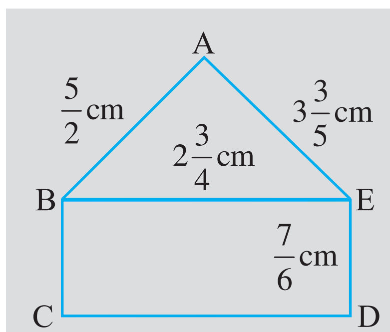
2. निम्नलिखित को अवरोही क्रम में रखिए :

(i) $\frac{2}{9}, \frac{2}{3}, \frac{8}{21}$ (ii) $\frac{1}{5}, \frac{3}{7}, \frac{7}{10}$

3. एक ''जादुई वर्ग'' में प्रत्येक पंक्ति, प्रत्येक स्तंभ एवं प्रत्येक विकर्ण की संख्याओं का योग समान होता है। क्या यह एक जादुई वर्ग है?

$\frac{4}{11}$	$\frac{9}{11}$	$\frac{2}{11}$
$\frac{3}{11}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{7}{11}$
$\frac{8}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{6}{11}$

(प्रथम पंक्ति के अनुदिश $\frac{4}{11} + \frac{9}{11} + \frac{2}{11} = \frac{15}{11}$).



4. एक आयताकार कागज़ की लंबाई $12\frac{1}{2}$ cm और चौड़ाई $10\frac{2}{3}$ cm है। कागज़ का परिमाप ज्ञात कीजिए।

5. दी हुई आकृति में, (i) Δ ABE (ii) आयत BCDE, का परिमाप ज्ञात कीजिए। किसका परिमाप ज़्यादा है?

6. सलील एक तस्वीर को किसी फ्रेम (चौखट) में जड़ना चाहता है। तस्वीर $7\frac{3}{5}$ cm चौड़ी है। चौखट में उचित रूप से जड़ने के लिए तस्वीर की चौड़ाई $7\frac{3}{10}$ cm से ज़्यादा नहीं हो सकती। तस्वीर की कितनी काट-छाँट की जानी चाहिए।

7. रीतू ने एक सेब का $\frac{3}{5}$ भाग खाया और शेष सेब उसके भाई सोमू ने खाया। सेब का कितना भाग सोमू ने खाया? किसका हिस्सा ज़्यादा था? कितना ज़्यादा था?

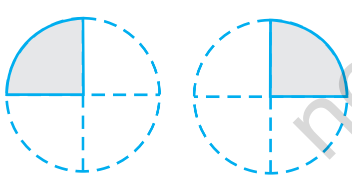
8. माइकल ने एक तस्वीर में रंग भरने का कार्य $\frac{7}{12}$ घंटे में समाप्त किया। वैभव ने उसी तस्वीर में रंग भरने का कार्य $\frac{3}{4}$ घंटे में समाप्त किया। किसने ज़्यादा समय कार्य किया? यह समय कितना ज़्यादा था?

2.3 भिन्नों का गुणन

आप जानते हैं कि एक आयत का क्षेत्रफल कैसे ज्ञात किया जाता है। यह लंबाई $\times$ चौड़ाई के बराबर होता है। यदि किसी आयत की लंबाई एवं चौड़ाई क्रमशः 7 cm और 4 cm है तो इसका क्षेत्रफल क्या होगा? इसका क्षेत्रफल $7 \times 4 = 28$ cm^2 होगा।

यदि आयत की लंबाई एवं चौड़ाई क्रमशः $7\frac{1}{2}$ cm एवं $3\frac{1}{2}$ cm है तो इसका क्षेत्रफल क्या होगा? आप कहेंगे कि यह $7\frac{1}{2} \times 3\frac{1}{2} = \frac{15}{2} \times \frac{7}{2}$ cm^2 है। संख्याएँ $\frac{15}{2}$ और $\frac{7}{2}$ भिन्न हैं। दिए हुए आयत का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए यह ज्ञात करना आवश्यक है कि भिन्नों को गुणा कैसे किया जाए। हम अब इसे सीखेंगे।

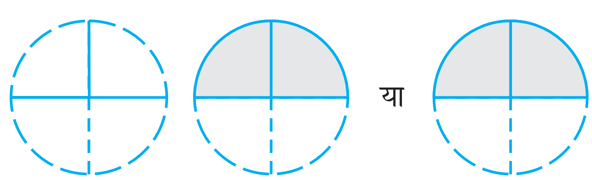
2.3.1 एक भिन्न का पूर्ण संख्या से गुणन



आकृति 2.1

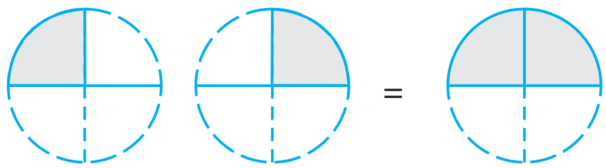
बाईं तरफ़ (आकृति 2.1) में दी हुई तस्वीर को देखिए। प्रत्येक छायांकित (shaded) भाग वृत्त का $\frac{1}{4}$ भाग है। दो छायांकित भाग मिलकर वृत्त के कितने भाग को निरूपित करेंगे? ये $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 2 \times \frac{1}{4}$ को निरूपित करेंगे।

दो छायांकित भागों को संयोजित करने पर हम आकृति 2.2 को प्राप्त करते हैं। आकृति 2.2 का छायांकित भाग वृत्त के किस भाग को निरूपित करेगा? यह वृत्त के $\frac{2}{4}$ भाग को निरूपित करता है।



आकृति 2.2

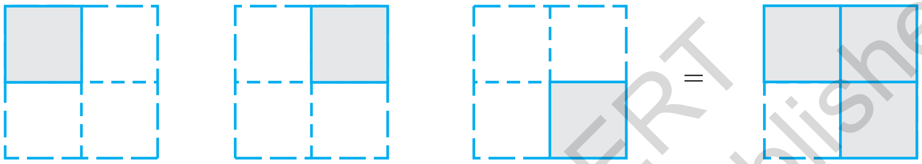
इस प्रकार हम कह सकते हैं कि आकृति 2.1 के छायांकित टुकड़े मिलकर, आकृति 2.2 के छायांकित भाग के समान हैं अर्थात् हमें आकृति 2.3 प्राप्त होती है।



आकृति 2.3

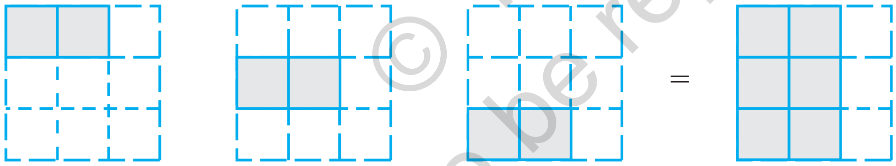
अथवा $2\times\frac{1}{4} = \frac{2}{4}$

क्या अब आप बता सकते हैं कि आकृति 2.4 किसे निरूपित करेगी?



आकृति 2.4

और आकृति 2.5 किसे निरूपित करेगी?



आकृति 2.5

आइए अब हम $3\times\frac{1}{2}$ ज्ञात करते हैं।

$$3\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

हम यह भी पाते हैं, $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1+1+1}{2}=\frac{3\times 1}{2}=\frac{3}{2}$

इसलिए $3\times\frac{1}{2}=\frac{3\times 1}{2}=\frac{3}{2}$

इसी प्रकार $\frac{2}{3}\times 5=\frac{2\times 5}{3}=?$

क्या आप बता सकते हैं $3\times\frac{2}{7}=?\quad 4\times\frac{3}{5}=?$

अभी तक हमने जितनी भिन्नों की चर्चा की है अर्थात् $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{7}$ और $\frac{3}{5}$ वे सभी उचित भिन्न हैं।

विषम भिन्नों के लिए भी हमारे पास है:

$$2 \times \frac{5}{3} = \frac{2 \times 5}{3} = \frac{10}{3}$$

प्रयास कीजिए : $\quad 3 \times \frac{8}{7} = ? \quad 4 \times \frac{7}{5} = ?$

अत: *किसी पूर्ण संख्या को किसी उचित अथवा विषम भिन्न से गुणा करने के लिए हम पूर्ण संख्या को भिन्न के अंश के साथ गुणा करते हैं और भिन्न के हर को अपरिवर्तित या समान रखा जाता है।*

प्रयास कीजिए

1. ज्ञात कीजिए: (a) $\frac{2}{7} \times 3$ (b) $\frac{9}{7} \times 6$ (c) $3 \times \frac{1}{8}$ (d) $\frac{13}{11} \times 6$

यदि गुणनफल एक विषम भिन्न है तो इसे मिश्रित भिन्न के रूप में व्यक्त कीजिए।

2. $2 \times \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$ को सचित्र निरूपित कीजिए।

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए (i) $5 \times 2\frac{3}{7}$

(ii) $1\frac{4}{9} \times 6$

किसी मिश्रित भिन्न को एक पूर्ण संख्या से गुणा करने के लिए सर्वप्रथम मिश्रित भिन्न को विषम भिन्न में परिवर्तित कीजिए और तब गुणा कीजिए।

इसीलिए $\quad 3 \times 2\frac{5}{7} = 3 \times \frac{19}{7} = \frac{57}{7} = 8\frac{1}{7}$

इसी प्रकार, $\quad 2 \times 4\frac{2}{5} = 2 \times \frac{22}{5} = ?$

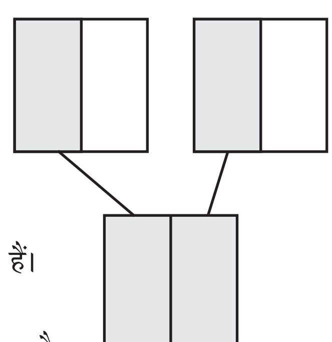
भिन्न, प्रचालक 'का' के रूप में

आकृति 2.6 को देखिए। दो वर्ग पूरी तरह से समरूप हैं।

प्रत्येक छायांकित टुकड़ा 1 के $\frac{1}{2}$ को निरूपित करता है।

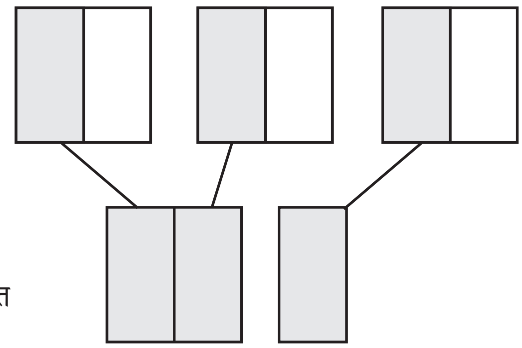
इसलिए दोनों छायांकित टुकड़े मिलकर 2 के $\frac{1}{2}$ को निरूपित करते हैं।

2 छायांकित $\frac{1}{2}$ भागों को संयोजित कीजिए। यह 1 को निरूपित करता है।



आकृति 2.6

इस प्रकार हम कहते हैं कि 2 का $\frac{1}{2}$ एक भाग है। हम इसे $\frac{1}{2} \times 2 = 1$ के रूप में भी प्राप्त कर सकते हैं।



आकृति 2.7

अतः 2 का $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 2 = 1$

आकृति 2.7 के समरूप वर्गों को देखिए

प्रत्येक छायांकित टुकड़ा एक के $\frac{1}{2}$ भाग को निरूपित करता है।

इसलिए तीन छायांकित टुकड़े मिलकर 3 के $\frac{1}{2}$ भाग को निरूपित करते हैं।

तीन छायांकित भागों को संयोजित कीजिए।

यह $1\frac{1}{2}$ अर्थात् $\frac{3}{2}$ को निरूपित करता है।

इसलिए 3 का $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ है। और $\frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$

अतः 3 का $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$

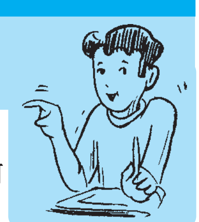
इस प्रकार हम देखते हैं कि **'का' गुणन को निरूपित करता है।**

फरीदा के पास 20 कँचे हैं। रेशमा के पास फरीदा के कँचों का $\frac{1}{5}$ है। रेशमा के पास कितने कँचे हैं? जैसा कि हम जानते हैं, 'का' गुणन को दर्शाता है। इसलिए रेशमा के पास $\frac{1}{5} \times 20 = 4$ कँचे हैं।

इसी प्रकार हम पाते हैं कि 16 का $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \times 16 = \frac{16}{2} = 8$ है।

प्रयास कीजिए

क्या आप बता सकते हैं कि (i) 10 का $\frac{1}{2}$ (ii) 16 का $\frac{1}{4}$ (iii) 25 का $\frac{2}{5}$, क्या है?



उदाहरण 5 40 विद्यार्थियों की एक कक्षा में कुल विद्यार्थियों की संख्या का $\frac{1}{5}$ अंग्रेज़ी पढ़ना पसंद करते है, कुल संख्या का $\frac{2}{5}$ गणित पढ़ना पसंद करते हैं और शेष विद्यार्थी विज्ञान पढ़ना पसंद करते हैं।

(i) कितने विद्यार्थी अंग्रेज़ी पढ़ना पसंद करते हैं?

(ii) कितने विद्यार्थी गणित पढ़ना पसंद करते हैं?

(iii) कुल विद्यार्थियों की संख्या का कितना भाग (fraction) विज्ञान पढ़ना पसंद करता है?

हल कक्षा के कुल विद्यार्थियों की संख्या = 40.

(i) इनमें से कुल संख्या का $\frac{1}{5}$ अंग्रेज़ी पढ़ना पसंद करते हैं।

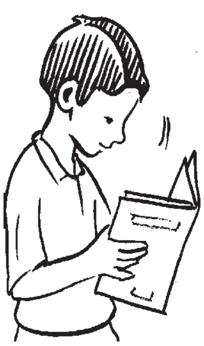
अत: अंग्रेज़ी पढ़ना पसंद करने वाले विद्यार्थियों की संख्या 40 का $\frac{1}{5} = \frac{1}{5} \times 40 = 8$ है।

(ii) स्वयं प्रयास कीजिए।

(iii) अंग्रेज़ी एवं गणित पसंद करने वाले विद्यार्थियों की संख्या = 8 + 16 = 24 है। अत: विज्ञान पसंद करने वाले विद्यार्थियों की संख्या = 40 – 24 = 16 है।

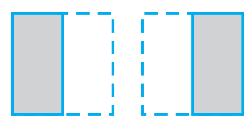
अत: वांछित भिन्न $\frac{16}{40}$ है।

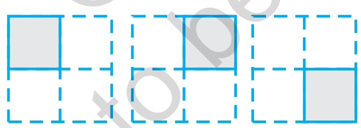
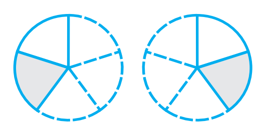
प्रश्नावली 2.2



1. (a) से (d) तक के रेखाचित्रों में निम्नलिखित को कौन दर्शाता है :

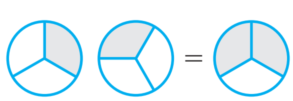
(i) $2 \times \frac{1}{5}$ (ii) $2 \times \frac{1}{2}$ (iii) $3 \times \frac{2}{3}$ (iv) $3 \times \frac{1}{4}$

(a)  (b) 

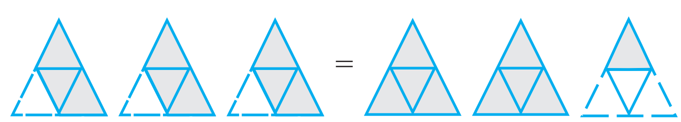
(c)  (d) 

2. (a) से (c) तक कुछ चित्र दिए हुए हैं। बताइए उनमें से कौन निम्नलिखित को दर्शाता है :

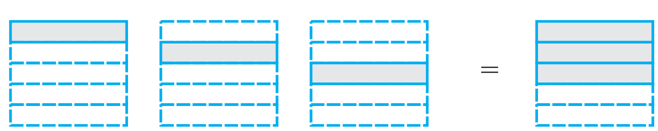
(i) $3 \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$ (ii) $2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ (iii) $3 \times \frac{3}{4} = 2\frac{1}{4}$



(a)



(b)



(c)

3. गुणा करके न्यूनतम रूप में लिखिए और मिश्रित भिन्न में व्यक्त कीजिए :

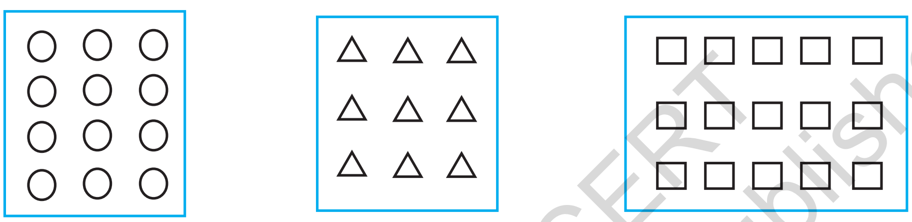
(i) $7\times\frac{3}{5}$ (ii) $4\times\frac{1}{3}$ (iii) $2\times\frac{6}{7}$ (iv) $5\times\frac{2}{9}$ (v) $\frac{2}{3}\times4$

(vi) $\frac{5}{2}\times6$ (vii) $11\times\frac{4}{7}$ (viii) $20\times\frac{4}{5}$ (ix) $13\times\frac{1}{3}$ (x) $15\times\frac{3}{5}$

4. छायांकित कीजिए :

(i) बक्सा (a) के वृत्तों का $\frac{1}{2}$ भाग (ii) बक्सा (b) के त्रिभुजों का $\frac{2}{3}$ भाग

(iii) बक्सा (c) के वर्गों का $\frac{3}{5}$ भाग



(a) (b) (c)

5. ज्ञात कीजिए :

(a) (i) 24 का $\frac{1}{2}$ (ii) 46 का $\frac{1}{2}$ (b) (i) 18 का $\frac{2}{3}$ (ii) 27 का $\frac{2}{3}$

(c) (i) 16 का $\frac{3}{4}$ (ii) 36 का $\frac{3}{4}$ (d) (i) 20 का $\frac{4}{5}$ (ii) 35 का $\frac{4}{5}$

6. गुणा कीजिए और मिश्रित भिन्न के रूप में व्यक्त कीजिए :

(a) $3\times5\frac{1}{5}$ (b) $5\times6\frac{3}{4}$ (c) $7\times2\frac{1}{4}$

(d) $4\times6\frac{1}{3}$ (e) $3\frac{1}{4}\times6$ (f) $3\frac{2}{5}\times8$

7. ज्ञात कीजिए :

(a) (i) $2\frac{3}{4}$ का $\frac{1}{2}$ (ii) $4\frac{2}{9}$ का $\frac{1}{2}$ (b) (i) $3\frac{5}{6}$ का $\frac{5}{8}$ (ii) $9\frac{2}{3}$ का $\frac{5}{8}$

8. विद्या और प्रताप पिकनिक पर गए। उनकी माँ ने उन्हें 5 लीटर पानी वाली एक बोतल दी। विद्या ने कुल पानी का $\frac{2}{5}$ उपयोग किया। शेष पानी प्रताप ने पिया।

(i) विद्या ने कितना पानी पिया?

(ii) पानी की कुल मात्रा का कितना भिन्न (fraction) प्रताप ने पिया?

2.3.2 भिन्न का भिन्न से गुणन

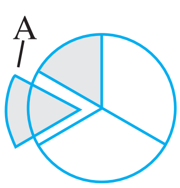
फरीदा के पास 9 cm लंबी एक रिबन की पट्टी थी। उसने इस पट्टी को चार समान भागों में काटा। उसने यह किस प्रकार किया? उसने पट्टी को दो बार मोड़ा। प्रत्येक भाग कुल लंबाई के किस भिन्न को निरूपित करेगा। प्रत्येक भाग, पट्टी का $\frac{9}{4}$ होगा। उसने इनमें से एक भाग लिया और इस भाग को एक बार मोड़ते हुए इसे दो बराबर भागों में बाँट दिया। इन दो टुकड़ों में से एक टुकड़ा क्या निरूपित करेगा? यह $\frac{9}{4}$ का $\frac{1}{2}$ अर्थात् $\frac{1}{2} \times \frac{9}{4}$ को निरूपित करेगा।

आइए देखते हैं कि दो भिन्नों का गुणनफल जैसे $\frac{1}{2} \times \frac{9}{4}$ को कैसे ज्ञात किया जाए।

इसे ज्ञात करने के लिए आइए सर्वप्रथम हम $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ जैसा गुणनफल ज्ञात करना सीखते हैं।

आकृति 2.8

(a) किसी संपूर्ण भाग का $\frac{1}{3}$ हम कैसे ज्ञात करते हैं? हम संपूर्ण को तीन समान भागों में बाँटते है। तीनों में से प्रत्येक भाग संपूर्ण के $\frac{1}{3}$ भाग को निरूपित करता है। इन तीनों में से एक हिस्सा लीजिए और इसे छायांकित कर दीजिए जैसा कि आकृति 2.8 में दर्शाया गया है।



आकृति 2.9

(b) आप इस छायांकित भाग का $\frac{1}{2}$ भाग कैसे ज्ञात करोगे? इस छायांकित एक तिहाई ($\frac{1}{3}$) भाग को 2 समान भागों में बाँटिए। इन दोनों में से प्रत्येक भाग $\frac{1}{3}$ के $\frac{1}{2}$ को निरूपित करता है अर्थात् $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ को निरूपित करता है (आकृति 2.9)।

इन दो भागों में से एक को बाहर निकाल लीजिए और इसे 'A' नाम दे दीजिए। 'A' $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ को निरूपित करता है।

(c) 'A' संपूर्ण का कितना भाग है? यह जानने के लिए शेष $\frac{1}{3}$ भागों में से प्रत्येक को 2 समान भागों में बाँटिए। अब आपके पास ऐसे कितने समान भाग हैं? ऐसे 6 समान भाग हैं। 'A' इनमें से एक भाग है।

अत: 'A' संपूर्ण का $\frac{1}{6}$ भाग है। इस प्रकार $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

हमने यह कैसे निर्णय लिया कि 'A' संपूर्ण का $\frac{1}{6}$ भाग है? संपूर्ण को $2 \times 3 = 6$ भागों में बाँटा गया और 1 भाग इसमें से बाहर निकाला गया।

अत: $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = \frac{1 \times 1}{2 \times 3}$

अथवा $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1 \times 1}{2 \times 3}$

$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$ का मान भी इसी प्रकार ज्ञात किया जा सकता है। संपूर्ण को 2 समान भागों में बाँटिए और तब इनमें से किसी एक भाग को 3 समान भागों में बाँटिए। इनमें से एक भाग को लीजिए। यह $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$ अर्थात् $\frac{1}{6}$ भाग को निरूपित करेगा।

इसलिए जैसा कि पहले चर्चा की जा चुकी है $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6} = \frac{1 \times 1}{3 \times 2}$

अत: $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

$\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$ और $\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}$; $\frac{1}{2} \times \frac{1}{5}$ और $\frac{1}{5} \times \frac{1}{2}$ ज्ञात कीजिए और जाँच कीजिए कि क्या आप

$\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}$; $\frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2}$ पाते हैं?

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित बक्सों को भरिए :

(i) $\frac{1}{2} \times \frac{1}{7} = \frac{1 \times 1}{2 \times 7} = \square$

(ii) $\frac{1}{5} \times \frac{1}{7} = \square = \square$

(iii) $\frac{1}{7} \times \frac{1}{2} = \square = \square$

(iv) $\frac{1}{7} \times \frac{1}{5} = \square = \square$

उदाहरण 6 सुशांत एक घंटे में किसी पुस्तक का $\frac{1}{3}$ भाग पढ़ता है। वह $2\frac{1}{5}$ घंटों में पुस्तक का कितना भाग पढ़ेगा?

हल सुशांत द्वारा 1 घंटे में पुस्तक का पढ़ा हुआ भाग $= \frac{1}{3}$.

इसलिए $2\frac{1}{5}$ घंटे में उसके द्वारा पुस्तक का पढ़ा हुआ भाग = $2\frac{1}{5} \times \frac{1}{3}$

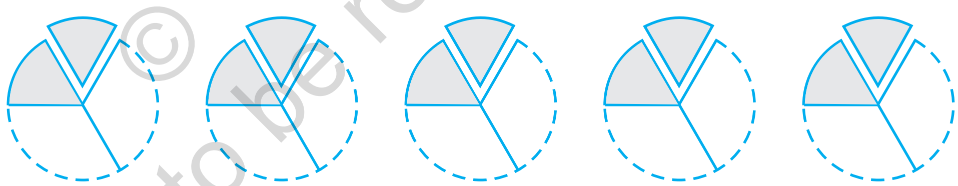
$$= \frac{11}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{11 \times 1}{5 \times 3} = \frac{11}{15}$$

आइए अब हम $\frac{1}{2} \times \frac{5}{3}$ ज्ञात करते हैं। हम जानते हैं कि $\frac{5}{3} = \frac{1}{3} \times 5$.

इसलिए, $\frac{1}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times 5 = \frac{1}{6} \times 5 = \frac{5}{6}$

साथ ही, $\frac{5}{6} = \frac{1 \times 5}{2 \times 3}$। अतः $\frac{1}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{1 \times 5}{2 \times 3} = \frac{5}{6}$.

इसे नीचे खींची गई आकृतियों में भी दर्शाया गया है। पाँच समान आकारों (आकृति 2.10) में से प्रत्येक पाँच सर्वांगसम वृत्तों के भाग हैं। इस प्रकार का एक आकार लीजिए। इस आकार को प्राप्त करने के लिए सर्वप्रथम हम वृत्त को 3 समान भागों में बाँटते हैं। आगे भी इन तीन भागों में से प्रत्येक को 2 समान भागों में बाँटते हैं। इसका एक भाग वह आकार है जिसकी हमने चर्चा की है। यह क्या निरूपित करेगा? यह $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ को निरूपित करेगा। इस प्रकार के भाग मिलाकर कुल $5 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ होंगे।



आकृति 2.10

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए: $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$; $\frac{2}{3} \times \frac{1}{5}$

इसी प्रकार, $\frac{3}{5} \times \frac{1}{7} = \frac{3 \times 1}{5 \times 7} = \frac{3}{35}$.

इस प्रकार हम $\frac{2}{3} \times \frac{7}{5}$ को $\frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{2 \times 7}{3 \times 5} = \frac{14}{15}$ के रूप में ज्ञात कर सकते हैं।

इस प्रकार हम पाते हैं कि हम दो भिन्नों का गुणन $\frac{\text{अंशों का गुणनफल}}{\text{हरों का गुणनफल}}$ के रूप में करते हैं।

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए: $\frac{8}{3} \times \frac{4}{7}$; $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$

गुणनफल का मान

आपने देखा है कि दो पूर्ण संख्याओं का गुणनफल उन दोनों संख्याओं में से प्रत्येक से बड़ा होता है। उदाहरणार्थ $3 \times 4 = 12$ और $12 > 4$, $12 > 3$.

जब हम दो भिन्नों को गुणा करते हैं तो गुणनफल के मान को दिए गए भिन्नों से तुलना कीजिए?

आइए सर्वप्रथम हम दो उचित भिन्नों के गुणनफल की चर्चा करते हैं। हम पाते हैं,

$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{15}$	$\frac{8}{15}<\frac{2}{3},\frac{8}{15}<\frac{4}{5}$	गुणनफल प्रत्येक भिन्न से कम है।
$\frac{1}{5}\times\frac{2}{7}$ = ---------	--------,--------	-------------------------------------
$\frac{3}{5}\times\frac{\square}{8}=\frac{21}{40}$	--------,--------	-------------------------------------
$\frac{2}{\square}\times\frac{4}{9}=\frac{8}{45}$	--------,--------	-------------------------------------

आप पाते हैं कि *जब दो उचित भिन्नों को गुणा किया जाता है तो गुणनफल दोनों भिन्नों से कम होता है। अर्थात् दो उचित भिन्नों के गुणनफल का मान दोनों भिन्नों में से प्रत्येक से छोटा होता है। पाँच और उदाहरण बनाकर इसकी जाँच कीजिए।*

आइए अब हम दो विषम भिन्नों को गुणा करते हैं।

$\frac{7}{3}\times\frac{5}{2}=\frac{35}{6}$	$\frac{35}{6}>\frac{7}{3},\frac{35}{6}>\frac{5}{2}$	गुणनफल प्रत्येक भिन्न से बड़ा है।
$\frac{6}{5}\times\frac{\square}{3}=\frac{24}{15}$	--------,--------	--
$\frac{9}{2}\times\frac{7}{\square}=\frac{63}{8}$	--------,--------	--
$\frac{3}{\square}\times\frac{8}{7}=\frac{24}{14}$	--------,--------	--

हम पाते हैं कि *दो विषम भिन्नों का गुणनफल उनमें से प्रत्येक भिन्न से बड़ा है। अथवा दो विषम भिन्नों के गुणनफल का मान उनमें से प्रत्येक भिन्न से अधिक है।*

ऐसे पाँच और उदाहरणों को बनाइए और उपर्युक्त कथन को सत्यापित कीजिए।

आइए अब हम एक उचित और एक विषम भिन्न को गुणा करते हैं।

मान लीजिए $\frac{2}{3}$ और $\frac{7}{5}$ को।

हम पाते हैं : $\frac{2}{3}\times\frac{7}{5}=\frac{14}{15}$. यहाँ, $\frac{14}{15}<\frac{7}{5}$ और $\frac{14}{15}>\frac{2}{3}$

प्राप्त गुणनफल, गुणन में उपयोग किए गए विषम भिन्न से कम है और उचित भिन्न से ज़्यादा है।

$\frac{6}{5}\times\frac{2}{7}$, $\frac{8}{3}\times\frac{4}{5}$ के लिए भी गुणनफल की जाँच कीजिए।

प्रश्नावली 2.3

1. ज्ञात कीजिए :

(i) (a) $\frac{1}{4}$ का $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{3}{5}$ का $\frac{1}{4}$ (c) $\frac{4}{3}$ का $\frac{1}{4}$

(ii) (a) $\frac{2}{9}$ का $\frac{1}{7}$ (b) $\frac{6}{5}$ का $\frac{1}{7}$ (c) $\frac{3}{10}$ का $\frac{1}{7}$

2. गुणा कीजिए और न्यूनतम रूप में बदलिए (यदि संभव है) :

(i) $\frac{2}{3}\times 2\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{2}{7}\times\frac{7}{9}$ (iii) $\frac{3}{8}\times\frac{6}{4}$ (iv) $\frac{9}{5}\times\frac{3}{5}$

(v) $\frac{1}{3}\times\frac{15}{8}$ (vi) $\frac{11}{2}\times\frac{3}{10}$ (vii) $\frac{4}{5}\times\frac{12}{7}$

3. निम्नलिखित भिन्नों को गुणा कीजिए:

(i) $\frac{2}{5}\times 5\frac{1}{4}$ (ii) $6\frac{2}{5}\times\frac{7}{9}$ (iii) $\frac{3}{2}\times 5\frac{1}{3}$ (iv) $\frac{5}{6}\times 2\frac{3}{7}$

(v) $3\frac{2}{5}\times\frac{4}{7}$ (vi) $2\frac{3}{5}\times 3$ (vii) $3\frac{4}{7}\times\frac{3}{5}$

4. कौन बड़ा है :

(i) $\frac{3}{4}$ का $\frac{2}{7}$ अथवा $\frac{5}{8}$ का $\frac{3}{5}$ (ii) $\frac{6}{7}$ का $\frac{1}{2}$ अथवा $\frac{3}{7}$ का $\frac{2}{3}$

5. सैली अपने बगीचे में चार छोटे पौधे एक पंक्ति में लगाती है। दो क्रमागत छोटे पौधों के बीच की दूरी $\frac{3}{4}$ m है। प्रथम एवं अंतिम पौधे के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

6. लिपिका एक पुस्तक को प्रतिदिन $1\frac{3}{4}$ घंटे पढ़ती है। वह संपूर्ण पुस्तक को 6 दिनों में पढ़ती है। उस पुस्तक को पढ़ने में उसने कुल कितने घंटे लगाए?

7. एक कार 1 लिटर पैट्रोल में 16 किमी दौड़ती है। $2\frac{3}{4}$ लिटर पैट्रोल में यह कार कुल कितनी दूरी तय करेगी?

8. (a) (i) बक्सा $\square$, में संख्या लिखिए, ताकि $\frac{2}{3}\times\square=\frac{10}{30}$।

(ii) बक्सा $\square$, में प्राप्त संख्या का न्यूनतम रूप ______ है।

(b) (i) बक्सा $\square$, में संख्या लिखिए, ताकि $\frac{3}{5} \times \square = \frac{24}{75}$ ।

(ii) बक्सा $\square$, में प्राप्त संख्या का न्यूनतम रूप _____ है।

2.4 भिन्नों की भाग

जॉन के पास 6 cm लंबी कागज़ की एक पट्टी है। वह इस पट्टी को 2 cm लंबी छोटी पट्टियों में काटता है। आप जानते हैं कि वह $6 \div 2 = 3$ पट्टियाँ प्राप्त करेगा। जॉन 6 cm लंबाई वाली एक दूसरी पट्टी को $\frac{3}{2}$ cm लंबाई वाली छोटी पट्टियों में काटता है। अब उसको कितनी छोटी पट्टियाँ प्राप्त होंगी? वह $6 \div \frac{3}{2}$ पट्टियाँ प्राप्त करेगा।

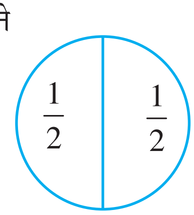
एक $\frac{15}{2}$ cm लंबाई वाली पट्टी को $\frac{3}{2}$ cm लंबाई वाली छोटी पट्टियों में काटा जा सकता है जिससे हमें $\frac{15}{2} \div \frac{3}{2}$ टुकड़े प्राप्त होंगे।

अतः, हमें एक पूर्ण संख्या को किसी भिन्न से अथवा एक भिन्न को दूसरी भिन्न से भाग देने की आवश्यकता है। आइए हम देखते हैं कि इसे कैसे करना है।

2.4.1 भिन्न से पूर्ण संख्या की भाग

आइए $1 \div \frac{1}{2}$ ज्ञात करते हैं।

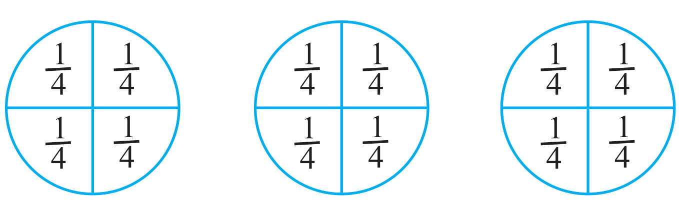
हम किसी संपूर्ण को कुछ बराबर भागों में इस प्रकार बाँटते हैं ताकि प्रत्येक भाग संपूर्ण का आधा है। ऐसे आधे $(\frac{1}{2})$ भागों की संख्या $1 \div \frac{1}{2}$ होगी। आकृति 2.11 को देखिए। आपको कितने आधे भाग दिखाई देते हैं? ऐसे दो आधे भाग हैं।



आकृति 2.11

इसलिए $1 \div \frac{1}{2} = 2.$ साथ ही $1 \times \frac{2}{1} = 1 \times 2 = 2$ अतः $1 \div \frac{1}{2} = 1 \times \frac{2}{1}$

इसी प्रकार, $3 \div \frac{1}{4}$ = 3 संपूर्णों में से प्रत्येक को समान $\frac{1}{4}$ भागों में बाँटने पर, $\frac{1}{4}$ भागों की संख्या = 12 (आकृति 2.12 से)



आकृति 2.12

यह भी देखिए कि $3\times\frac{4}{1} = 3\times 4 = 12$. इस प्रकार, $3\div\frac{1}{4} = 3\times\frac{4}{1} = 12$.

इसी प्रकार $3\div\frac{1}{2}$ और $3\times\frac{2}{1}$ ज्ञात कीजिए।

भिन्न का व्युत्क्रम

$\frac{1}{2}$ के अंश एवं हर को परस्पर बदलने पर अथवा $\frac{1}{2}$ का प्रतिलोम करने पर संख्या $\frac{2}{1}$ प्राप्त की जा सकती है। इसी प्रकार $\frac{1}{3}$ का प्रतिलोम करने पर $\frac{3}{1}$ प्राप्त होता है।

आइए सर्वप्रथम हम ऐसी संख्याओं के प्रतिलोम के बारे में चर्चा करते हैं।

निम्नलिखित गुणनफलों को देखिए और रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

$7\times\frac{1}{7} = 1$	$\frac{5}{4}\times\frac{4}{5}$ = ---------
$\frac{1}{9}\times 9$ = ------	$\frac{2}{7}\times$ ------- = 1
$\frac{2}{3}\times\frac{3}{2} = \frac{2\times 3}{3\times 2} = \frac{6}{6} = 1$	------ $\times\frac{5}{9} = 1$

ऐसे पाँच और युग्मों को गुणा कीजिए।

ऐसी शून्येतर संख्याएँ जिनका परस्पर गुणनफल 1 है, एक दूसरे के व्युत्क्रम कहलाती हैं। इस प्रकार $\frac{5}{9}$ का व्युत्क्रम $\frac{9}{5}$ है और $\frac{9}{5}$ का व्युत्क्रम $\frac{5}{9}$ है। $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{7}$ के व्युत्क्रम क्या है?

आप देखेंगे कि $\frac{2}{3}$ का प्रतिलोम करने पर इसका व्युत्क्रम प्राप्त होता है। आप इस प्रकार $\frac{3}{2}$ प्राप्त करते हैं।

सोचिए, चर्चा कीजिए एवं लिखिए

(i) क्या एक उचित भिन्न का व्युत्क्रम भी उचित भिन्न होगी?

(ii) क्या एक विषम भिन्न का व्युत्क्रम भी एक विषम भिन्न होगा?

इसलिए हम कह सकते हैं कि

$1\div\frac{1}{2} = 1\times\frac{2}{1} = 1\times(\frac{1}{2}$ का व्युत्क्रम$)$

$3\div\frac{1}{4} = 3\times\frac{4}{1} = 3\times(\frac{1}{4}$ का व्युत्क्रम$)$

$3\div\frac{1}{2}$ = ------ = ----------------------.

अतः, $2 \div \frac{3}{4} = 2 \times (\frac{3}{4}$ का व्युत्क्रम$) = 2 \times \frac{4}{3}$.

$5 \div \frac{2}{9} = 5 \times$ ------------------- $= 5 \times$ -------------

इस प्रकार किसी पूर्ण संख्या को एक भिन्न से भाग करने के लिए उस पूर्ण संख्या को उस भिन्न के व्युत्क्रम से गुणा कर दीजिए।

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए : (i) $7 \div \frac{2}{5}$ (ii) $6 \div \frac{4}{7}$ (iii) $2 \div \frac{8}{9}$

- *किसी पूर्ण संख्या को एक मिश्रित भिन्न से भाग करते समय, सर्वप्रथम मिश्रित भिन्न को विषम भिन्न में परिवर्तित कीजिए और तब इसको हल कीजिए।*

इस प्रकार $4 \div 2\frac{2}{5} = 4 \div \frac{12}{5} = ?$ साथ ही $5 \div 3\frac{1}{3} = 5 \div \frac{10}{3} = ?$

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए:

(i) $6 \div 5\frac{1}{3}$

(ii) $7 \div 2\frac{4}{7}$

2.4.2 पूर्ण संख्या से भिन्न की भाग

- $\frac{3}{4} \div 3$ का मान क्या होगा?

पूर्व प्रेक्षणों के आधार पर हम पाते हैं : $\frac{3}{4} \div 3 = \frac{3}{4} \div \frac{3}{1} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

अतः, $\frac{2}{3} \div 7 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{7} = ?$ $\frac{5}{7} \div 6$, $\frac{2}{7} \div 8$ के मान क्या हैं?

- मिश्रित भिन्नों को पूर्ण संख्या से भाग करते समय मिश्रित भिन्न को विषम भिन्न में परिवर्तित कीजिए। अर्थात्

$2\frac{2}{3} \div 5 = \frac{8}{3} \div 5 =$ ------ ; $4\frac{2}{5} \div 3 =$ ------ $=$ ------ $2\frac{3}{5} \div 2 =$ ------ $=$ ----

2.4.3 एक भिन्न की दूसरी भिन्न से भाग

अब हम $\frac{1}{3} \div \frac{6}{5}$ ज्ञात कर सकते हैं।

$\frac{1}{3} \div \frac{6}{5} = \frac{1}{3} \times (\frac{6}{5}$ का व्युत्क्रम$) = \frac{1}{3} \times \frac{6}{5} = \frac{2}{5}$

इसी प्रकार, $\frac{8}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{8}{5} \times (\frac{2}{3}$ का व्युत्क्रम$) = ?$ और $\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} = ?$

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए: (i) $\frac{3}{5} \div \frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2} \div \frac{3}{5}$ (iii) $2\frac{1}{2} \div \frac{3}{5}$ (iv) $5\frac{1}{6} \div \frac{9}{2}$

प्रश्नावली 2.4

1. ज्ञात कीजिए :

(i) $12 \div \frac{3}{4}$ (ii) $14 \div \frac{5}{6}$ (iii) $8 \div \frac{7}{3}$ (iv) $4 \div \frac{8}{3}$

(v) $3 \div 2\frac{1}{3}$ (vi) $5 \div 3\frac{4}{7}$

2. निम्नलिखित भिन्नों में से प्रत्येक का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए। व्युत्क्रमों को उचित भिन्न, विषम भिन्न एवं पूर्ण संख्या के रूप में वर्गीकृत कीजिए।

(i) $\frac{3}{7}$ (ii) $\frac{5}{8}$ (iii) $\frac{9}{7}$ (iv) $\frac{6}{5}$

(v) $\frac{12}{7}$ (vi) $\frac{1}{8}$ (vii) $\frac{1}{11}$

3. ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{7}{3} \div 2$ (ii) $\frac{4}{9} \div 5$ (iii) $\frac{6}{13} \div 7$ (iv) $4\frac{1}{3} \div 3$

(v) $3\frac{1}{2} \div 4$ (vi) $4\frac{3}{7} \div 7$

4. ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{2}{5} \div \frac{1}{2}$ (ii) $\frac{4}{9} \div \frac{2}{3}$ (iii) $\frac{3}{7} \div \frac{8}{7}$ (iv) $2\frac{1}{3} \div \frac{3}{5}$ (v) $3\frac{1}{2} \div \frac{8}{3}$

(vi) $\frac{2}{5} \div 1\frac{1}{2}$ (vii) $3\frac{1}{5} \div 1\frac{2}{3}$ (viii) $2\frac{1}{5} \div 1\frac{1}{5}$

2.5 दशमलव संख्याओं के बारे में आप कितनी अच्छी तरह पढ़ चुके हैं

आपने पिछली कक्षाओं में दशमलव संख्याओं के बारे में अध्ययन किया है। आइए यहाँ हम संक्षिप्त

में इनका स्मरण करते हैं। निम्नलिखित सारणी को देखिए और रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

सैकड़ा (100)	दहाई (10)	इकाई (1)	दशांश $\left(\frac{1}{10}\right)$	शतांश $\left(\frac{1}{100}\right)$	सहस्रांश $\left(\frac{1}{1000}\right)$	संख्या
2	5	3	1	4	7	253.147
6	2	9	3	2	1	....
0	4	3	1	9	2	....
....	1	4	2	5	1	514.251
2	....	6	5	1	2	236.512
....	2	....	5	....	3	724.503
6	....	4	....	2	....	614.326
0	1	0	5	3	0	....

उपर्युक्त सारणी में आपने ऐसी दशमलव संख्याएँ लिखी हैं जिनका प्रसारित रूप या स्थानीय मान दिया हुआ था। आप विलोम भी कर सकते हैं। अर्थात् यदि आपको संख्या दी हुई है तो आप इसका प्रसारित रूप लिख सकते हैं। उदाहरणत:

$$253.417 = 2 \times 100 + 5 \times 10 + 3 \times 1 + 4 \times \left(\frac{1}{10}\right) + 1 \times \left(\frac{1}{100}\right) + 7 \times \left(\frac{1}{1000}\right)$$

जॉन के पास ₹ 15.50 हैं और सलमा के पास ₹ 15.75 हैं। किसके पास अधिक धन है? इसे ज्ञात करने के लिए हमें दशमलव संख्याओं 15.50 एवं 15.75 की तुलना करने की आवश्यकता है। इसके लिए हम सर्वप्रथम दशमलव बिंदु के सबसे बाईं तरफ़ के अंक से शुरू करते हुए बाईं तरफ के अंकों की तुलना करते हैं। यहाँ बिंदु के बाईं तरफ़ के दोनों अंक 1 और 5 दोनों संख्याओं में एक जैसे हैं। इसलिए हम दशांश स्थान से शुरू करते हुए दशमलव बिंदु के दाईं तरफ़ के अंकों की तुलना करते हैं। हम पाते हैं कि $5 < 7$, इस प्रकार हम कहते हैं कि $15.50 < 15.75$. अत: सलमा के पास जॉन से अधिक धन है।

यदि दशांश स्थान के अंक भी एक जैसे हैं तो शतांश स्थान के अंकों की तुलना कीजिए और इसी प्रकार आगे कीजिए।

अब तुरंत 35.63 और 35.67; 20.1 और 20.01; 19.36 और 29.36 की तुलना कीजिए।

धन, लंबाई और भार की निम्न इकाई को उच्च इकाई में परिवर्तित करते समय हमें दशमलव की आवश्यकता होती है। उदाहरणत: 3 पैसे = ₹ $\frac{3}{100}$ = ₹ 0.03,

$5 \text{ g} = \frac{5}{1000} \text{ kg} = 0.005 \text{ kg}$, $7 \text{ cm} = \frac{7}{100} \text{ m} = 0.07 \text{ m}$

75 पैसे = ₹ _______, 250 g = ______ kg, 85 cm = ______ m, लिखिए

हम यह भी जानते हैं कि दशमलवों को कैसे जोड़ा और घटाया जाता है। इस प्रकार 21.36 + 37.35 है

$$\begin{array}{r} 21.36 \\ +\ 37.35 \\ \hline 58.71 \end{array}$$

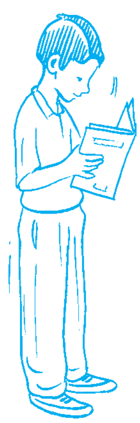
0.19 + 2.3 का मान क्या है?

29.35 – 4.56 का अंतर है

$$\begin{array}{r} 29.35 \\ -\ 04.56 \\ \hline 24.79 \end{array}$$

39.87 – 21.98 का मान बताइए।

प्रश्नावली 2.5



1. कौन बड़ा है?

(i) 0.5 अथवा 0.05 (ii) 0.7 अथवा 0.5 (iii) 7 अथवा 0.7

(iv) 1.37 अथवा 1.49 (v) 2.03 अथवा 2.30 (vi) 0.8 अथवा 0.88.

2. दशमलव का उपयोग करते हुए निम्नलिखित को रुपये के रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) 7 पैसे (ii) 7 रुपये 7 पैसे (iii) 77 रुपये 77 पैसे

(iv) 50 पैसे (v) 235 पैसे

3. (i) 5 cm को m एवं km में व्यक्त कीजिए।

(ii) 35 mm को cm, m एवं km में व्यक्त कीजिए।

4. निम्नलिखित को kg में व्यक्त कीजिए :

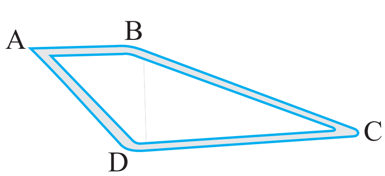
(i) 200 gm (ii) 3470 gm (iii) 4 kg 8 g

5. निम्नलिखित दशमलव संख्याओं को विस्तारित रूप में लिखिए :

(i) 20.03 (ii) 2.03 (iii) 200.03 (iv) 2.034

6. निम्नलिखित दशमलव संख्याओं में 2 का स्थानीय मान लिखिए :

(i) 2.56 (ii) 21.37 (iii) 10.25 (iv) 9.42 (v) 63.352.



7. दिनेश स्थान A से स्थान B तक गया और वहाँ से स्थान C तक गया। A से B की दूरी 7.5 km है और B से C की दूरी 12.7 km है। अयूब स्थान A से स्थान D तक गया और वहाँ से वह स्थान C को गया। A से D की दूरी 9.3 km है और D से C की दूरी 11.8 km है। किसने ज़्यादा दूरी तय की और वह दूरी कितनी अधिक थी?

8. श्यामा ने 5 kg 300 g सेब और 3 kg 250 g आम खरीदे। सरला ने 4 kg 800 g संतरे और 4 kg 150 g केले खरीदे। किसने अधिक फल खरीदे?

9. 28 km, 42.6 km से कितना कम है?

2.6 दशमलव संख्याओं का गुणन

रेशमा ने ₹ 8.50 प्रति kg की दर से 1.5 kg सब्जी खरीदी। उसे कितने धन का भुगतान करना चाहिए? निश्चित रूप से यह ₹ 8.50×1.50 होगा। 8.5 और 1.5 दोनों ही दशमलव संख्याएँ हैं। इस प्रकार हमें एक ऐसी परिस्थिति मिलती है जहाँ हमें यह ज्ञात करने की आवश्यकता है कि दो दशमलवों को कैसे गुणा किया जाता है। आइए अब दो दशमलव संख्याओं के गुणन को सीखते हैं।

सर्वप्रथम हम 0.1×0.1 ज्ञात करते हैं।

अब $0.1 = \frac{1}{10}$, इसलिए $0.1 \times 0.1 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1 \times 1}{10 \times 10} = \frac{1}{100} = 0.01$.

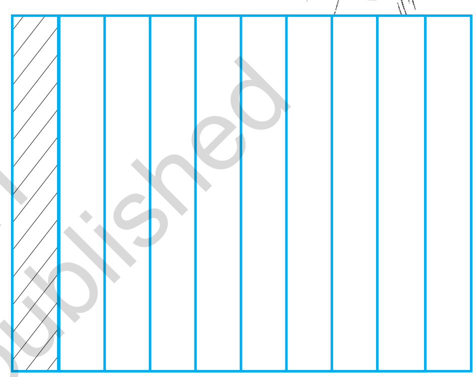
आइए इसका सचित्र निरूपण देखते हैं। (आकृति 2.13)

भिन्न $\frac{1}{10}$, 10 समान भागों में से एक को निरूपित करती है।

चित्र में छायांकित भाग $\frac{1}{10}$ को निरूपित करता है।

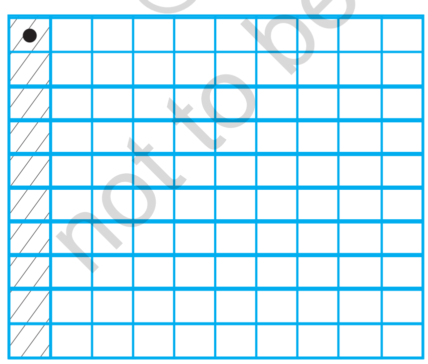
हम जानते हैं कि

$\frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$ का अर्थ है $\frac{1}{10}$ का $\frac{1}{10}$. इसलिए इस $\frac{1}{10}$ वें भाग को 10 बराबर भागों में बाँटिए और इनमें से एक भाग को लीजिए।



आकृति 2.13

इस प्रकार हम पाते हैं (आकृति 2.14) कि



आकृति 2.14

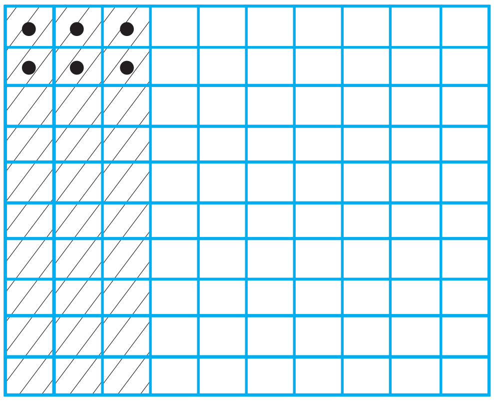
$\frac{1}{10}$ वें भाग के 10 भागों में एक भाग बिंदु द्वारा चिह्नित वर्ग है। अर्थात् यह $\frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$ अथवा 0.1×0.1 को निरूपित करता है।

क्या बिंदु वर्ग को किसी दूसरी विधि से निरूपित किया जा सकता है?

आप आकृति 2.14 में कितने छोटे वर्ग पाते हैं।

इसमें 100 छोटे वर्ग हैं। इस प्रकार बिंदु द्वारा चिह्नित वर्ग 100 में से एक को निरूपित करता है अर्थात् 0.01 को निरूपित करता है। अत: $0.1 \times 0.1 = 0.01$.

ध्यान दीजिए 0.1 गुणनफल में दो बार सम्मिलित है। 0.1 में दशमलव बिंदु के दाईं तरफ़ एक अंक है। 0.01 में दशमलव बिंदु के दाईं तरफ़ दो (अर्थात् $1 + 1$) अंक हैं।



आकृति 2.15

आइए अब हम 0.2×0.3 ज्ञात करते हैं।

हम पाते हैं, $0.2 \times 0.3 = \frac{2}{10} \times \frac{3}{10}$

जैसे हमने $\frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$, के लिए किया है, वैसे ही आइए हम वर्ग को 10 समान भागों में बाँटते हैं और $\frac{3}{10}$ प्राप्त करने के लिए इनमें से 3 भागों को बाहर निकाल लेते हैं। फिर से इन 3 समान भागों में से प्रत्येक भाग को 10 समान भागों में बाँटिए और प्रत्येक में से 2 ले लीजिए। इस प्रकार हम $\frac{2}{10} \times \frac{3}{10}$ प्राप्त करते हैं।

बिंदु द्वारा चिह्नित वर्ग, $\frac{2}{10} \times \frac{3}{10}$ अर्थात् 0.2×0.3 को निरूपित करते हैं (आकृति 2.15 देखिए)

क्योंकि 100 में से 6 बिंदु द्वारा चिह्नित वर्ग हैं अत: ये 0.06 को भी निरूपित करते हैं। इस प्रकार $0.2 \times 0.3 = 0.06$.

ध्यान दीजिए कि $2 \times 3 = 6$ और 0.06 में दशमलव बिंदु से दाईं तरफ़ अंकों की संख्या 2 $(= 1 + 1)$ हैं।

जाँच कीजिए कि क्या यह 0.1×0.1 के लिए भी उचित है।

इन प्रेक्षणों का उपयोग करते हुए 0.2×0.4 ज्ञात कीजिए।

0.1×0.1 और 0.2×0.3 ज्ञात करते समय संभवत: आपने ध्यान दिया होगा कि सर्वप्रथम हमने दशमलव बिंदु की उपेक्षा करते हुए पूर्ण संख्याओं के रूप में गुणा किया था। 0.1×0.1 में हमने पाया, 01×01 अर्थात् 1×1 इसी प्रकार 0.2×0.3 में हमने पाया, $02 \times 03 = 2 \times 3$.

तब हमने सबसे दाईं तरफ़ के अंक से शुरू करते हुए और बाईं तरफ़ चलते हुए अंकों की संख्या को गिना। तब हमने वहाँ दशमलव बिंदु रखा। गिने जाने वाले अंकों की संख्या, गुणा की जा रही दशमलव संख्याओं के दशमलव बिंदु के दाईं तरफ़ के अंकों की संख्या का योग करने पर प्राप्त होती है।

आइए अब हम 1.2×2.5 ज्ञात करते हैं।

12 एवं 25 को गुणा कीजिए। हम 300 अंक प्राप्त करते हैं। 1.2 और 2.5 दोनों में दशमलव बिंदु के दाईं तरफ एक अंक है। इसलिए 300 में सबसे दाईं तरफ से $1 + 1 = 2$ अंक गिन लीजिए (अर्थात् दो 0) और बाईं तरफ़ चलिए। हम 3.00 अर्थात् 3 प्राप्त करते हैं

इसी प्रकार 1.5×1.6, 2.4×4.2 ज्ञात कीजिए।

2.5 और 1.25 को गुणा करते समय सर्वप्रथम आप 25 एवं 125 को गुणा करेंगे। प्राप्त गुणनफल में दशमलव रखने के लिए आप सबसे दाईं तरफ़ के अंक से शुरू करते हुए $1 + 2 = 3$ (क्यों)? अंक गिनेंगे। अत: $2.5 \times 1.25 = 3.125$। 2.7×1.35 ज्ञात कीजिए।

प्रयास कीजिए

1. ज्ञात कीजिए: (i) 2.7×4 (ii) 1.8×1.2 (iii) 2.3×4.35
2. प्रश्न 1 में प्राप्त गुणनफलों को अवरोही क्रम में क्रमबद्ध कीजिए।

उदाहरण 7 एक समबाहु त्रिभुज की भुजा 3.5 cm है। इसका परिमाप ज्ञात कीजिए।

हल समबाहु त्रिभुज की सभी भुजाएँ समान होती हैं।

इसलिए, प्रत्येक भुजा की लंबाई = 3.5 cm।   अत: परिमाप = 3×3.5 cm = 10.5 cm

उदाहरण 8 एक आयत की लंबाई 7.1 cm और इसकी चौड़ाई 2.5 cm है। आयत का क्षेत्रफल क्या है?

हल आयत की लंबाई = 7.1 cm   आयत की चौड़ाई = 2.5 cm

इसलिए आयत का क्षेत्रफल = 7.1 cm $\times$ 2.5 cm = 17.75 cm^2

2.6.1 दशमलव संख्याओं का 10,100 और 1000 से गुणन

रेशमा ने देखा कि $2.3 = \frac{23}{10}$ है जबकि $2.35 = \frac{235}{100}$. अत: उसने पाया कि दशमलव बिंदु की स्थिति पर निर्भर करते हुए दशमलव संख्या को 10 अथवा 100 हर वाली भिन्न के रूप में परिवर्तित किया जा सकता है। उसने सोचा कि यदि किसी दशमलव संख्या को 10 अथवा 100 अथवा 1000 से गुणा किया जाए तो क्या होगा?

आइए देखते हैं क्या हम दशमलव संख्याओं को 10 अथवा 100 अथवा 1000 से गुणा करने का कोई प्रतिरूप (पैटर्न) प्राप्त कर सकते हैं।

नीचे दी हुई सारणी को देखिए और रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

$1.76 \times 10 = \frac{176}{100} \times 10 = 17.6$	$2.35 \times 10 =$ ___	$12.356 \times 10 =$ ___
$1.76 \times 100 = \frac{176}{100} \times 100 = 176$ या 176.0	$2.35 \times 100 =$ ___	$12.356 \times 100 =$ ___
$1.76 \times 1000 = \frac{176}{100} \times 1000 = 1760$ या 1760.0	$2.35 \times 1000 =$ ___	$12.356 \times 1000 =$ ___
$0.5 \times 10 = \frac{5}{10} \times 10 = 5$;	$0.5 \times 100 =$ ___ ;	$0.5 \times 1000 =$ ___

सारणी में गुणनफल के दशमलव बिंदु के विस्थापन को देखिए। यहाँ संख्याओं को 10,100 एवं 1000 से गुणा किया गया है। $1.76 \times 10 = 17.6$ में अंक वही हैं अर्थात् दोनों तरफ़ 1, 7 और 6 है। क्या आपने इसे दूसरे गुणनफलों में भी देखा है? 1.76 और 17.6 को भी देखिए। दशमलव बिंदु दाईं अथवा बाईं, किस तरफ़ विस्थापित हुआ है ध्यान दीजिए 10 में 1 के अतिरिक्त एक शून्य है।

$1.76 \times 100 = 176.0$ में, 1.76 एवं 176.0 को देखिये कि किस तरफ और कितने स्थानों से दशमलव बिंदु का विस्थापन हुआ है। दशमलव बिंदु दाईं तरफ़ दो स्थानों से विस्थापित हुआ है।

ध्यान दीजिए 100 में 1 के अतिरिक्त दो शून्य है।

क्या आप दूसरे गुणनफलों में भी दशमलव बिंदु का इसी प्रकार का विस्थापन देखते हैं?

इस प्रकार हम कहते हैं कि जब किसी दशमलव संख्या को 10, 100 अथवा 1000 से गुणा किया जाता है तो गुणनफल के अंक वही होते हैं जो अंक दशमलव संख्या में होते हैं परंतु गुणनफल में दशमलव बिंदु दाईं तरफ उतने ही स्थानों से विस्थापित होता है जितने 1 के अतिरिक्त शून्य होते हैं। इन प्रेक्षणों के आधार पर अब हम कह सकते हैं कि:

$0.07 \times 10 = 0.7$, $0.07 \times 100 = 7$ और $0.07 \times 1000 = 70$.

क्या अब आप बता सकते हैं कि $2.97 \times 10 = ?$ $\quad 2.97 \times 100 = ?$ $\quad 2.97 \times 1000 = ?$

क्या अब आप रेशमा द्वारा भुगतान किए जाने वाली राशि अर्थात् ₹ 8.50×150, ज्ञात करने में उसकी सहायता कर सकते हैं?

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए:

(i) 0.3×10

(ii) 1.2×100

(iii) 56.3×1000

प्रश्नावली 2.6

1. ज्ञात कीजिए :

(i) 0.2×6 (ii) 8×4.6 (iii) 2.71×5

(iv) 20.1×4 (v) 0.05×7 (vi) 211.02×4

(vii) 2×0.86

2. एक आयत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी लंबाई 5.7 cm और चौड़ाई 3 cm है।

3. ज्ञात कीजिए :

(i) 1.3×10 (ii) 36.8×10 (iii) 153.7×10

(iv) 168.07×10 (v) 31.1×100 (vi) 156.1×100

(vii) 3.62×100 (viii) 43.07×100 (ix) 0.5×10

(x) 0.08×10 (xi) 0.9×100 (xii) 0.03×1000

4. एक दुपहिया वाहन एक लीटर पैट्रोल में 55.3 km की दूरी तय करता है। 10 लीटर पैट्रोल में वह कितनी दूरी तय करेगा?

5. ज्ञात कीजिए :

(i) 2.5×0.3 (ii) 0.1×51.7 (iii) 0.2×316.8

(iv) 1.3×3.1 (v) 0.5×0.05 (vi) 11.2×0.15

(vii) 1.07×0.02 (viii) 10.05×1.05

(ix) 101.01×0.01 (x) 100.01×1.1

2.7 दशमलव संख्याओं की भाग

सविता अपनी कक्षा की सजावट के लिए एक डिजाईन तैयार कर रही थी। उसे 1.9 cm लंबाई वाली कुछ रंगीन कागज़ की पट्टियों की आवश्यकता थी। उसके पास 9.5 cm लंबाई वाली एक रंगीन कागज़ की पट्टी थी। इस पट्टी में से वह अभीष्ट लंबाई के कितने टुकड़े प्राप्त कर सकेगी। उसने सोचा शायद यह $\frac{9.5}{1.9}$ होगा। क्या यह सही है?

9.5 और 1.9 दोनों ही दशमलव संख्याएँ हैं। इसलिए हमें दशमलव संख्याओं की भाग भी जानने की आवश्यकता है।

2.7.1 10, 100 और 1000 से भाग

आइए अब हम एक दशमलव संख्या की 10, 100 और 1000 से भाग ज्ञात करते हैं।

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए :

(i) $235.4 \div 10$

(ii) $235.4 \div 100$

(iii) $235.4 \div 1000$

आइए हम $31.5 \div 10$ ज्ञात करते हैं।

$$31.5 \div 10 = \frac{315}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{315}{100} = 3.15$$

इसी प्रकार $$31.5 \div 100 = \frac{315}{10} \times \frac{1}{100} = \frac{315}{1000} = 0.315$$

आइए हम यह देखते हैं कि क्या हम संख्याओं को 10, 100 अथवा 1000 से भाग करने का कोई प्रतिरूप ज्ञात कर सकते हैं। यह संख्याओं को 10, 100 अथवा 1000 से, संक्षिप्त विधि से भाग करने में हमारी सहायता कर सकता है।

$31.5 \div 10 = 3.15$	$231.5 \div 10 =$ ___	$1.5 \div 10 =$ ___	$29.36 \div 10 =$ ___
$31.5 \div 100 = 0.315$	$231.5 \div 100 =$ ___	$1.5 \div 100 =$ ___	$29.36 \div 100 =$ ___
$31.5 \div 1000 = 0.0315$	$231.5 \div 1000 =$ ___	$1.5 \div 1000 =$ ___	$29.36 \div 1000 =$ ___

$31.5 \div 10 = 3.15$ को लीजिए। 31.5 और 3.15 में अंक एक जैसे हैं अर्थात् 3, 1, और 5 परंतु भागफल में दशमलव बिंदु विस्थापित हो गया है। किस तरफ़ और कितने स्थानों से? दशमलव बिंदु बाईं तरफ़ एक स्थान से विस्थापित हो गया है। ध्यान दीजिए 10 में 1 के अतिरिक्त एक शून्य है।

अब $31.5 \div 100 = 0.315$ की चर्चा करते हैं। 31.5 और 0.315 में अंक एक जैसे हैं परंतु भागफल में दशमलव बिंदु के बारे में क्या कह सकते हैं? यह बाईं तरफ दो स्थानों से विस्थापित हो गया है। ध्यान दीजिए 100 में 1 के अतिरिक्त दो शून्य हैं।

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि किसी संख्या को 10, 100 अथवा 1000 से भाग करने पर संख्या एवं भागफल के अंक एक जैसे हैं परंतु भागफल में दशमलव बिंदु बाईं तरफ उतने ही स्थानों से विस्थापित हो जाता है जितने 1 के साथ शून्य होते हैं। इस प्रेक्षण का उपयोग करते हुए अब हम शीघ्रतापूर्वक निम्नलिखित को ज्ञात करते हैं,

$$2.38 \div 10 = 0.238$$
$$2.38 \div 100 = 0.0238$$
$$2.38 \div 1000 = 0.00238$$

2.7.2 पूर्ण संख्या से दशमलव संख्या की भाग

आइए, हम $\frac{6.4}{2}$ ज्ञात करते हैं। याद कीजिए हम इसे $6.4 \div 2$ के रूप में भी लिखते हैं।

इसलिए, जैसा कि हमने भिन्नों से सीखा है

प्रयास कीजिए

(i) $35.7 \div 3 = ?$

(ii) $25.5 \div 3 = ?$

$$6.4 \div 2 = \frac{64}{10} \div 2$$
$$= \frac{64}{10} \times \frac{1}{2}$$
$$= \frac{64 \times 1}{10 \times 2} = \frac{1 \times 64}{10 \times 2} = \frac{1}{10} \times \frac{64}{2}$$
$$= \frac{1}{10} \times 32 = \frac{32}{10} = 3.2$$

अथवा, आइए सर्वप्रथम हम 64 को 2 से भाग करते है। हम 32 प्राप्त करते हैं। 6.4 में दशमलव बिंदु के दाईं तरफ एक अंक है। 32 में दशमलव इस प्रकार रखिए ताकि दशमलव के दाईं तरफ़ केवल एक ही अंक रह पाए। हम फिर से 3.2 प्राप्त करते हैं।

प्रयास कीजिए

(i) $43.15 \div 5 = ?$

(ii) $82.44 \div 6 = ?$

$19.5 \div 5$ ज्ञात करने के लिए पहले $195 \div 5$ ज्ञात कीजिए। हम 39 प्राप्त करते हैं। 19.5 में दशमलव बिंदु के दाईं तरफ़ एक अंक है। 39 में दशमलव बिंदु को इस प्रकार रखिए ताकि इसके दाईं तरफ़ केवल एक अंक रह पाए। आप 3.9 प्राप्त करेंगे।

अब $$12.96 \div 4 = \frac{1296}{100} \div 4$$

$$= \frac{1296}{100} \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{100} \times \frac{1296}{4}$$

$$= \frac{1}{100} \times 324 = 3.24$$

अथवा, 1296 को 4 से भाग दीजिए। आप 324 प्राप्त करते हैं। 12.96 में दशमलव बिंदु के दाईं ओर 2 अंक हैं। 324 में इसी प्रकार दशमलव रखते हुए आप 3.24 प्राप्त करेंगे।

ध्यान दीजिए यहाँ और इससे अगले परिच्छेद में हमने केवल ऐसे विभाजनों की चर्चा की है जिनमें, दशमलव को ध्यान में न रखकर, एक संख्या को दूसरी संख्या से पूरी तरह विभाजित किया जा सकेगा अर्थात् शेषफल के रूप में शून्य प्राप्त होगा। जैसा कि $19.5 \div 5$ में, जब 195 को 5 से विभाजित किया जाता है तो शेषफल शून्य प्राप्त होता है।

यद्यपि ऐसी भी स्थितियाँ हैं जिनमें कोई संख्या किसी दूसरी संख्या से पूरी तरह विभाजित नहीं की जा सकती अर्थात् हमें शेषफल के रूप में शून्य की प्राप्ति नहीं होती है। उदाहरणत: $195 \div 7$ ऐसी स्थितियों के बारे में हम अगली कक्षाओं में चर्चा करेंगे।

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए:

(i) $15.5 \div 5$

(ii) $126.35 \div 7$

उदाहरण 9 4.2, 3.8 और 7.6 का औसत ज्ञात कीजिए।

हल 4.2, 3.8 और 7.6 का औसत

$$= \frac{4.2 + 3.8 + 7.6}{3}$$

$$= \frac{15.6}{3} = 5.2 \text{ होगा।}$$

2.7.3 एक दशमलव संख्या का दूसरी दशमलव संख्या से भाग

आइए हम $\frac{25.5}{0.5}$ अर्थात् $25.5 \div 0.5$ ज्ञात करते हैं।

हम पाते हैं : $25.5 \div 0.5 = \frac{255}{10} \div \frac{5}{10} = \frac{255}{10} \times \frac{10}{5} = 51$

अत : $25.5 \div 0.5 = 51$

आप क्या देखते हैं? $\frac{25.5}{0.5}$ के लिए हम पाते हैं कि 0.5 में दशमलव के दाईं तरफ़ एक अंक है। इसको 10 से भाग करने पर पूर्ण संख्या में परिवर्तित किया जा सकता है। इसी तरह से 25.5 को भी 10 से भाग करके एक भिन्न में परिवर्तित किया गया है।

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए: (i) $\frac{7.75}{0.25}$ (ii) $\frac{42.8}{0.02}$ (iii) $\frac{5.6}{1.4}$

अथवा हम कहते हैं कि 0.5 को 5 बनाने के लिए दशमलव बिंदु को दाईं तरफ़ एक स्थान से विस्थापित किया गया है।

इसलिए 25.5 में भी दशमलव बिंदु को दाईं तरफ़ एक स्थान से विस्थापित करके 225 में परिवर्तित किया गया।

अत: $22.5 \div 1.5 = \frac{22.5}{1.5} = \frac{225}{15} = 15$

इसी प्रकार $\frac{20.3}{0.7}$ और $\frac{15.2}{0.8}$ ज्ञात कीजिए।

आइए अब हम $20.55 \div 1.5$ ज्ञात करते हैं।

उपर्युक्त चर्चा के अनुसार हम इसे $205.5 \div 15$ के रूप में लिख सकते हैं। इससे हम 13.7 प्राप्त करते हैं।

$\frac{3.96}{0.4}$, $\frac{2.31}{0.3}$ ज्ञात कीजिए।

अब $\frac{33.725}{0.25}$ की चर्चा करते हैं। हम इसे $\frac{3372.5}{25}$ के रूप में लिख सकते हैं (कैसे?) और हम 134.9 के रूप में भागफल प्राप्त करते हैं। आप $\frac{27}{0.03}$ कैसे ज्ञात करेंगे? हम जानते हैं कि 27 को 27.00 के रूप में लिखा जा सकता है।

इसलिए $\frac{27}{0.03} = \frac{27.00}{0.03} = \frac{2700}{3} = ?$

उदाहरण 10 एक सम बहुभुज की प्रत्येक भुजा की लंबाई 2.5 cm है। बहुभुज का परिमाप 12.5 cm है। इस बहुभुज की कितनी भुजाएँ हैं?

हल सम बहुभुज का परिमाप इसकी सभी समान भुजाओं की लंबाई का योग होता है = 12.5 cm

प्रत्येक भुजा की लंबाई = 2.5 cm

अत: भुजाओं की संख्या = $\frac{12.5}{2.5} = \frac{125}{25} = 5$

बहुभुज की 5 भुजाएँ हैं।

उदाहरण 11 एक कार 2.2 घंटे में 89.1 km की दूरी तय करती है। कार द्वारा 1 घंटे में तय की गई औसत दूरी कितनी है?

हल कार द्वारा तय की गई दूरी = 89.1 km

इस दूरी को तय करने में लिया गया समय = 2.2 घंटे

इसलिए कार द्वारा 1 घंटे में तय की गई दूरी $= \frac{89.1}{2.2}$

$$= \frac{891}{22} = 40.5 \text{ km}$$

प्रश्नावली 2.7

1. ज्ञात कीजिए :
   (i) $0.4 \div 2$ (ii) $0.35 \div 5$ (iii) $2.48 \div 4$
   (iv) $65.4 \div 6$ (v) $651.2 \div 4$ (vi) $14.49 \div 7$
   (vii) $3.96 \div 4$ (viii) $0.80 \div 5$
2. ज्ञात कीजिए :
   (i) $4.8 \div 10$ (ii) $52.5 \div 10$ (iii) $0.7 \div 10$
   (iv) $33.1 \div 10$ (v) $272.23 \div 10$ (vi) $0.56 \div 10$
   (vii) $3.97 \div 10$
3. ज्ञात कीजिए :
   (i) $2.7 \div 100$ (ii) $0.3 \div 100$ (iii) $0.78 \div 100$
   (iv) $432.6 \div 100$ (v) $23.6 \div 100$ (vi) $98.53 \div 100$

4. ज्ञात कीजिए :

(i) $7.9 \div 1000$ (ii) $26.3 \div 1000$

(iii) $38.53 \div 1000$ (iv) $128.9 \div 1000$ (v) $0.5 \div 1000$

5. ज्ञात कीजिए :

(i) $7 \div 3.5$ (ii) $36 \div 0.2$ (iii) $3.25 \div 0.5$

(iv) $30.94 \div 0.7$ (v) $0.5 \div 0.25$ (vi) $7.75 \div 0.25$

(vii) $76.5 \div 0.15$ (viii) $37.8 \div 1.4$ (ix) $2.73 \div 1.3$

6. एक गाड़ी 2.4 लीटर पैट्रोल में 43.2 km की दूरी तय करती है। यह गाड़ी एक लीटर पैट्रोल में कितनी दूरी तय करेगी?

हमने क्या चर्चा की?

1. हमने पिछली कक्षा में भिन्न एवं दशमलव के बारे में, तथा उन पर योग एवं व्यवकलन की संक्रियाओं सहित अध्ययन किया है।

2. अब हमने भिन्नों एवं दशमलवों पर गुणन एवं भाग की संक्रियाओं का अध्ययन किया है।

3. हमने अध्ययन किया है कि भिन्नों को कैसे गुणा किया जाए। दो भिन्नों को गुणा करने के लिए उनके अंशों एवं हरों को पृथक्-पृथक् गुणा किया जाता है और फिर गुणनफल को $\dfrac{\text{अंशों का गुणनफल}}{\text{हरों का गुणनफल}}$ के रूप में लिखा जाता है।

उदाहरणार्थ $\dfrac{2}{3} \times \dfrac{5}{7} = \dfrac{2 \times 5}{3 \times 7} = \dfrac{10}{21}$

4. भिन्न, प्रचालक 'का' के रूप में काम करती है।

उदाहरणतः 2 का $\dfrac{1}{2}$ होता है $\dfrac{1}{2} \times 2 = 1$

5. (a) दो उचित भिन्नों का गुणनफल, गुणा किए गए प्रत्येक भिन्न से कम होता है।

(b) एक उचित और एक विषम भिन्न का गुणनफल विषम भिन्न से कम होता है और उचित भिन्न से अधिक होता है।

(c) दो विषम भिन्नों का गुणनफल, गुणा किए गए दोनों भिन्नों में से प्रत्येक से बड़ा होता है।

6. एक भिन्न का व्युत्क्रम इसके अंश और हर को परस्पर बदलने से प्राप्त होता है।

7. हमने देखा है कि दो भिन्नों को कैसे भाग दिया जाता है :

(a) एक पूर्ण संख्या को किसी भिन्न से भाग करते समय हम पूर्ण संख्या को भिन्न के व्युत्क्रम से गुणा करते हैं।

उदाहरणत: $2 \div \frac{3}{5} = 2 \times \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$

(b) एक भिन्न को पूर्ण संख्या से भाग करने के लिए हम भिन्न को पूर्ण संख्या के व्युत्क्रम से गुणा करते हैं।

उदाहरणत: $\frac{2}{3} \div 7 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{7} = \frac{2}{21}$

(c) एक भिन्न को दूसरी भिन्न से भाग करने के लिए हम पहली भिन्न को दूसरी भिन्न के व्युत्क्रम से गुणा करते हैं। इसलिए $\frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$.

8. हमने यह भी सीखा है कि दो दशमलव संख्याएँ कैसे गुणा की जाती हैं। दो दशमलव संख्याओं को गुणा करने के लिए सर्वप्रथम हम उन्हें पूर्ण संख्याओं के रूप में गुणा करते हैं। दोनों दशमलव संख्याओं में दशमलव बिंदु के दाईं तरफ़ अंकों की संख्या को गिनते हैं। गिनी हुई अंकों की संख्या का योग ज्ञात करते हैं। सबसे दाएँ स्थान से अंकों को गिनते हुए गुणनफल में दशमलव बिंदु रखा जाता है। यह गिनती पूर्व में प्राप्त योग के समान होनी चाहिए।

उदाहरणत: $0.5 \times 0.7 = 0.35$

9. एक दशमलव संख्या को 10, 100 अथवा 1000 से गुणा करने के लिए हम उस संख्या में दशमलव बिंदु को दाईं तरफ उतने ही स्थान से विस्थापित करते हैं जितने 1 के अतिरिक्त शून्य होते हैं।

अत: $0.53 \times 10 = 5.3$, $0.53 \times 100 = 53$, $0.53 \times 1000 = 530$

10. हमने देखा है कि दशमलव संख्याएँ कैसे विभाजित की जाती है।

(a) एक दशमलव संख्या को पूर्ण संख्या से भाग करने के लिए सर्वप्रथम हम उन्हें पूर्ण संख्याओं के रूप में भाग देते हैं। तब भागफल में दशमलव बिंदु को वैसे ही रखा जाता है जैसे दशमलव संख्या में।

उदाहरणत: $8.4 \div 4 = 2.1$

ध्यान दीजिए हम यहाँ पर केवल ऐसे विभाजनों की बात कर रहे हैं जिनमें शेषफल शून्य है।

(b) एक दशमलव संख्या को 10, 100 अथवा 1000 से भाग करने के लिए दशमलव संख्या में दशमलव बिंदु को बाईं तरफ़ उतने ही स्थान से विस्थापित करते हैं जितने 1 के अतिरिक्त शून्य होते हैं। इस प्रकार भागफल की प्राप्ति होती है।

इसलिए, $23.9 \div 10 = 2.39, 23.9 \div 100 = 0.239, \quad 23.9 \div 1000 = 0.0239$

(c) दो दशमलव संख्याओं को भाग करते समय सर्वप्रथम हम दोनों संख्याओं में दशमलव बिंदु को दाईं तरफ़ समान स्थानों से विस्थापित करते हैं और तब भाग देते हैं। अत: $2.4 \div 0.2 = 24 \div 2 = 12$.

अध्याय 3

आँकड़ों का प्रबंधन

0757CH03

3.1 भूमिका

पिछली कक्षाओं में, आपने विभिन्न प्रकार के आँकड़ों के साथ कार्य किया था। आपने आँकड़ों को एकत्रित करना, उनको सारणीबद्ध करना तथा उन्हें दंड आलेखों (bar graphs) के रूप में प्रदर्शित करना सीखा था। आँकड़ों का संग्रह, आलेखन और प्रस्तुतीकरण, हमारे अनुभवों को संगठित करने और उनसे निष्कर्ष निकालने में हमारी सहायता करते हैं। इस अध्याय में, हम इस ओर एक कदम और आगे बढ़ेंगे । आपके सम्मुख कुछ अन्य प्रकार के आँकड़े और आलेख आएँगे। आप समाचार-पत्रों, पत्रिकाओं, टेलीविजन और अन्य साधनों से, विभिन्न प्रकार के आँकड़ों को देख चुके हैं। आप यह भी जानते हैं कि सभी आँकड़े हमें किसी न किसी प्रकार की सूचना अवश्य देते हैं। आइए आँकड़ों के कुछ सामान्य रूपों को देखें, जो आपके सम्मुख आते रहते हैं।

सारणी 3.1

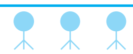
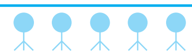
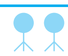
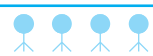
नगरों के तापमान 20.6.2006 को		
	अधिकतम	न्यूनतम
अहमदाबाद	38°C	29°C
अमृतसर	37°C	26°C
बेंगलूर	28°C	21°C
चेन्नई	36°C	27°C
दिल्ली	38°C	28°C
जयपुर	39°C	29°C
जम्मू	41°C	26°C
मुंबई	32°C	27°C

सारणी 3.2

फुटबॉल विश्व कप 2006	
यूक्रेन ने सऊदी अरब को हराया	4 - 0 से
स्पेन ने ट्यूनिशिया को हराया	3 - 1 से
स्विटजरलैंड ने टोगो को हराया	2 - 0 से

हिंदी के एक टेस्ट में 5 विद्यार्थियों द्वारा 10 में से प्राप्त किए गए अंक हैं : 4, 5, 8, 6, 7

सारणी 3.3

एक कक्षा में साप्ताहिक अनुपस्थिति दर्शाने वाले आँकड़े	
सोमवार	
मंगलवार	
बुधवार	-
बृहस्पतिवार	
शुक्रवार	
शनिवार	
	 एक बच्चे को निरूपित करता है

आँकड़ों के ये संग्रह आपको क्या बताते हैं?

उदाहरणार्थ, आप यह कह सकते हैं कि 20-6-2006 को जम्मू का अधिकतम तापमान सबसे अधिक था (सारणी 3.1) या हम कह सकते हैं कि बुधवार को कोई बच्चा अनुपस्थित नहीं था (सारणी 3.3)।

क्या हम इन आँकड़ों को किसी अलग तरीके से संगठित और प्रस्तुत कर सकते हैं, ताकि उनका विश्लेषण करना और उनकी व्याख्या करना बेहतर हो जाए? इस अध्याय में, हम इस प्रकार के प्रश्नों के उत्तर प्राप्त करने का प्रयत्न करेंगे।

3.2 आँकड़ों का संग्रह

नगरों के तापमानों के बारे में आँकड़े (सारणी 3.1) हमें अनेक बातें बता सकते हैं, परंतु ये आँकड़े हमें यह नहीं बता सकते कि पूरे वर्ष में किस नगर का अधिकतम तापमान सबसे अधिक था। यह जानने के लिए हमें इन नगरों में से प्रत्येक नगर के पूरे वर्ष के दौरान रिकॉर्ड किए गए अधिकतम तापमानों से संबंधित आँकड़े इकट्ठे करने पड़ेंगे। ऐसी स्थिति में, सारणी 3.1 में दिए गए वर्ष के एक विशिष्ट दिन का तापमान-चार्ट पर्याप्त नहीं है।

इससे यह प्रदर्शित होता है कि शायद आँकड़ों का एक दिया हुआ संग्रह हमें उससे संबंधित एक विशिष्ट सूचना न दे पाए। इसके लिए, हमें उस विशिष्ट सूचना को ध्यान में रखते हुए, आँकड़ों को इकट्ठे करने की आवश्यकता है। उपरोक्त स्थिति में, हमें जो विशिष्ट सूचना चाहिए थी वह यह थी, कि पूरे वर्ष के दौरान इन नगरों के अधिकतम तापमान क्या रहे, जो हमें सारणी 3.1 से प्राप्त नहीं हो सके थे। इस प्रकार, **आँकड़ों को इकट्ठे करने से पहले, हमें यह जानना आवश्यक है कि हम इनका उपयोग किसके लिए करेंगे।**

नीचे कुछ स्थितियाँ दी जा रही हैं।

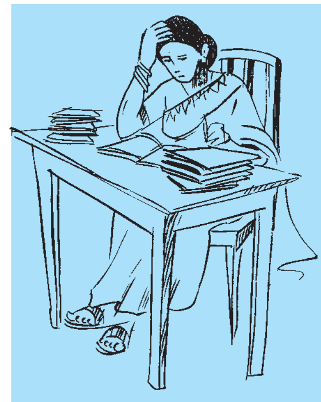
आप अध्ययन करना चाहते हैं :

- गणित में अपनी कक्षा के प्रदर्शन का
- फुटबॉल या क्रिकेट में भारत के प्रदर्शन का
- किसी क्षेत्र में महिला साक्षरता दर का, अथवा
- आपके आस-पास के परिवारों में 5 वर्ष से कम आयु के बच्चों की संख्या का।

उपरोक्त स्थितियों में, आपको किस प्रकार के आँकड़ों की आवश्यकता है? जब तक आप उपयुक्त आँकड़े इकट्ठे नहीं करेंगे, आप वांछित जानकारी नहीं प्राप्त कर सकते हैं। प्रत्येक के लिए, उपयुक्त आँकड़े क्या हैं?

अपने मित्रों से चर्चा कीजिए और पहचानिए कि प्रत्येक स्थिति में किन आँकड़ों की आवश्यकता होगी। कुछ आँकड़ों को इकट्ठे करना सरल है और कुछ को इकट्ठे करना कठिन।

3.3 आँकड़ों का संगठन



जब हम आँकड़ों को संग्रहित करते हैं, तो हमें उन्हें रिकॉर्ड करके संगठित करना होता है। हमें इसकी क्यों आवश्यकता पड़ती है? निम्न उदाहरण पर विचार कीजिए:

कक्षा अध्यापिका सुश्री नीलम यह जानना चाहती थी कि अंग्रेज़ी में बच्चों का प्रदर्शन कैसा रहा? वह विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंकों को निम्नलिखित प्रकार से लिखती है:

23, 35, 48, 30, 25, 46, 13, 27, 32, 38

इस रूप में, आँकड़े सरलता से समझने योग्य नहीं थे। उन्हें यह भी ज्ञात नहीं हुआ कि विद्यार्थियों के बारे में उनकी धारणाएँ उनके प्रदर्शन से मेल करती हैं या नहीं।

नीलम के एक सहकर्मी ने उन आँकड़ों को निम्नलिखित रूप में इकट्ठे करने में उसकी सहायता की। (सारणी 3.4):

सारणी 3.4

रोल नं.	नाम	50 में से प्राप्त अंक	रोल नं.	नाम	50 में से प्राप्त अंक
1	अजय	23	6	गोविंद	46
2	अरमान	35	7	जय	13
3	आशीष	48	8	कविता	27
4	दीप्ति	30	9	मनीषा	32
5	फैज़ान	25	10	नीरज	38

इस तरह नीलम यह समझ सकी कि किस छात्र ने कितने अंक प्राप्त किए। लेकिन वह कुछ और जानकारी चाहती थी। दीपिका ने उन आँकड़ों को दूसरी तरह से प्रदर्शित किया

सारणी 3.5

रोल नं.	नाम	50 में से प्राप्त अंक	रोल नं.	नाम	50 में से प्राप्त अंक
3	आशिष	48	4	दीप्ति	30
6	गोविंद	46	8	कविता	27
10	नीरज	38	5	फैजान	25
2	अरमान	35	1	अजय	23
9	मनीषा	32	7	जय	13

अब नीलम यह जानने में समर्थ हो गई कि किसने सबसे अच्छा प्रदर्शन किया है और किसको सहायता की आवश्यकता है।

हमारे सामने आने वाले अनेक आँकड़े सारणीबद्ध रूप में होते हैं। हमारे स्कूल के रजिस्टर, प्रगति रिपोर्ट, अभ्यास-पुस्तिकाओं में क्रमानुसार सूची, तापमान के रिकॉर्ड तथा अन्य अनेक आँकड़े

सारणीबद्ध (tabular) रूप में होते हैं। क्या आप कुछ और आँकड़ों के बारे में सोच सकते हैं, जो सारणीबद्ध रूप में हैं?

जब हम आँकड़ों को एक उपयुक्त सारणी में रख लेते हैं, तो उन्हें समझना और उनकी व्याख्या करना सरल हो जाता है।

प्रयास कीजिए

अपनी कक्षा के कम से कम 20 बच्चों (लड़के और लड़कियों) को अलग-अलग तौलिए (किलोग्राम में)। प्राप्त आँकड़ों को संगठित कीजिए तथा निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर देने का प्रयत्न कीजिए :

(i) सबसे अधिक भार किसका है? (ii) कौन-सा भार अधिकांश बच्चों का है?

(iii) आपके भार और आपके सबसे अच्छे मित्र के भार में क्या अंतर है?

3.4 प्रतिनिधि मान

आप 'औसत' (average) शब्द से अवश्य ही परिचित होंगे तथा अपने दैनिक जीवन में औसत शब्द से संबंधित निम्नलिखित प्रकार के कथन अवश्य ही सुने या पढ़े होंगे:

- ईशा अपनी पढ़ाई पर प्रतिदिन औसतन लगभग 5 घंटे का समय व्यतीत करती है।
- इस समय वर्ष का औसत तापमान 40 डिग्री (सेल्सियस) है।
- मेरी कक्षा के विद्यार्थियों की औसत आयु 12 वर्ष है।
- एक स्कूल की वार्षिक परीक्षा के समय विद्यार्थियों की औसत उपस्थिति 98 प्रतिशत थी।

इसी प्रकार के अनेक कथन हो सकते हैं। ऊपर दिए हुए कथनों के बारे में सोचिए।

क्या आप सोचते हैं कि पहले कथन में बताया गया बच्चा प्रतिदिन ठीक 5 घंटे पढ़ता है? अथवा, क्या उस विशेष समय पर, दिए हुए स्थान का तापमान सदैव 40 डिग्री रहता है?

अथवा, क्या उस कक्षा के प्रत्येक विद्यार्थी की आयु 12 वर्ष है? स्पष्टत: इन प्रश्नों का उत्तर है 'नहीं'।

तब, ये कथन हमें क्या बताते हैं?

औसत से हम समझते हैं कि ईशा प्राय: एक दिन में 5 घंटे पढ़ती है। कुछ दिन वह इससे कम घंटे पढ़ती है और कुछ दिन इससे अधिक घंटे पढ़ती है।

इसी प्रकार, 40 डिग्री सेल्सियस के औसत तापमान का अर्थ है कि वर्ष के इस समय पर तापमान प्राय: 40 डिग्री सेल्सियस रहता है। कभी वह $40°$ C से कम रहता है और कभी $40°$ C से अधिक भी रहता है।

इस प्रकार, हम यह अनुभव करते हैं कि औसत एक ऐसी संख्या है जो प्रेक्षणों (observations) या आँकड़ों के एक समूह की केंद्रीय प्रवृत्ति (central tendency) को निरूपित करती (या दर्शाती) है। क्योंकि औसत सबसे अधिक तथा सबसे कम मूल्य (value) के आँकड़ों के बीच में होता है। इसलिए हम कहते हैं कि औसत, आँकड़ों के एक समूह की केंद्रीय प्रवृत्ति का मापक (measure)

है। विभिन्न प्रकार के आँकड़ों की व्याख्या करने के लिए, विभिन्न प्रकार के प्रतिनिधि (representative) या केंद्रीय मानों (central values) की आवश्यकता होती है। इनमें से एक प्रतिनिधि मान **अंकगणितीय माध्य** या **समांतर माध्य** (**arthmetic mean**) है।

3.5 अंकगणितीय माध्य

आँकड़ों के एक समूह के लिए अंधिकांशतः प्रयोग किए जाना वाला प्रतिनिधि मान **अंकगणितीय माध्य** है, संक्षेप में इसे **माध्य** (mean) भी कहते हैं। इसे अच्छी प्रकार से समझने के लिए, आइए निम्नलिखित उदाहरण को देखें :

दो बर्तनों में क्रमशः 20 लीटर और 60 लीटर दूध है। यदि दोनों बर्तनों में बराबर-बराबर दूध रखा जाए, तो प्रत्येक बर्तन में कितना दूध होगा? जब हम इस प्रकार का प्रश्न पूछते हैं, तब हम अंकगणितीय माध्य ज्ञात करने के लिए कहते हैं।

उपरोक्त स्थिति में, औसत या अंकगणितीय माध्य होगा :

$$\frac{\text{दूध की कुल मात्रा}}{\text{बर्तनों की संख्या}} = \frac{20+60}{2} \text{ लीटर} = 40 \text{ लीटर}$$

इस प्रकार, प्रत्येक बर्तन में 40 लीटर दूध होगा।

औसत या अंकगणितीय माध्य (A.M.) या केवल माध्य को निम्नलिखित रूप से परिभाषित किया जाता है:

$$\text{माध्य} = \frac{\text{सभी प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की संख्या}}$$

निम्नलिखित उदाहरणों पर विचार कीजिए:

उदाहरण 1 आशिष तीन क्रमागत दिनों में क्रमशः 4 घंटे, 5 घंटे और 3 घंटे पढ़ता है। उसके प्रतिदिन पढ़ने का औसत समय क्या है?

हल आशिष के पढ़ने का औसत समय होगा :

$$\frac{\text{पढ़ाई में लगाया कुल समय}}{\text{दिनों की संख्या जिनमें पढ़ाई की}} = \frac{4+5+3}{3} \text{ घंटे} = 4 \text{ घंटे प्रतिदिन}$$

इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि आशिष प्रतिदिन 4 घंटे के औसत से पढ़ाई करता है।

उदाहरण 2 एक बल्लेबाज ने 6 पारियों (innings) में निम्नलिखित संख्याओं में रन बनाए : 36, 35, 50, 46, 60, 55

एक पारी में उसके द्वारा बनाए गए रनों का माध्य ज्ञात कीजिए।

हल कुल रन = 36 + 35 + 50 + 46 + 60 + 55 = 282

माध्य ज्ञात करने के लिए, हम सभी प्रेक्षणों का योग ज्ञात करके उसे प्रेक्षणों की कुल संख्या से भाग देते हैं। अतः, इस स्थिति में

$$\text{माध्य} = \frac{282}{6} = 47.$$

इस प्रकार, एक पारी में उसके द्वारा बनाए गए रनों का माध्य 47 है।

अंकगणितीय माध्य कहाँ स्थित है?

प्रयास कीजिए

आप पढ़ाई में व्यतीत किए गए अपने समय (घंटों में) का पूरे सप्ताह का औसत किस प्रकार ज्ञात करेंगे?

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

उपरोक्त उदाहरणों में दिए गए आँकड़ों पर विचार कीजिए तथा निम्नलिखित विषय में सोचिए:

- क्या माध्य प्रत्येक प्रेक्षण से बड़ा है?
- क्या यह प्रत्येक प्रेक्षण से छोटा है?

अपने मित्रों के साथ चर्चा कीजिए। इसी प्रकार का एक और उदाहरण बनाइए और इन्हीं प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

आप पाएँगे कि माध्य सबसे बड़े और सबसे छोटे प्रेक्षणों के बीच में स्थित होता है। विशिष्ट रूप में, दो संख्याओं का माध्य सदैव उनके बीच में स्थित होता है।

उदाहरणार्थ, 5 और 11 का माध्य $\frac{5+11}{2}=8$ है, जो 5 और 11 के बीच में स्थित है।

क्या आप इस अवधारणा का प्रयोग करके, यह दर्शा सकते हैं कि दो भिन्नात्मक संख्याओं के बीच में जितनी चाहें उतनी भिन्नात्मक संख्याएँ ज्ञात की जा सकती हैं? उदाहरणार्थ $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{4}$ के बीच में आपको इनका औसत मिलेगा $\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{2}=\frac{3}{8}$ और फिर $\frac{1}{2}$ और $\frac{3}{8}$ के बीच में इनका औसत होगा $\frac{7}{16}$ इत्यादि।

प्रयास कीजिए

1. एक सप्ताह कि अपनी नींद में व्यतीत किए गए समय (घंटों में) का माध्य ज्ञात कीजिए।

2. $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{3}$ के बीच कम से कम पाँच संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

3.5.1 प्रसार या परिसर

सबसे बड़े और सबसे छोटे प्रेक्षणों के अंतर से, हमें प्रेक्षणों के प्रसार का एक अनुमान लग जाता है। इसे सबसे बड़े प्रेक्षण में से सबसे छोटे प्रेक्षण को घटा कर ज्ञात किया जा सकता है। हम इस परिणाम को आँकड़ों या प्रेक्षणों का **प्रसार** या **परिसर** (**range**) कहते हैं।

निम्नलिखित उदाहरण देखिए :

उदाहरण 3 एक स्कूल के 10 अध्यापकों की वर्षों में आयु इस प्रकार है :

32, 41, 28, 54, 35, 26, 23, 33, 38, 40

(i) सबसे बड़ी उम्र वाले अध्यापक की आयु क्या है? तथा सबसे छोटी उम्र वाले अध्यापक की आयु क्या है?

(ii) अध्यापकों की आयु का परिसर क्या है?

(iii) इन अध्यापकों की माध्य आयु क्या है?

हल

(i) आयु को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

23, 26, 28, 32, 33, 35, 38, 40, 41, 54

हमें ज्ञात होता है कि सबसे बड़ी उम्र वाले अध्यापक की आयु 54 वर्ष है तथा सबसे छोटी उम्र वाले अध्यापक की आयु 23 वर्ष है।

(ii) अध्यापकों की आयु का परिसर = (54 – 23) वर्ष = 31 वर्ष है।

(iii) अध्यापकों की माध्य आयु

$$= \frac{23+26+28+32+33+35+38+40+41+54}{10} \text{ वर्ष}$$

$$= \frac{350}{10} \text{ वर्ष} = 35 \text{ वर्ष}$$

प्रश्नावली 3.1

1. अपनी कक्षा के किन्हीं दस (10) विद्यार्थियों की ऊँचाइयों का परिसर ज्ञात कीजिए।

2. कक्षा के एक मूल्यांकन में प्राप्त किए गए निम्नलिखित अंकों को एक सारणीबद्ध रूप में संगठित कीजिए :

   4, 6, 7, 5, 3, 5, 4, 5, 2, 6, 2, 5, 1, 9, 6, 5, 8, 4, 6, 7

   (i) सबसे बड़ा अंक कौन-सा है? (ii) सबसे छोटा अंक कौन-सा है?

   (iii) इन आँकड़ों का परिसर क्या है? (iv) अंकगणितीय माध्य ज्ञात कीजिए।

3. प्रथम 5 पूर्ण संख्याओं का माध्य ज्ञात कीजिए।

4. एक क्रिकेट खिलाड़ी ने 8 पारियों में निम्नलिखित रन बनाए :

   58, 76, 40, 35, 46, 50, 0, 100.

   उसका माध्य स्कोर (score) या रन ज्ञात कीजिए।

5. निम्नलिखित सारणी प्रत्येक खिलाड़ी द्वारा चार खेलों में अर्जित किए गए अंकों को दर्शाती है:

खिलाड़ी	खेल 1	खेल 2	खेल 3	खेल 4
A	14	16	10	10
B	0	8	6	4
C	8	11	खेला नहीं	13

अब निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(i) प्रत्येक खेल में A द्वारा अर्जित औसत अंक ज्ञात करने के लिए, माध्य ज्ञात कीजिए।

(ii) प्रत्येक खेल में C द्वारा अर्जित माध्य अंक ज्ञात करने के लिए, आप कुल अंकों को 3 से भाग देंगे या 4 से? क्यों?

(iii) B ने सभी चार खेलों में भाग लिया है। आप उसके अंकों का माध्य किस प्रकार ज्ञात करेंगे?

(iv) किसका प्रदर्शन सबसे अच्छा है?

6. विज्ञान की एक परीक्षा में, विद्यार्थियों के एक समूह द्वारा (100 में से) प्राप्त किए गए अंक 85, 76, 90, 85, 39, 48, 56, 95, 81 और 75 हैं। ज्ञात कीजिए :

(i) विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त सबसे अधिक अंक और सबसे कम अंक

(ii) प्राप्त अंकों का परिसर

(iii) समूह द्वारा प्राप्त माध्य अंक

7. छह क्रमागत वर्षों में एक स्कूल में विद्यार्थियों की संख्या निम्नलिखित थी :
1555, 1670, 1750, 2013, 2540, 2820
इस समय काल में स्कूल के विद्यार्थियों की माध्य संख्या ज्ञात कीजिए।

8. एक नगर में किसी विशेष सप्ताह के 7 दिनों में हुई वर्षा (mm में) निम्नलिखित रूप से रिकॉर्ड की गई:

दिन	सोमवार	मंगलवार	बुधवार	वृहस्पतिवार	शुक्रवार	शनिवार	रविवार
वर्षा (mm)	0.0	12.2	2.1	0.0	20.5	5.5	1.0

(i) उपरोक्त आँकड़ों से वर्षा का परिसर ज्ञात कीजिए।

(ii) इस सप्ताह की माध्य वर्षा ज्ञात कीजिए।

(iii) कितने दिन वर्षा, माध्य वर्षा से कम रही?

9. 10 लड़कियों की ऊँचाइयाँ cm में मापी गईं और निम्नलिखित परिणाम प्राप्त हुए:
135, 150, 139, 128, 151, 132, 146, 149, 143, 141.

(i) सबसे लंबी लड़की की लंबाई क्या है?

(ii) सबसे छोटी लड़की की लंबाई क्या है?

(iii) इन आँकड़ों का परिसर क्या है?

(iv) लड़कियों की माध्य ऊँचाई (लंबाई) क्या है?

(v) कितनी लड़कियों की लंबाई, माध्य लंबाई से अधिक है?

3.6 बहुलक

जैसा कि हम पहले बता चुके हैं केवल माध्य ही केंद्रीय प्रवृत्ति का माप या प्रतिनिधि मान नहीं है। विभिन्न प्रकार की आवश्यकताओं के अनुसार अन्य प्रकार कि केंद्रीय प्रवृत्ति के मापकों का प्रयोग किया जाता है।

निम्नलिखित उदाहरण को देखिए :

कमीज़ों के विभिन्न मापों (साइज़ों) की साप्ताहिक माँग को ज्ञात करने के लिए, एक दुकानदार 90 cm, 95 cm, 100 cm, 105 cm और 110 cm मापों की कमीज़ों की बिक्री का रिकॉर्ड (record) रखता है। एक सप्ताह का रिकॉर्ड इस प्रकार है :

माप (cm में)	90	95	100	105	110	**योग**
बेची गई कमीज़ों की संख्या	8	22	32	37	6	**105**

यदि वह बेची गई कमीज़ों की संख्या का माध्य ज्ञात करे, तो क्या आप सोचते हैं कि वह यह निर्णय ले पाएगा कि किस माप की कमीज़ें स्टॉक (stock) में रखी जाएँ?

$$\text{बेची गई कमीज़ों का माध्य} = \frac{\text{बेची गई कमीज़ों की कुल संख्या}}{\text{कमीज़ों के विभिन्न मापों के प्रकार}} = \frac{105}{5} = 21$$

क्या वह प्रत्येक माप की 21 कमीज़ें स्टॉक में रखे? यदि वह ऐसा करता है, तो क्या वह अपने ग्राहकों की आवश्यकताओं को पूरा कर पाएगा?

उपरोक्त रिकॉर्ड को देखकर, दुकानदार 95 cm, 100 cm और 105 cm मापों की कमीज़ों को मँगवाने का निर्णय लेता है। वह अन्य मापों की कमीज़ों को मँगवाने का निर्णय, उनके कम खरीददारों को देखते हुए, आगे के लिए टाल देता है।

एक अन्य उदाहरण देखिए :

रेडीमेड (readymade) कपड़ों का एक दुकानदार कहता है, 'मेरे द्वारा सबसे अधिक माप की बेची गई कमीज़ का माप 90 cm है।'

ध्यान दीजिए कि यहाँ भी दुकानदार की रुचि विभिन्न मापों की बेची गई कमीज़ों की संख्याओं में ही है। वह कमीज़ के उस माप को देख रहा है, जो सबसे अधिक बिकती है। यह आँकड़ों का एक अन्य **प्रतिनिधि मान** है। सबसे अधिक बिक्री 105 cm माप की कमीज़ों की बिक्री है। यह प्रतिनिधि मान (105) आँकड़ों का **बहुलक (mode)** कहलाता है।

दिए हुए प्रेक्षणों के एक समूह में, सबसे अधिक बार आने वाला प्रेक्षण इस समूह का बहुलक कहलाता है।

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित के बहुलक ज्ञात कीजिए :

(i) 2, 6, 5, 3, 0, 3, 4, 3, 2, 4, 5, 2, 4,

(ii) 2, 14, 16, 12, 14, 14, 16, 14, 10, 14, 18, 14

उदाहरण 4 निम्नलिखित संख्याओं का बहुलक ज्ञात कीजिए:

1, 1, 2, 4, 3, 2, 1, 2, 2, 4

हल समान मान वाली संख्याओं को एक साथ व्यवस्थित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 4

इन आँकड़ों का बहुलक 2 है, क्योंकि यह अन्य प्रेक्षणों की तुलना में अधिक बार आता है।

3.6.1 बड़े आँकड़ों का बहुलक

यदि प्रेक्षणों की संख्या बड़ी हो, तो उनको समान मान वाले प्रेक्षणों के रूप में व्यवस्थित करना और फिर उनको गिनना इतना सरल नहीं होता है। ऐसी स्थितियों में, हम आँकड़ों को सारणीबद्ध करते हैं, जैसा कि आप पिछली कक्षा में कर चुके हैं, आँकड़ों की सारणी बनाने का कार्य मिलान चिह्नों (tally marks) से प्रारंभ करते हुए, प्रेक्षणों की बारंबारताएँ (frequencies) बना कर पूरा किया जा सकता है।

निम्न उदाहरणों को देखिए :

उदाहरण 5 टीमों के एक समूह में खेले गए फुटबॉल के मैचों में, जीतने के अंतर गोलों में (in goals) निम्नलिखित हैं :

1, 3, 2, 5, 1, 4, 6, 2, 5, 2, 2, 2, 4, 1, 2, 3, 1, 1, 2, 3, 2,
6, 4, 3, 2, 1, 1, 4, 2, 1, 5, 3, 3, 2, 3, 2, 4, 2, 1, 2

इन आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

हल आइए इन आँकड़ों को एक सारणी के रूप में रखें :

जीतने का अंतर	मिलान चिह्न	मैचों की संख्या
1	~~||||~~ ||||	9
2	~~||||~~ ~~||||~~ ||||	14
3	~~||||~~ ||	7
4	~~||||~~	5
5	|||	3
6	||	2
	योग	**40**

इस सारणी को देखकर, हम तुरंत यह कह सकते हैं कि '2' बहुलक है, क्योंकि 2 सबसे अधिक बार आया है। इस प्रकार, अधिकांश मैच 2 गोलों के अंतर से जीते गए हैं।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

क्या संख्याओं के एक समूह में दो बहुलक हो सकते हैं?

उदाहरण 6 निम्नलिखित संख्याओं का बहुलक ज्ञात कीजिए: 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 8

हल यहाँ 2 और 5 दोनों ही तीन बार आए हैं। अत:, ये दोनों ही आँकड़ों के बहुलक हैं।

इन्हें कीजिए

1. अपनी कक्षा के साथियों की वर्षों में आयु रिकॉर्ड कीजिए और फिर उनका बहुलक ज्ञात कीजिए।
2. अपनी कक्षा के साथियों की cm में लंबाइयाँ रिकॉर्ड कीजिए और उनका बहुलक ज्ञात कीजिए।

प्रयास कीजिए

1. निम्नलिखित आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए:
   12, 14, 12, 16, 15, 13, 14, 18, 19, 12, 14, 15, 16, 15, 16, 16, 15,
   17, 13, 16, 16, 15, 15, 13, 15, 17, 15, 14, 15, 13, 15, 14
2. 25 बच्चों की ऊँचाइयाँ (cm में) नीचे दी गई हैं :
   168, 165, 163, 160, 163, 161, 162, 164, 163, 162, 164, 163, 160, 163, 160, 165, 163, 162, 163, 164, 163, 160, 165, 163, 162
   उनकी लंबाइयों का बहुलक क्या है? यहाँ बहुलक से हम क्या समझते हैं?

जहाँ माध्य हमें आँकड़ों के सभी प्रेक्षणों का औसत प्रदान करता है, वहीं बहुलक आँकड़ों में सबसे अधिक बार आने वाले प्रेक्षण को दर्शाता है।

आइए निम्नलिखित उदाहरणों पर विचार करें :

(a) आपको एक दावत में बुलाए गए 25 व्यक्तियों के लिए आवश्यक चपातियों की संख्या के बारे में निर्णय लेना है।

(b) कमीज़ें बेचने वाले एक दुकानदार को अपने स्टॉक की आपूर्ति करनी है।

(c) हमें अपने घर के लिए आवश्यक दरवाज़े की ऊँचाई ज्ञात करनी है।

(d) एक पिकनिक (picnic) पर जाते समय, अगर प्रत्येक व्यक्ति के लिए केवल एक ही फल खरीदा जाना है, तब, हमें कौन-सा फल मिलेगा?

इन स्थितियों में हम किसमें बहुलक का एक अच्छे आकलन के रूप में प्रयोग कर सकते हैं?

पहले कथन पर विचार कीजिए। मान लीजिए प्रत्येक व्यक्ति के लिए आवश्यक चपातियों की संख्या इस प्रकार है : 2, 3, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 2, 2, 4, 2, 2, 3, 2, 4, 4, 2, 3, 2, 4, 2, 4, 3, 5

इन आँकड़ों का बहुलक 2 चपाती है। यदि हम बहुलक को आँकड़ों के प्रतिनिधि मान के रूप में प्रयोग करें, तो हमें प्रति व्यक्ति 2 चपातियों की दर से 25 व्यक्तियों के लिए केवल 50

चपातियों की आवश्यकता होगी। परंतु निश्चय ही यह चपातियाँ सभी व्यक्तियों को अपर्याप्त होंगी। इस स्थिति में क्या **माध्य** एक उपयुक्त प्रतिनिधि मान होगा?

तीसरे कथन के लिए, दरवाज़े की ऊँचाई, उन व्यक्तियों की ऊँचाई से संबंधित है जो उस दरवाज़े का प्रयोग करेंगे। मान लीजिए कि घर में 5 बच्चे और 4 वयस्क हैं जो उस दरवाज़े का प्रयोग करते हैं तथा 5 बच्चों में से प्रत्येक की ऊँचाई 135 cm के आसपास है। ऊँचाइयों का बहुलक 135 cm है। क्या हमें एक ऐसा दरवाज़ा लेना चाहिए जिसकी ऊँचाई 144 cm है? क्या सभी वयस्क इस दरवाज़े में से निकल पाएँगे? यह स्पष्ट है कि इन आँकड़ों के लिए भी बहुलक एक उपयुक्त प्रतिनिधि मान नहीं है। क्या यहाँ **माध्य** एक उपयुक्त प्रतिनिधि मान होगा?

क्यों नहीं? दरवाज़े की ऊँचाई के बारे में निर्णय लेने के लिए, ऊँचाई के किस प्रतिनिधि मान का प्रयोग किया जाए?

इसी प्रकार, शेष कथनों का विश्लेषण कीजिए तथा इन स्थितियों के लिए उपयुक्त प्रतिनिधि मान ज्ञात कीजिए।

प्रयास कीजिए

अपने मित्रों से चर्चा कीजिए और

(a) दो स्थितियाँ दीजिए, जहाँ प्रतिनिधि मान के रूप में माध्य का प्रयोग उपयुक्त होगा।

(b) दो स्थितियाँ दीजिए, जहाँ प्रतिनिधि मान के रूप में बहुलक का प्रयोग उपयुक्त होगा।

3.7 माध्यक

हम देख चुके हैं कि कुछ स्थितियों में अंकगणितीय माध्य एक उपयुक्त केंद्रीय प्रवृत्ति का मापक है तथा कुछ स्थितियों में बहुलक एक उपयुक्त केंद्रीय प्रवृत्ति का मापक है।

आइए अब एक अन्य उदाहरण देखें। 17 विद्यार्थियों के एक समूह पर विचार कीजिए, जिनकी ऊँचाई cm में निम्नलिखित हैं :

106, 110, 123, 125, 117, 120, 112, 115, 110, 120, 115, 102, 115, 115, 109, 115, 101.

खेल की अध्यापिका कक्षा को ऐसे दो समूहों में इस तरह विभाजित करना चाहती है कि प्रत्येक समूह में विद्यार्थियों की संख्या बराबर हो तथा एक समूह में विद्यार्थियों की ऊँचाइयाँ एक विशेष ऊँचाई से कम हों और दूसरे समूह में विद्यार्थियों की ऊँचाइयाँ उस विशेष ऊँचाई से अधिक हों। वह ऐसा किस प्रकार करेगी?

आइए उसके पास जो विभिन्न विकल्प हैं, उन्हें देखें :

(i) वह माध्य ज्ञात कर सकती है। यह माध्य है :

$$\frac{106+110+123+125+117+120+112+115+110+120+115+102+115+115+109+115+101}{17}$$

$$=\frac{1930}{17}=113.5$$

अत:, अध्यापिका कक्षा के विद्यार्थियों को यदि ऐसे दो समूहों में विभाजित करती है, जिनमें से एक समूह में माध्य ऊँचाई से कम ऊँचाई वाले विद्यार्थी हैं और दूसरे समूह में माध्य ऊँचाई से अधिक ऊँचाई वाले विद्यार्थी हैं। तब, इन समूहों में विद्यार्थियों की संख्याएँ बराबर नहीं रहती हैं क्योंकि एक समूह में 7 सदस्य होंगे तथा दूसरे समूह में 10 सदस्य होंगे।

(ii) उसके पास दूसरा विकल्प है कि वह बहुलक ज्ञात करे। सबसे अधिक बारंबारताओं वाला प्रेक्षण 115 cm है और इसे बहुलक लिया जाएगा।

बहुलक से नीचे वाले 7 विद्यार्थी हैं तथा 10 विद्यार्थी बहुलक के बराबर या उससे ऊपर हैं। अत:, हम कक्षा के विद्यार्थियों को दो बराबर समूहों में विभाजित नहीं कर सकते।

इसलिए, आइए अब हम एक अन्य वैकल्पिक प्रतिनिधि मान या केंद्रीय प्रवृत्ति के मापक के बारे में सोचें। ऐसा करने के लिए, हम पुन: दी हुई ऊँचाइयों (cm में) को देखते हैं और इन्हें आरोही क्रम में व्यवस्थित करते हैं। हम निम्नलिखित प्रेक्षण प्राप्त करते हैं :

101, 102, 106, 109, 110, 110, 112, 115, 115, 115, 115, 115, 117, 120, 120, 123, 125

इन आँकड़ों में मध्य मान (middle value) 115 है, क्योंकि यह विद्यार्थियों को दो बराबर समूहों में विभाजित करता है जिनमें से प्रत्येक में 8 विद्यार्थी हैं। यह मान आँकड़ों का **माध्यक (median)** कहलाता है। माध्यक उस मान को बताता है, जो आँकड़ों के मध्य में स्थित होता है (उनको आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर) तथा आधे प्रेक्षण इससे अधिक मान वाले होते हैं और आधे प्रेक्षण इससे कम मान वाले होते हैं। खेल की अध्यापिका इस बीच वाले विद्यार्थी को इस खेल में निर्णायक (refree) बना सकती है।

यहाँ हम केवल उन स्थितियों को ही लेंगे, जहाँ प्रेक्षणों की संख्या विषम है।

प्रयास कीजिए

आपके एक मित्र ने दिए हुए आँकड़ों के माध्यक और बहुलक ज्ञात किए। उस मित्र द्वारा की गई त्रुटि, यदि कोई हो तो, बताइए और सही कीजिए:

35, 32, 35, 42, 38, 32, 34

माध्यक = 42, बहुलक = 32

इस प्रकार, दिए गए आँकड़ों को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करने के बाद उनका बीचों-बीच (मध्य) वाला मान उनका **माध्यक** होता है।

ध्यान दीजिए कि सामान्यत:, हमें माध्यक और बहुलक के लिए एक ही मान नहीं मिलेगा।

आइए कुछ उदाहरणों को देखें।

उदाहरण 7 निम्नलिखित आँकड़ों का माध्यक ज्ञात कीजिए :

24, 36, 46, 17, 18, 25, 35

हल आँकड़ों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

17, 18, 24, 25, 35, 36, 46

मध्य (बीच) वाला प्रेक्षण माध्यक होता है। अत:, माध्यक 25 है।

प्रश्नावली 3.2

1. गणित की एक परीक्षा में, 15 विद्यार्थियों द्वारा (25 में से) प्राप्त किए गए अंक निम्नलिखित हैं:

19, 25, 23, 20, 9, 20, 15, 10, 5, 16, 25, 20, 24, 12, 20

इन आँकड़ों के बहुलक और माध्यक ज्ञात कीजिए। क्या ये समान हैं?

2. एक क्रिकेट मैच में खिलाड़ियों द्वारा बनाए गए रन इस प्रकार हैं :

   6, 15, 120, 50, 100, 80, 10, 15, 8, 10, 15

   इन आँकड़ों के माध्य, बहुलक और माध्यक ज्ञात कीजिए। क्या ये तीनों समान हैं?
3. एक कक्षा के 15 विद्यार्थियों के भार (kg में) इस प्रकार हैं :

   38, 42, 35, 37, 45, 50, 32, 43, 43, 40, 36, 38, 43, 38, 47

   (i) इन आँकड़ों के बहुलक और माध्यक ज्ञात कीजिए।

   (ii) क्या इनके एक से अधिक बहुलक हैं?
4. निम्नलिखित आँकड़ों के बहुलक और माध्यक ज्ञात कीजिए :

   13, 16, 12, 14, 19, 12, 14, 13, 14
5. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य है अथवा असत्य :

   (i) बहुलक आँकड़ों में से सदैव एक संख्या होता है।

   (ii) माध्य दिए हुए आँकड़ों में से एक संख्या हो सकता है।

   (iii) माध्यक आँकड़ों में से सदैव एक संख्या होता है।

   (iv) आँकड़ों 6, 4, 3, 8, 9, 12, 13, 9 का माध्य 9 है।

3.8 भिन्न उद्देश्य के साथ दंड आलेखों का प्रयोग

पिछले वर्ष हम देख चुके हैं कि किस प्रकार एकत्रित (संग्रहित) की गई सूचनाओं को एक बारंबारता बंटन सारणी (frequency distribution table) के रूप में पहले व्यवस्थित करके और फिर इन सूचनाओं को चित्रीय रूप में चित्रालेखों (pictographs) या दंड आलेखों (bargraphs) के रूप में निरूपित किया जाता है। आप इन दंड आलेखों को देख सकते हैं और इनके बारे में निष्कर्ष निकाल सकते हैं। आप इन दंड आलेखों के आधार पर सूचनाएँ भी प्राप्त कर सकते हैं। उदाहरणार्थ, आप कह सकते हैं कि सबसे लंबा दंड (bar) ही बहुलक है, यदि दंड बारंबारता निरूपित करता है।

3.8.1 एक स्केल (या मापदंड) का चुनना

हम जानते हैं कि दंड आलेख समान चौड़ाई के दंडों द्वारा संख्याओं (आँकड़ों) का निरूपण है तथा दंडों की लंबाइयाँ बारंबारताओं और चुने गए स्केल (scale) पर निर्भर करती हैं। उदाहरणार्थ, एक दंड आलेख में, जहाँ संख्याओं को इकाइयों में दर्शाना है, आलेख एक प्रेक्षण के लिए एक इकाई लंबाई निरूपित करता है और यदि उसे संख्याओं को दहाई या सैकड़ों में दर्शाना है, तो एक इकाई लंबाई 10 या 100 प्रेक्षणों को निरूपित कर सकती है। निम्नलिखित उदाहरणों पर विचार कीजिए:

उदाहरण 8 छठी और सातवीं कक्षाओं के 200 विद्यार्थियों से उनके मनपसंद रंग का नाम बताने के लिए कहा गया, ताकि यह निर्णय लिया जा सके कि उनके स्कूल के भवन का क्या रंग रखा जाए। इसके परिणाम निम्नलिखित सारणी में दर्शाए गए हैं। इन आँकड़ों को एक दंड आलेख द्वारा निरूपित कीजिए।

मनपसंद रंग	लाल	हरा	नीला	पीला	नारंगी
विद्यार्थियों की संख्या	43	19	55	49	34

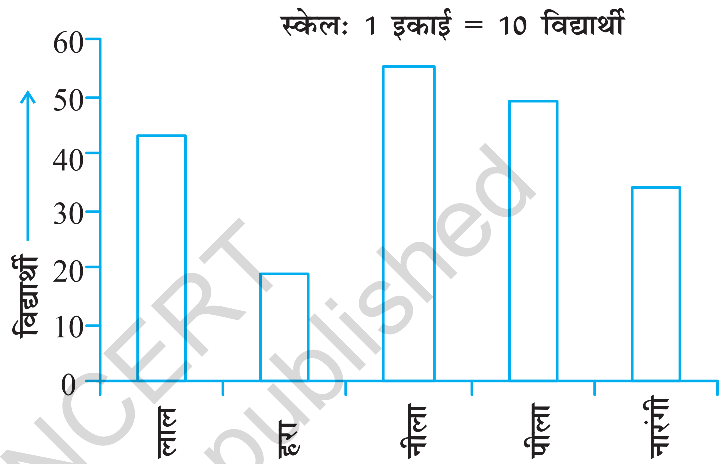
इस दंड आलेख की सहायता से निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(i) कौन-सा रंग सबसे अधिक पसंद किया जाता है और कौन-सा रंग सबसे कम पसंद किया जाता है?

(ii) कुल कितने रंग हैं? वे क्या हैं?

हल एक उपयुक्त पैमाना नीचे दर्शाए अनुसार चुनिए :

स्केल को 0 से प्रारंभ कीजिए। आँकड़ों में सबसे बड़ा मान 55 है। अत:, स्केल को 55 से कुछ अधिक, मान लीजिए 60 पर समाप्त करते हैं। अक्ष पर समान विभाजनों (divisions) का प्रयोग कीजिए, जैसे कि 10 की वृद्धियाँ। आप जानते हैं कि सभी दंड (bars) 0 और 60 के बीच स्थित होंगे। हम स्केल को इस प्रकार चुनेंगे, ताकि 0 और 60 के बीच की लंबाई न तो अधिक छोटी हो और न ही अधिक बड़ी हो। यहाँ, हम 1 इकाई = 10 विद्यार्थी लेते हैं।



फिर हम आकृति में दर्शाए अनुसार, दंड आलेख को खींचते और नामांकित करते हैं।

दंड आलेख से हम निष्कर्ष निकालते हैं कि

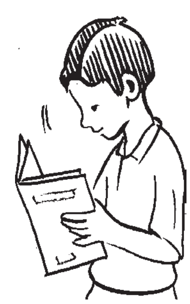
(i) नीला रंग सबसे मनपसंद रंग है (क्योंकि नीले रंग को निरूपित करने वाला दंड सबसे लंबा है)

(ii) हरा रंग सबसे कम मनपसंद रंग है (क्योंकि हरे रंग को निरूपित करने वाला दंड सबसे छोटा है)।

(iii) यहाँ पांच रंग हैं। ये हैं लाल, हरा, नीला, पीला और नारंगी (ये क्षैतिज अक्ष पर देखे जा सकते हैं)।

उदाहरण 9 निम्नलिखित आँकड़े किसी कक्षा के छ: विद्यार्थियों द्वारा (600 में से) प्राप्त किए गए कुल अंकों को दर्शाते हैं। इन्हें एक दंड आलेख द्वारा निरूपित कीजिए।

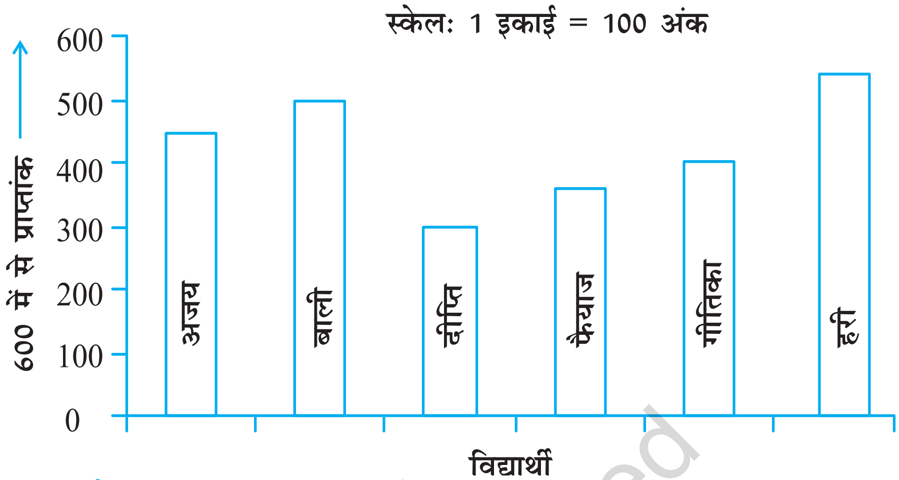
विद्यार्थी	अजय	बाली	दीप्ति	फैयाज	गीतिका	हरी
प्राप्तांक	450	500	300	360	400	540



हल

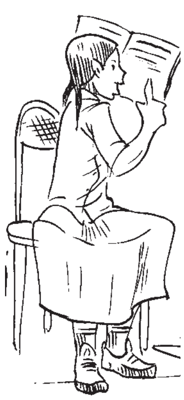
1. एक उपयुक्त स्केल चुनने के लिए, हम 100 की वृद्धियाँ लेते हुए, समान विभाजन अक्ष पर अंकित करते हैं। इस प्रकार, 1 इकाई 100 अंक निरूपित करेगी। (यदि हम 1 इकाई से 10 अंकों को निरूपित करें, तो क्या कठिनाई होगी?)

2. अब आँकड़ों को दंड आलेख द्वारा निरूपित कीजिए।



दोहरे दंड आलेख खींचना

आँकड़ों के निम्नलिखित दो समूहों पर विचार कीजिए, जो दो नगरों, आबेरदीन और मारगेट में, वर्ष के सभी बारह महीनों के लिए, धूप रहने के औसत दैनिक घंटों को दर्शाते हैं। ये नगर दक्षिणी ध्रुव के निकट स्थित हैं और इसीलिए यहाँ प्रतिदिन धूप बहुत कम घंटों के लिए रहती है।



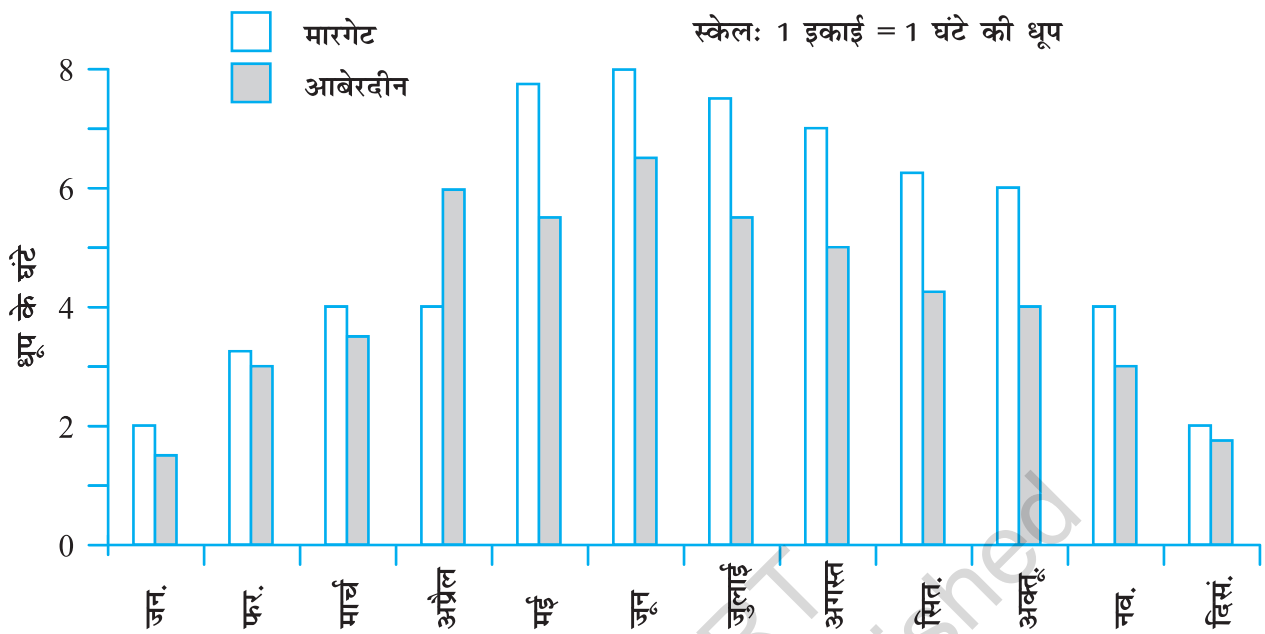
मारगेट में												
	जन.	फर.	मार्च.	अप्रैल	मई	जून	जुलाई	अग.	सितं.	अक्तू.	नव.	दिसं.
धूप के औसत घंटे	2	$3\frac{1}{4}$	4	4	$7\frac{3}{4}$	8	$7\frac{1}{2}$	7	$6\frac{1}{4}$	6	4	2
आबेरदीन में												
धूप के औसत घंटे	$1\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$	6	$5\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{2}$	5	$4\frac{1}{2}$	4	3	$1\frac{3}{4}$

इनके अलग-अलग दंड आलेख खींच कर आप निम्नलिखित प्रकार के प्रश्नों के उत्तर दे सकते हैं:

(i) प्रत्येक नगर में, किस महीने में अधिकतम धूप रहती है? या

(ii) प्रत्येक नगर में, किस महीने में न्यूनतम धूप रहती है?

परंतु 'एक विशेष महीने में, किस नगर में धूप अधिक घंटों तक रहती है?' जैसे प्रश्नों के उत्तर देने के लिए, हमें दोनों नगरों के औसत धूप के घंटों की तुलना करने की आवश्यकता होगी। इसके लिए हम उन आलेखों को खींचना सीखेंगे, जिन्हें दोहरे दंड आलेख (double bar graphs) कहा जाता है। इनमें दोनों नगरों की सूचना दंड आलेखों द्वारा साथ-साथ दी हुई होती हैं।



आकृति 3.1

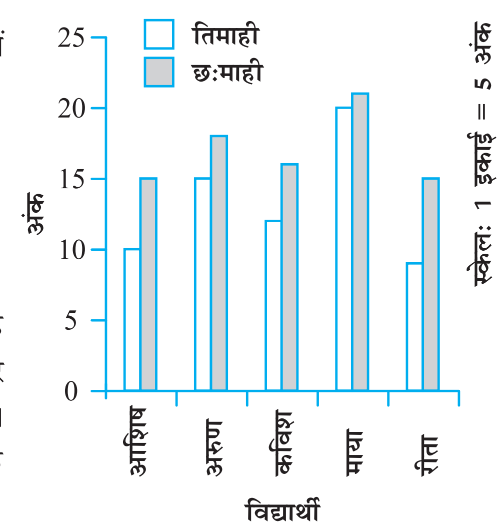
उपरोक्त दंड आलेख (आकृति 3.1) दोनों नगरों के औसत धूप के समय को दर्शाता है। इसमें प्रत्येक महीने के लिए, हमारे पास दो दंड हैं, जिनकी ऊँचाइयाँ प्रत्येक नगर के औसत धूप के घंटों को दर्शाती हैं। इससे हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि अप्रैल के महीने को छोड़कर, अन्य सभी महीनों में मारगेट में आबेरदीन की अपेक्षा धूप सदैव अधिक रहती है। आप इसी प्रकार का दंड आलेख अपने क्षेत्र या नगर के लिए भी बना सकते हैं।

आइए एक और उदाहरण लें, जो हम से अधिक संबंधित है।

उदाहरण 10 गणित की अध्यापिका यह जानना चाहती है कि तिमाही परीक्षा के बाद, उसके द्वारा पढ़ाई में अपनाई गई नई तकनीक का कोई प्रभाव पड़ा या नहीं। वह सबसे कमजोर 5 बच्चों द्वारा तिमाही परीक्षा (25 में से) और छ:माही परीक्षा (25 में से) में प्राप्त किए अंकों को लेती है, जो इस प्रकार हैं :

विद्यार्थी	आशिष	अरुण	कविश	माया	रीता
तिमाही	10	15	12	20	9
छ:माही	15	18	16	21	15

हल पहले वह संलग्न आकृति में दर्शाए अनुसार एक दोहरा दंड आलेख (double bar graph) खींचती है। दंडों को देख कर लगता है कि विद्यार्थियों के प्रदर्शन में बहुत सुधार हुआ है। अत:, वह निर्णय लेती है कि उसे अपनी नई शिक्षण तकनीक जारी रखनी चाहिए।



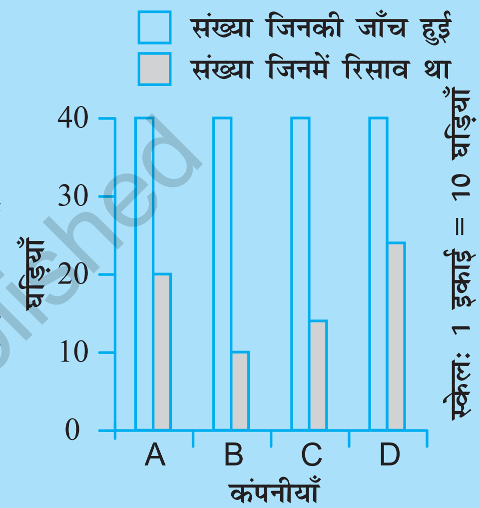
क्या आप कुछ अन्य स्थितियों के बारे में सोचते हैं, जहाँ आप दोहरे दंड आलेखों का प्रयोग कर सकते हैं?

प्रयास कीजिए

1. दिया हुआ दंड आलेख (आकृति 3.2), विभिन्न कंपनियों द्वारा बनाई गई जल प्रतिरोधी (Water resistant) घड़ियों की जाँच के लिए किए गए एक सर्वेक्षण को दर्शाता है। इनमें से प्रत्येक कंपनी ने यह दावा किया कि उनकी घड़ियाँ जल प्रतिरोधी हैं। एक जाँच के बाद उपरोक्त परिणाम प्राप्त हुए हैं।

(a) क्या आप प्रत्येक कंपनी के लिए, रिसाव (Leak) वाली घड़ियों की संख्या की, जाँच की गई कुल घड़ियों की संख्या से भिन्न बना सकते हैं?

(b) इसके आधार पर आप क्या बता सकते हैं कि किस कंपनी की घड़ियाँ बेहतर हैं?



आकृति 3.2

2. वर्षों 1995, 1996, 1997 और 1998 में, अंग्रेज़ी और हिंदी की पुस्तकों की बिक्री नीचे दी गई हैं :

	1995	**1996**	**1997**	**1998**
अंग्रेज़ी	350	400	450	620
हिंदी	500	525	600	650

एक दोहरा दंड आलेख खींचिए और निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(a) किस वर्ष में दोनों भाषाओं की पुस्तकों की बिक्री का अंतर न्यूनतम था?

(b) क्या आप कह सकते हैं कि अंग्रेज़ी की पुस्तकों की माँग में तेज़ी से वृद्धि हुई है? इसका औचित्य समझाइए।

प्रश्नावली 3.3

1. निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर देने के लिए, आकृति 3.3 में दिए दंड आलेख का प्रयोग कीजिए :

(a) कौन-सा पालतू पशु अधिक लोकप्रिय है?

(b) कितने विद्यार्थियों का पालतू पशु कुत्ता है?

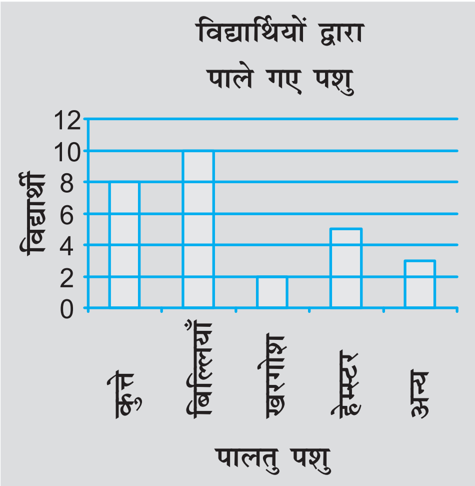
2. निम्नलिखित दंड आलेख को पढ़िए जो एक पुस्तक भंडार द्वारा 5 क्रमागत वर्षों में बेची गई पुस्तकों की संख्या दर्शाती है, और आगे आने वाले प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।

(i) वर्षों 1989, 1990 और 1992 में से प्रत्येक में लगभग कितनी पुस्तकें बेची गईं?

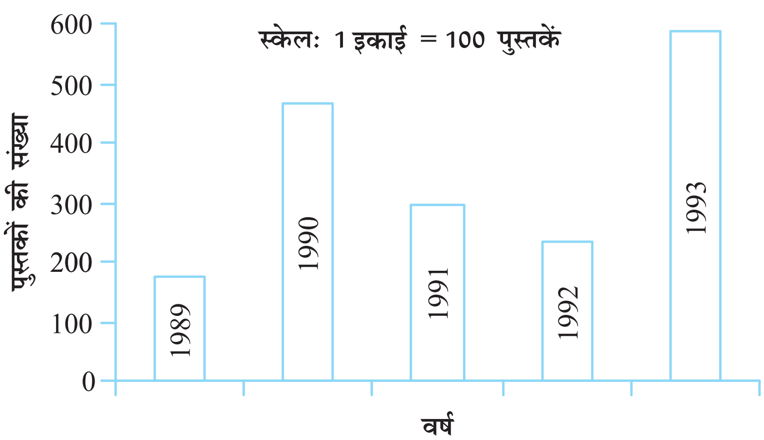
(ii) किस वर्ष में लगभग 475 पुस्तकें बेची गईं? किस वर्ष में लगभग 225 पुस्तकें बेची गईं?

(iii) किन वर्षों में 250 से कम पुस्तकें बेची गईं?

(iv) क्या आप स्पष्ट कर सकते हैं कि आप वर्ष 1989 में बेची गई पुस्तकों का आकलन किस प्रकार करेंगे?



आकृति 3.3



आकृति 3.4

3. छः विभिन्न कक्षाओं के विद्यार्थियों की संख्याएँ नीचे दी गई हैं। इन आँकड़ों को एक दंड आलेख द्वारा निरूपित कीजिए:

कक्षा	पाँचवीं	छठी	सातवीं	आठवीं	नौवीं	दसवीं
विद्यार्थियों की संख्या	135	120	95	100	90	80

(a) आप स्केल किस प्रकार चुनेंगे?

(b) निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(i) किस कक्षा में विद्यार्थियों की संख्या अधिकतम है? किस कक्षा में न्यूनतम है?

(ii) कक्षा 6 के विद्यार्थियों की संख्या का कक्षा 8 के विद्यार्थियों की संख्या से अनुपात ज्ञात कीजिए।

4. एक विद्यार्थी के प्रथम सत्र और द्वितीय सत्र का प्रदर्शन दिया हुआ है। एक उपयुक्त स्केल चुनकर एक दोहरा दंड आलेख खींचिए और दिए गए प्रश्नों के उत्तर दीजिए:

विषय	अंग्रेज़ी	हिन्दी	गणित	विज्ञान	सामाजिक विज्ञान
प्रथम सत्र (अधिकतम अंक 100)	67	72	88	81	73
द्वितीय सत्र (अधिकतम अंक 100)	70	65	95	85	75

(i) किस विषय में विद्यार्थी ने अपने प्रदर्शन में सबसे अधिक सुधार किया है?

(ii) किस विषय में सुधार सबसे कम है?

(iii) क्या किसी विषय में प्रदर्शन नीचे गिरा है?

5. किसी कॉलोनी में किए गए सर्वेक्षण से प्राप्त निम्नलिखित आँकड़ों पर विचार कीजिए :

पसंदीदा खेल	क्रिकेट	बॉस्केट बॉल	तैरना	हॉकी	खेलकूद
देखना	1240	470	510	430	250
भाग लेना	620	320	320	250	105

(i) एक उपयुक्त स्केल चुनकर, एक दोहरा दंड आलेख खींचिए।
इस दंड आलेख से आप क्या निष्कर्ष निकालते हैं?

(ii) कौन-सा खेल अधिक लोकप्रिय हैं?

(iii) खेलों को देखना अधिक पसंद किया जाता है या उनमें भाग लेना?

6. इस अध्याय के प्रारंभ में, दिए हुए विभिन्न नगरों के न्यूनतम और अधिकतम तापमानों के आँकड़ों (सारणी 3.1) को लीजिए। इन आँकड़ों का एक दोहरा दंड आलेख खींच कर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(i) दी हुई तिथि पर किस नगर के न्यूनतम और अधिकतम तापमान का अंतर सबसे अधिक है?

(ii) कौन-सा नगर सबसे गर्म है और कौन-सा नगर सबसे ठंडा है।

(iii) ऐसे दो नगरों के नाम लिखिए, जिनमें से एक का अधिकतम तापमान दूसरे के न्यूनतम तापमान से कम था।

(iv) उस नगर का नाम लिखिए, जिसके न्यूनतम और अधिकतम तापमानों का अंतर सबसे कम है।

3.9 संयोग और प्रायिकता

ये शब्द प्राय: हमारे जीवन में देखने में आते हैं। हम प्राय: कहते हैं, 'आज वर्षा होने की संभावना (या संयोग) नहीं है' तथा यह भी कहते हैं कि 'यह बहुत कुछ संभव है कि भारत विश्व कप जीतेगा।' आइए इन शब्दों को कुछ अधिक समझने का प्रयत्न करें। निम्नलिखित कथनों पर विचार कीजिए :

(i) सूर्य पश्चिम से निकलता है।

(ii) एक चींटी की ऊँचाई 3 m हो जाती है।

(iii) यदि आप एक बड़े आयतन वाला घन लेंगे, तो उसकी भुजा भी बड़ी होगी।

(iv) यदि आप बड़े क्षेत्रफल का एक वृत्त लेंगे, तो उस वृत्त की त्रिज्या भी बड़ी होगी।

(v) भारत अगली टेस्ट शृंखला जीतेगा।

2 प्रयास कीजिए

कुछ स्थितियों के बारे में सोचिए, जिनमें कम से कम तीन ऐसी हों जिनका घटित होना निश्चित हो, कुछ ऐसी जिनका घटित होना असंभव हो तथा कुछ ऐसी जो हो भी सकती हों और न भी हो सकती हों, अर्थात् जिनके होने का कुछ संयोग (chance) या संभावना हो।

यदि आप उपरोक्त कथनों को देखेंगे, तो आप कहेंगे कि पश्चिम से सूर्य का निकलना असंभव (impossible) है, एक चींटी की ऊँचाई 3 m होना भी संभव नहीं है। इसके विपरीत, यदि वृत्त बड़े क्षेत्रफल का है, तो उसकी त्रिज्या बड़ी होना निश्चित (certain) है। यही बात आप घन के बड़े आयतन और उसकी भुजा के बारे में कह सकते हैं। दूसरी ओर, भारत अगली टेस्ट शृंखला जीत भी सकता है और हार भी सकता है। दोनों ही संभव है।

3.9.1 संयोग

यदि आप एक सिक्के को उछालें, तो क्या आप सदैव इसकी सही प्रागुक्ति (prediction) कर सकते हैं कि क्या प्राप्त होगा? प्रत्येक बार सिक्के को उछालकर उससे प्राप्त होने वाले परिणाम की प्रागुक्ति कीजिए। अपने प्रेक्षण निम्नलिखित सारणी के रूप में लिखिए :

उछाल संख्या	प्रागुक्ति	परिणाम

ऐसा 10 बार करिए। प्राप्त परिणामों (outcomes) को देखिए। क्या आप इनमें कोई पैटर्न देखते हैं? प्रत्येक उछाल के बाद आपको क्या प्राप्त होता है? क्या आपको सदैव चित (head) ही प्राप्त होता है? इन प्रेक्षणों को 10 और उछालों के लिए दोहराइए और प्रेक्षणों को सारणी में लिखिए।

आप देखेंगे कि ये प्रेक्षण कोई स्पष्ट प्रतिरूप (pattern) नहीं दर्शाते हैं। नीचे दी गई सारणी में, हम सुशीला और सलमा द्वारा 25 उछालों से प्राप्त प्रेक्षणों को दे रहे हैं। यहाँ, H चित को निरूपित करता है तथा T पट (tail) को निरूपित करता है।

उछाल संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
परिणाम	H	T	T	H	T	T	T	H	T	T	H	H	H	H	H
उछाल संख्या	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25					
परिणाम	T	T	H	T	T	T	T	T	T	T					

ये आँकड़े आपको क्या बताते हैं? क्या आप चित और पट के लिए कोई प्रागुक्तीय प्रतिरूप (predictable pattern) ज्ञात कर सकते हैं? स्पष्ट है, यहाँ चित और पट के आने का कोई निश्चित प्रतिरूप नहीं है। जब आप प्रत्येक बार सिक्के को उछालते हैं, तो प्रत्येक उछाल का परिणाम चित या पट में से कोई भी एक हो सकता है। यह संयोग (chance) की बात है कि एक विशेष उछाल में आपको इनमें से कोई एक प्राप्त हो।

उपरोक्त आँकड़ों में प्राप्त किए गए चितों की संख्या और पटों की संख्या गिनिए। सिक्के को कई बार उछालिए और रिकॉर्ड करते जाइए कि आपको क्या प्राप्त हो रहा है। यह ज्ञात कीजिए कि आपको कितनी बार चित प्राप्त हुआ और कितनी बार पट प्राप्त हुआ।

आपने एक पासे (die) के साथ भी अवश्य खेला होगा। एक पासे में छः फलक (faces) होते हैं। जब आप एक पासे को फेंकते हैं, तो क्या आप प्राप्त होने वाली संख्या की प्रागुक्ति कर सकते हैं?

लूडो (Ludo) या 'साँप और सीढ़ी' का खेल खेलते समय, आपने यह कामना अवश्य की होगी कि एक विशेष फेंक में एक विशेष संख्या परिणाम के रूप में प्राप्त हो।

क्या पासा सदैव आपकी कामनाओं के अनुसार कार्य करता है? एक पासा लीजिए, उसे 150 बार फेंकिए तथा प्राप्त परिणामों को निम्नलिखित सारणी में भरिए :

पासे की लिखित संख्या	मिलान चिह्न	संख्या कितनी बार प्राप्त हुई
1		
2		

प्रत्येक बार परिणाम प्राप्त होने पर, उपयुक्त संख्या के सम्मुख एक मिलान चिह्न (tally mark) लगाइए। उदाहरणार्थ, पहली फेंक (throw) में 5 आने पर 5 के सम्मुख एक मिलान चिह्न लगाइए। अगली बार आपको संख्या 1 प्राप्त होती है। तब, 1 के सम्मुख एक मिलान चिह्न लगाइए। उपयुक्त

संख्याओं के लिए मिलान चिह्न लगाते रहिए। इस प्रक्रिया को 150 बार करिए तथा 150 बार फेंकों के लिए, प्रत्येक परिणाम की कुल संख्या ज्ञात कीजिए।

उपरोक्त आँकड़ों से एक दंड आलेख बनाइए, जिसमें यह दर्शाया गया हो कि परिणाम 1, 2, 3, 4, 5 और 6 कितनी बार आए हैं।

प्रयास कीजिए

(इसे समूह में कीजिए)

1. एक सिक्के को 100 बार उछालिए और ज्ञात कीजिए कि चित कितनी बार आया है तथा पट कितनी बार आया है।
2. आफताब ने एक पासे को 250 बार फेंका और निम्नलिखित सारणी प्राप्त की:

पासे पर संख्या	मिलान चिह्न
1	卌 卌 卌 卌 卌 卌 |||
2	卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌
3	卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 ||
4	卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 ||
5	卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 |||
6	卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌 卌

इन आँकड़ों के लिए एक दंड आलेख खींचिए।

3. एक पासे को 100 बार फेंकिए तथा परिणामों को रिकॉर्ड कीजिए। ज्ञात कीजिए कि 1, 2, 3, 4, 5 और 6 कितनी-कितनी बार आए हैं।

प्रायिकता क्या है?

जब हम किसी सिक्के को उछालते हैं, तो हम जानते हैं कि इसके दो संभव परिणाम चित या पट हैं। साथ ही, एक पासे को फेंकने पर 6 संभव परिणाम हैं। अपने अनुभव से, हम यह भी जानते हैं कि एक सिक्के के लिए, चित या पट का प्राप्त करना एक समप्रायिक (equally likely) घटना है। हम कहते हैं कि एक चित आने की प्रायिकता (probability) $\frac{1}{2}$ है तथा एक पट आने की प्रायिकता भी $\frac{1}{2}$ है। पासे फेंकने पर 1, 2, 3, 4, 5 या 6 के आने की संभावनाएँ बराबर हैं। अर्थात् पासे के लिए 6 समप्रायिक संभव परिणाम हैं। हम कहते हैं कि 1, 2, 3, 4, 5 और 6 में से प्रत्येक के आने की प्रायिकता $(\frac{1}{6})$ है।

इसके बारे में, हम अगली कक्षाओं में अध्ययन करेंगे। परंतु अब तक जो हमने किया है, उससे स्पष्ट है कि कई संभावनाओं वाली घटना की प्रायिकता 0 और 1 के बीच में होती है। जिनके

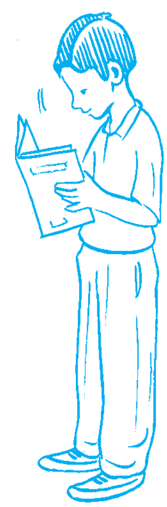
प्रयास कीजिए

ऐसी पाँच स्थितियाँ बनाइए या सोचिए, जिनमें परिणामों के संयोग बराबर न हों, अर्थात् वे समप्रायिक न हों।

घटित होने का कोई संयोग या संभावना नहीं है, उनकी प्रायिकता 0 होती है तथा जिनको निश्चित रूप से घटित होना है, उनकी प्रायिकता 1 होती है।

एक स्थिति दिए रहने पर, हमें विभिन्न संभव परिणामों को समझने तथा प्रत्येक परिणाम के संभावित संयोग के अध्ययन की आवश्यकता होती है। यह संभव है कि सिक्के और पासे की स्थिति के विपरीत ऐसे भी परिणाम हों जिनके घटित होने के संयोग बराबर न हों, अर्थात् वे समप्रायिक न हों। उदाहरणार्थ, यदि एक बर्तन में 15 लाल गेंदे हों और 9 सफ़ेद गेंदे हों और इसमें से एक गेंद बिना देखे निकाली जाती है। तब, लाल गेंद प्राप्त करने का संयोग बहुत अधिक है। क्या आप देख सकते हैं कि क्यों? लाल गेंद प्राप्त करने का संयोग सफ़ेद गेंद प्राप्त करने के संयोग का कितने गुना है? ध्यान दीजिए इन दोनों की प्रायिकताएँ 0 और 1 के बीच में हैं?

प्रश्नावली 3.4



1. बताइए कि निम्नलिखित में किसका होना निश्चित है, किसका होना असंभव है तथा कौन हो भी सकता है, परंतु निश्चित रूप से नहीं :
   (i) आज आप कल से अधिक आयु के हैं।
   (ii) एक सिक्के को उछालने पर चित आएगा।
   (iii) एक पासे को फेंकने पर 8 आएगा।
   (iv) अगली ट्रैफिक लाइट हरी दिखेगी।
   (v) कल बादल घिरे होंगे।
2. एक डिब्बे में 6 कँचे हैं, जिन पर 1 से 6 संख्याएँ अंकित हैं।
   (i) संख्या 2 वाले कँचे को इसमें से निकालने की प्रायिकता क्या है?
   (ii) संख्या 5 वाले कँचे को इसमें से निकालने की प्रायिकता क्या है?
3. यह निर्णय लेने के लिए कि कौन-सी टीम खेल प्रारंभ करेगी, एक सिक्का उछाला जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि आपकी टीम खेल प्रारंभ करेगी?

हमने क्या चर्चा की?

1. आँकड़ों के संग्रह, रिकॉर्डिंग और प्रस्तुतीकरण से हमें अपने अनुभवों को संगठित करने तथा आँकड़ों से निष्कर्ष निकालने में सहायता मिलती है।
2. आँकड़ों को इकट्ठा करने से पहले, हमें यह जान लेना चाहिए कि हम इनका उपयोग किस कार्य में करेंगे।
3. एकत्रित किए गए आँकड़ों को एक उपयुक्त सारणी के रूप में संगठित किए जाने की आवश्यकता होती है, ताकि ये सरलता से समझने के योग्य हों और इनकी व्याख्या की जा सके।

4. औसत एक ऐसी संख्या है, जो दिए हुए प्रेक्षणों के समूह (या आँकड़ों) का प्रतिनिधित्व करता है या उनकी केंद्रीय प्रवृत्ति को दर्शाता है।
5. अंकगणितीय माध्य आँकड़ों का एक प्रतिनिधि मान है।
6. बहुलक केंद्रीय प्रवृत्ति या प्रतिनिधि मान का एक अन्य रूप है। प्रेक्षणों के एक समूह का बहुलक वह प्रेक्षण है जो सबसे अधिक बार आता है।
7. माध्यक भी एक प्रकार का प्रतिनिधि मान है। यह उस मान को दर्शाता है, जो प्रेक्षण के मध्य (बीच) में होता है (उन्हें आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करने के बाद) तथा आधे प्रेक्षण इसके ऊपर होते हैं और आधे प्रेक्षण इसके नीचे होते हैं।
8. इकट्ठे किए आँकड़ों को बारंबारता बंटन सारणी की सहायता से चित्रीय रूप से दंड आलेखों के रूप में दर्शाया जा सकता है। दंड आलेख संख्याओं या आँकड़ों का समान चौड़ाई वाले दंडों द्वारा एक चित्रीय निरूपण है।
9. हमने यह भी सीखा है कि एक दोहरा दंड आलेख किस प्रकार खींचा जाता है। यह एक ही दृष्टि में, प्रेक्षणों के दो समूहों की तुलना करने में सहायक रहता है।
10. हमारे दैनिक जीवन में, ऐसी स्थितियाँ हैं जो निश्चित रूप से होती हैं, कुछ ऐसी हैं जिनका होना संभव नहीं है तथा कुछ ऐसी हैं जो हो भी सकती हैं और नहीं भी हो सकती। ऐसी स्थिति को सदैव घटित होने का संयोग होता है जो घटित हो भी सकती है या नहीं भी हो सकती है।

सरल समीकरण

अध्याय 4

4.1 बौद्धिक खेल!

अध्यापिका ने कहा है कि वह गणित का एक नया अध्याय पढ़ाना प्रारंभ करने जा रही हैं और वह है सरल समीकरण। अप्पू, सरिता और अमीना ने कक्षा VI में पढ़े गए बीजगणित वाले अध्याय का पुनर्विलोकन कर लिया है। क्या आपने भी कर लिया है? अप्पू, सरिता और अमीना उत्साहित हैं क्योंकि उन्होंने एक खेल बनाया है, जिसे वे बौद्धिक खेल (mind reader) कहती हैं तथा वे उसे पूरी कक्षा के सम्मुख प्रस्तुत करना चाहती हैं।

अध्यापिका उनके उत्साह की सराहना करती है और उन्हें अपना खेल प्रस्तुत करने के लिए आमंत्रित करती है। अमीना खेल प्रारंभ करती है। वह सारा से कोई संख्या सोचने को कहती है तथा उसे 4 से गुणा करके गुणनफल में 5 जोड़ने को कहती है। इसके बाद वह सारा से इसका परिणाम बताने को भी कहती है। सारा कहती है कि परिणाम 65 है। अमीना तुरंत घोषणा करती है कि सारा द्वारा सोची गई संख्या 15 है। सारा सिर हिलाकर हाँ कहती है। सारा समेत पूरी कक्षा आश्चर्यचकित हो जाती है।

अब अप्पू की बारी है। वह बालू से कोई संख्या सोचने, उसे 10 से गुणा करने और गुणनफल में से 20 घटाने को कहता है। इसके बाद वह बालू से उसका परिणाम बताने को कहता है। बालू कहता है कि यह 50 है। अप्पू तुरंत बालू द्वारा सोची गई संख्या बताता है और कहता है कि वह संख्या 7 है। बालू इसकी पुष्टि करता है।

प्रत्येक व्यक्ति यह जानना चाहता है कि अप्पू, सरिता और अमीना द्वारा प्रस्तुत बौद्धिक खेल किस प्रकार कार्य करता है। क्या आप देख सकते हैं कि यह कैसे कार्य करता है? इस अध्याय और अध्याय 12 को पढ़ने के बाद, आप भली-भाँति यह जान जाएँगे कि यह खेल किस प्रकार कार्य करता है।

4.2 समीकरण बनाना

आइए अमीना का उदाहरण लें। अमीना सारा से कोई संख्या सोचने को कहती है। अमीना संख्या के बारे में कुछ नहीं जानती है। उसके लिए, यह संख्या 1, 2, 3, . . ., 11, . . . , 100, ... में से कुछ भी हो सकती है। आइए इस अज्ञात संख्या को एक अक्षर x से व्यक्त करें। आप x के स्थान पर कोई अन्य अक्षर जैसे y, t इत्यादि का प्रयोग कर सकते हैं। इससे कोई प्रभाव नहीं पड़ता कि सारा द्वारा सोची गई अज्ञात संख्या के लिए हम कौन-सा अक्षर प्रयोग करते हैं। सारा जब संख्या को 4 से गुणा करती है, तो उसे $4x$ प्राप्त होता है। फिर वह इस गुणनफल में 5 जोड़ती है और $4x + 5$ प्राप्त करती है। $(4x + 5)$ का मान x के मान पर निर्भर करता है। इस प्रकार, यदि $x =$ 1 है, तो $4x + 5 = 4 \times 1 + 5 = 9$ है। इसका अर्थ है कि यदि सारा के मस्तिष्क में 1 होता, तो उसके द्वारा प्राप्त परिणाम 9 होता। इसी प्रकार, यदि उसने संख्या 5 सोची होती, तो उसका $x = 5$ के लिए $4x + 5 = 4 \times 5 + 5 = 25$ । यानी, सारा ने यदि संख्या 5 सोची होती तो उसका परिणाम 25 होता।

सारा द्वारा सोची संख्या ज्ञात करने के लिए, आइए उसके द्वारा प्राप्त उत्तर 65 से विपरीत की ओर कार्य करना प्रारंभ करें। हमें ऐसा x ज्ञात करना है कि

$$4x + 5 = 65 \qquad (4.1)$$

इस समीकरण (equation) का हल ही हमें सारा के मन की संख्या को बताएगा।

इस प्रकार, आइए अब अप्पू के उदाहरण पर विचार करें। आइए बालू द्वारा चुनी गई संख्या को y मान लें। अप्पू ने बालू से इस संख्या को 10 से गुणा कर और फिर गुणनफल में से 20 घटाने को कहा था। अर्थात् बालू y से, पहले $10y$ प्राप्त करता है और उसमें से 20 घटा कर $(10y – 20)$ प्राप्त करता है। इसका ज्ञात परिणाम 50 है।

अतः,

$$10y – 20 = 50 \qquad (4.2)$$

इस समीकरण का हल ही बालू द्वारा सोची गई संख्या बताएगा।

4.3 जो हमें ज्ञात है उसकी समीक्षा

ध्यान दीजिए कि (4.1) और (4.2) समीकरण हैं। आइए याद करें कि कक्षा VI में हमने समीकरणों के बारे में क्या पढ़ा था। *समीकरण चर पर एक प्रतिबंध होता है।* समीकरण (4.1) में, चर x है तथा समीकरण (4.2) में, चर y है।

शब्द **चर (variable)** का अर्थ है, ऐसी कोई वस्तु जो विचरण कर, अर्थात् बदल *सकती हो। एक चर विभिन्न संख्यात्मक मान ले (ग्रहण कर) सकता है, अर्थात् इसका मान निश्चित या स्थिर नहीं होता है। चरों को प्राय: अंग्रेज़ी वर्णमाला के अक्षरों* x, y, z, l, m, n, p इत्यादि से व्यक्त किया जाता है। *चरों से हम व्यंजकों (expressions) को बनाते हैं।* ये व्यंजक चरों पर योग, व्यवकलन, गुणन और विभाजन जैसी संक्रियाएँ करके प्राप्त किए (बनाए) जाते हैं। x से हमने व्यंजक $(4x + 5)$ बनाया था। इसके लिए, हमने पहले x को 4 से गुणा किया और फिर गुणनफल में 5 जोड़ा था। इसी प्रकार, हमने y से व्यंजक $(10y – 20)$ बनाया था। इसके लिए, हमने y को 10 से गुणा किया और फिर गुणनफल में से 20 को घटाया था। ये सभी व्यंजकों के उदाहरण हैं।

उपरोक्त प्रकार के बनाए गए एक व्यंजक का मान, चर के चुने गए मान पर निर्भर करता है। जैसा कि हम पहले ही देख चुके हैं कि जब $x = 1$ है, तो $4x + 5 = 9$ है; जब $x = 5$ है, तो $4x + 5 = 25$ है इसी प्रकार,

जब $x = 15$, तो $4x + 5 = 4 \times 15 + 5 = 65$ है;

जब $x = 0$, तो $4x + 5 = 4 \times 0 + 5 = 5$ है, इत्यादि।

समीकरण (4.1) चर x पर एक प्रतिबंध है। यह बताती है कि व्यंजक $4x + 5$ का मान 65 है। यह प्रतिबंध $x = 15$ होने पर संतुष्ट होता है। संख्या 15 समीकरण $4x + 5 = 65$ का एक हल (solution) है। जब $x = 5$ है, तो $4x + 5 = 25$ है जो 65 के बराबर नहीं है। इस प्रकार, $x = 5$ इस समीकरण का हल नहीं है। इसी प्रकार, $x = 0$ भी इस समीकरण का हल नहीं है। 15 के अतिरिक्त, x का कोई भी मान प्रतिबंध $4x + 5 = 65$ को संतुष्ट नहीं करता है।

प्रयास कीजिए

व्यंजक $(10y - 20)$ का मान y के मान पर निर्भर करता है। y को पाँच भिन्न-भिन्न मान देकर तथा y के प्रत्येक मान के लिए $(10y - 20)$ का मान ज्ञात करके इसकी पुष्टि कीजिए। $(10y - 20)$ के प्राप्त किए गए विभिन्न मानों से, क्या आप $10y - 20 = 50$ का कोई हल देख रहे हैं? यदि कोई हल प्राप्त नहीं हुआ हे, तो y को कुछ अन्य मान देकर, ज्ञात कीजिए कि प्रतिबंध $10y - 20 = 50$ संतुष्ट होता है या नहीं।

4.4 समीकरण क्या है?

एक समीकरण में, **समता** या **समिका** (equality) का चिह्न सदैव होता है। समता का चिह्न यह दर्शाता है कि इस चिह्न के बाईं ओर के व्यंजक [बायाँ पक्ष (LHS)] का मान चिह्न के दाईं ओर के व्यंजक [दायाँ पक्ष (RHS)] के मान के बराबर है। समीकरण (4.1) में, L.H.S $(4x + 5)$ है तथा RHS 65 है। समीकरण (4.2) में, LHS $(10y - 20)$ तथा RHS 50 है।

यदि LHS और RHS के बीच में समता चिह्न के अतिरिक्त कोई अन्य चिह्न हो, तो वह एक समीकरण नहीं होती है। इसलिए $4x + 5 > 65$ एक समीकरण नहीं है।

यह कथन हमें बताता है कि $(4x + 5)$ का मान 65 से अधिक है।

इसी प्रकार, $4x + 5 < 65$ भी एक समीकरण नहीं है। यह कथन हमें बताता है कि $(4x + 5)$ का मान 65 से कम है।

समीकरणों में हम प्राय: यह देखते हैं कि RHS केवल एक संख्या है। समीकरण (4.1) में यह 65 है तथा समीकरण (4.2) में यह 50 है। परंतु ऐसा होना सदैव आवश्यक नहीं है। एक समीकरण का दायाँ पक्ष (RHS) चर से संबद्ध एक व्यंजक भी हो सकता है। उदाहरणार्थ, समीकरण

$$4x + 5 = 6x - 25$$

में समता चिह्न के बाईं ओर व्यंजक $4x + 5$ है तथा उसके दाईं ओर व्यंजक $6x - 25$ है।

संक्षिप्त रूप में, एक समीकरण चर पर एक प्रतिबंध होता है। प्रतिबंध यह है कि दोनों व्यंजकों के मान बराबर होने चाहिए। ध्यान दीजिए कि इन दोनों व्यंजकों में से कम से कम एक में चर अवश्य होना चाहिए।

हम समीकरणों का एक सरल और उपयोगी गुण देखते हैं। समीकरण $4x + 5 = 65$ वही है जो समीकरण $65 = 4x + 5$ है। इसी प्रकार, समीकरण $6x - 25 = 4x + 5$ वही है जो समीकरण $4x + 5 = 6x - 25$ है। *किसी समीकरण के बाएँ और दाएँ पक्षों के व्यंजकों को आपस में बदलने पर, समीकरण वही रहती है।* यह गुण बहुधा समीकरणों को हल करने में उपयोगी रहता है।

उदाहरण 1 निम्नलिखित कथनों को समीकरणों के रूप में लिखिए :

(i) x के तिगुने और 11 का योग 32 है।

(ii) यदि किसी संख्या के 6 गुने में से आप 5 घटाएँ, तो 7 प्राप्त होता है।

(iii) m का एक चौथाई 7 से 3 अधिक है।

(iv) किसी संख्या के एक तिहाई में 5 जोड़ने पर 8 प्राप्त होता है ।

हल

(i) x का तिगुना $3x$ है।

$3x$ और 11 का योग $3x + 11$ है। यह योग 32 है।

अतः, वांछित समीकरण $3x + 11 = 32$ है।

(ii) आइए मान लें कि यह संख्या z है। z को 6 से गुणा करने पर $6z$ प्राप्त होता है।

$6z$ में से 5 घटाने पर $6z - 5$ प्राप्त होगा। यह परिणाम 7 है।

अतः, वांछित समीकरण $6z - 5 = 7$ है।

(iii) m का एक चौथाई $\frac{m}{4}$ है।

यह 7 से 3 अधिक है। इसका अर्थ है कि अंतर $(\frac{m}{4} - 7)$ बराबर 3 है।

अतः, वांछित समीकरण $\frac{m}{4} - 7 = 3$ है।

(iv) वांछित संख्या को n मान लीजिए। n का एक तिहाई $\frac{n}{3}$ है।

उपरोक्त एक-तिहाई जमा 5, $\frac{n}{3} + 5$ है। यह 8 के बराबर है ।

अतः, वांछित समीकरण $\frac{n}{3} + 5 = 8$ है।

उदाहरण 2 निम्नलिखित समीकरणों को सामान्य कथनों के रूप में बदलिए :

(i) $x - 5 = 9$ (ii) $5p = 20$ (iii) $3n + 7 = 1$ (iv) $\frac{m}{5} - 2 = 6$

हल

(i) x में से 5 निकालने पर 9 प्राप्त होता है।

(ii) एक संख्या p का पाँच गुना 20 है।

(iii) 1 प्राप्त करने के लिए n के तीन गुने में 7 जोड़िए।

(iv) किसी संख्या m के $\frac{1}{5}$ वें भाग में से 2 घटाने पर 6 प्राप्त होता है।

यहाँ ध्यान देने योग्य एक महत्वपूर्ण बात यह है कि एक दिए हुए समीकरण को, केवल एक ही नहीं, बल्कि अनेक सामान्य कथनों के रूप दिए जा सकते हैं। उदाहरणार्थ, उपरोक्त समीकरण (i) के लिए आप कह सकते हैं :

x में से 5 घटाइए। आपको 9 प्राप्त होता है।

अथवा संख्या x, 9 से 5 अधिक है।

अथवा 9 संख्या x से 5 कम है।

अथवा x और 5 का अंतर 9 है; इत्यादि।

प्रयास कीजिए

उपरोक्त समीकरणों (ii), (iii) और (iv) में से प्रत्येक के लिए, कम से कम एक अन्य कथन के रूप में लिखिए ।

उदाहरण 3 निम्नलिखित स्थिति पर विचार कीजिए :

राजू के पिता की आयु राजू की आयु के तीन गुने से 5 वर्ष अधिक है। राजू के पिता की आयु 44 वर्ष है। राजू की आयु ज्ञात करने के लिए, एक समीकरण बनाइए (स्थापित कीजिए)।

हल हमें राजू की आयु ज्ञात नहीं है। आइए इसे y वर्ष मान लें। राजू की आयु का तीन गुना $3y$ वर्ष है। राजू के पिता की आयु $3y$ वर्ष से 5 वर्ष अधिक है। अर्थात् राजू के पिता की आयु $(3y + 5)$ वर्ष है। यह भी दिया है कि राजू के पिता की आयु 44 वर्ष है।

अत:,
$$3y + 5 = 44 \qquad (4.3)$$

यह चर y में एक समीकरण है। इसे हल करने पर राजू की आयु ज्ञात हो जाएगी।

उदाहरण 4 एक दुकानदार दो प्रकार की पेटियों में आम बेचता है। ये पेटियाँ छोटी और बड़ी हैं। एक बड़ी पेटी में 8 छोटी पेटियों के बराबर आम और 4 खुले आम आते हैं। प्रत्येक छोटी पेटी में आमों की संख्या बताने वाला एक समीकरण बनाइए। दिया हुआ है कि एक बड़ी पेटी में आमों की संख्या 100 है।

हल मान लीजिए कि एक छोटी पेटी में m आम हैं। एक बड़ी पेटी में m के 8 गुने से 4 अधिक आम हैं। अर्थात् एक बड़ी पेटी में $8m + 4$ आम हैं। परंतु यह संख्या 100 दी हुई है। इस प्रकार,

$$8m + 4 = 100 \qquad (4.4)$$

इस समीकरण को हल करके, आप एक छोटी पेटी के आमों की संख्या ज्ञात कर सकते हैं।

प्रश्नावली 4.1

1. निम्नलिखित सारणी के अंतिम स्तंभ को पूरा कीजिए :

क्रम संख्या	समीकरण	चर का मान	बताइए कि समीकरण संतुष्ट होती है या नहीं (हाँ/नहीं)
(i)	$x + 3 = 0$	$x = 3$	–
(ii)	$x + 3 = 0$	$x = 0$	–
(iii)	$x + 3 = 0$	$x = -3$	–
(iv)	$x - 7 = 1$	$x = 7$	–
(v)	$x - 7 = 1$	$x = 8$	–
(vi)	$5x = 25$	$x = 0$	–
(vii)	$5x = 25$	$x = 5$	–
(viii)	$5x = 25$	$x = -5$	–
(ix)	$\frac{m}{3} = 2$	$m = -6$	–
(x)	$\frac{m}{3} = 2$	$m = 0$	–
(xi)	$\frac{m}{3} = 2$	$m = 6$	–

2. जाँच कीजिए कि कोष्ठकों में दिये हुए मान, दिए गए संगत समीकरणों के हल हैं या नहीं :

(a) $n + 5 = 19$ $(n = 1)$ (b) $7n + 5 = 19$ $(n = -2)$ (c) $7n + 5 = 19$ $(n = 2)$

(d) $4p - 3 = 13$ $(p = 1)$ (e) $4p - 3 = 13$ $(p = -4)$ (f) $4p - 3 = 13$ $(p = 0)$

3. प्रयत्न और भूल विधि से निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए :

(i) $5p + 2 = 17$ (ii) $3m - 14 = 4$

4. निम्नलिखित कथनों के लिए समीकरण दीजिए :

(i) संख्याओं x और 4 का योग 9 है। (ii) y में से 2 घटाने पर 8 प्राप्त होते हैं।

(iii) a का 10 गुना 70 है। (iv) संख्या b को 5 से भाग देने पर 6 प्राप्त होता है।

(v) t का तीन-चौथाई 15 है।

(vi) m का 7 गुना और 7 का योगफल आपको 77 देता है।

(vii) एक संख्या x की चौथाई ऋण 4 आपको 4 देता है।

(viii) यदि आप y के 6 गुने में से 6 घटाएँ, तो आपको 60 प्राप्त होता है।

(ix) यदि आप z के एक-तिहाई में 3 जोड़ें, तो आपको 30 प्राप्त होता है।

5. निम्नलिखित समीकरणों को सामान्य कथनों के रूप में लिखिए :

(i) $p + 4 = 15$ (ii) $m - 7 = 3$ (iii) $2m = 7$ (iv) $\frac{m}{5} = 3$

(v) $\frac{3m}{5} = 6$ (vi) $3p + 4 = 25$ (vii) $4p - 2 = 18$ (viii) $\frac{p}{2} + 2 = 8$

6. निम्नलिखित स्थितियों में समीकरण बनाइए :

(i) इरफान कहता है कि उसके पास, परमीत के पास जितने कँचे हैं उनके पाँच गुने से 7 अधिक कँचे हैं। इरफान के पास 37 कँचे हैं। (परमीत के कँचों की संख्या को m लीजिए।)

(ii) लक्ष्मी के पिता की आयु 49 वर्ष है। उनकी आयु, लड़की की आयु के तीन गुने से 4 वर्ष अधिक है। (लक्ष्मी की आयु को y वर्ष लीजिए।)

(iii) अध्यापिका बताती हैं कि उनकी कक्षा में एक विद्यार्थी द्वारा प्राप्त किए गए अधिकतम अंक, प्राप्त किए न्यूनतम अंक का दुगुना धन 7 हैं। प्राप्त किए गए अधिकतम अंक 87 हैं। (न्यूनतम प्राप्त किए गए अंकों को l लीजिए।)

(iv) एक समद्विबाहु त्रिभुज में शीर्ष कोण प्रत्येक आधार कोण का दुगुना है। (मान लीजिए प्रत्येक आधार कोण b डिग्री है। याद रखिए कि त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180 डिग्री होता है।)

4.4.1 एक समीकरण को हल करना

इस समिका पर विचार कीजिए

$$8 - 3 = 4 + 1 \quad (4.5)$$

समिका (4.5) सत्य है, क्योंकि इसके दोनों पक्ष बराबर हैं (प्रत्येक 5 के बराबर है)।

- आइए दोनों पक्षों में 2 जोड़ें। इसके परिणामस्वरूप, हमें प्राप्त होता है:

  LHS $= 8 - 3 + 2 = 5 + 2 = 7$, RHS $= 4 + 1 + 2 = 5 + 2 = 7$.

  पुन:, समिका (4.5) सत्य है (अर्थात LHS और RHS समान हैं)।

  इस प्रकार, *यदि हम एक समिका के दोनों पक्षों में एक ही संख्या जोड़ें, तो भी वह समिका सत्य होती है।*

- आइए अब दोनों पक्षों में से 2 घटाइए। इसके परिणामस्वरूप, हमें प्राप्त होता है :

  LHS $= 8 - 3 - 2 = 5 - 2 = 3$, RHS $= 4 + 1 - 2 = 5 - 2 = 3$.

  पुन:, वह समिका सत्य है।

  इस प्रकार, *यदि हम एक समिका के दोनों पक्षों में से एक ही संख्या घटाएँ, तो भी वह समिका सत्य होती है।*

- इसी प्रकार, *यदि हम एक समिका के दोनों पक्षों को एक ही शून्येतर (non-zero) संख्या से गुणा करें या भाग दें, तो भी वह समिका सत्य होती है।*

  उदाहरणार्थ, आइए उपरोक्त समिका के दोनों पक्षों को 3 से गुणा करें। हमें प्राप्त होता है :

  LHS $= 3 \times (8 - 3) = 3 \times 5 = 15$, RHS $= 3 \times (4 + 1) = 3 \times 5 = 15$.

  समिका सत्य है।

आइए अब हम उपरोक्त समिका के दोनों पक्षों को 2 से भाग करें ।

$$\text{LHS} = (8 - 3) \div 2 = 5 \div 2 = \frac{5}{2}$$

$$\text{RHS} = (4 + 1) \div 2 = 5 \div 2 = \frac{5}{2} = \text{LHS}$$

पुनः, समिका सत्य है।

यदि हम कोई अन्य समिका लें, तो भी हमें यही निष्कर्ष प्राप्त होता है।

मान लीजिए कि हम इस नियम का पालन नहीं करते हैं। विशेष रूप से, मान लीजिए कि हम एक समिका के दोनों पक्षों में भिन्न-भिन्न संख्याएँ जोड़ते हैं। इस स्थिति में, हम देखेंगे कि समिका सत्य नहीं होगी (अर्थात दोनों पक्ष समान नहीं होंगे)। उदाहरणार्थ, आइए समिका (4.5) को पुनः लें :

$$8 - 3 = 4 + 1$$

अब, इसके बाएँ पक्ष में 2 जोड़ें और दाएँ पक्ष में 3 जोड़े। अब नई LHS $= 8 - 3 + 2 = 5 + 2 = 7$ है तथा नई RHS $= 4 + 1 + 3 = 5 + 3 = 8$ है। अब, समिका सत्य नहीं है, क्योंकि नई LHS और RHS बराबर नहीं हैं।

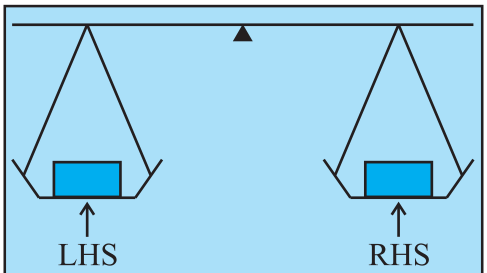
इस प्रकार, *यदि हम एक समिका के दोनों पक्षों में, कोई गणितीय संक्रिया एक ही संख्या के साथ न करें, तो समिका सत्य नहीं हो सकती है।*

समीकरण, एक चरों वाली समिका होती है।

उपरोक्त निष्कर्ष समीकरणों के लिए भी मान्य होते हैं, क्योंकि प्रत्येक समीकरण में चर केवल संख्या ही निरूपित करता है।

प्राय: एक समीकरण को एक तौलने वाली तराजू या तुला (balance) समझा जाता है। एक समीकरण पर एक गणितीय संक्रिया करना इस प्रकार समझना चाहिए, जैसे कि तौलने वाली तराजू के दोनों पलड़ों में बराबर बाँट डालना या उनमें से बराबर बाँट निकाल लेना।

[एक समीकरण एक ऐसी तौलने वाली तराजू समझा जा सकता है, जिसके दोनों पलड़ों में बराबर बाँट रखे हों।] इस स्थिति में, तराजू की डंडी ठीक क्षैतिज रहती है। यदि हम दोनों पलड़ों में बराबर बाँट (weights) डालें, तो डंडी अभी भी क्षैतिज ही रहती है। इसी प्रकार, यदि हम दोनों पलड़ों में से बराबर बाँट हटा लें (निकालें), तो भी डंडी क्षैतिज रहती है। इसके विपरीत, यदि हम दोनों पलड़ों में भिन्न बाँट डालें (जोड़ें) या उनमें से भिन्न बाँट निकालें (घटाएँ), तो भी तराजू की डंडी का संतुलन बिगड़ जाता है, अर्थात् डंडी क्षैतिज पर नहीं रहती है।



एक संतुलित समीकरण तराजू जैसी है जिसके दोनों पलड़ों में बराबर बाँट रखें हों।

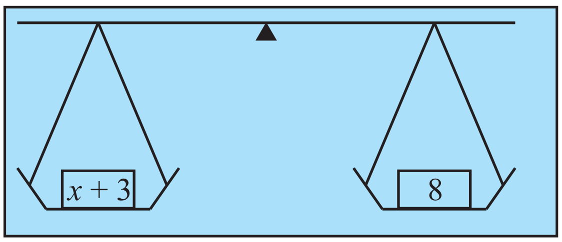
हम यह सिद्धांत एक समीकरण को हल करने में प्रयोग करते हैं। निस्संदेह, यहाँ तराजू काल्पनिक है तथा संख्याओं को बाँटों की तरह भौतिक रूप से संतुलित करने के लिए प्रयोग नहीं किया जा सकता। इस सिद्धांत को प्रस्तुत करने का यही मुख्य उद्देश्य है। आइए कुछ उदाहरण लें।

- निम्नलिखित समीकरण पर विचार कीजिए:

$$x + 3 = 8 \qquad (4.6)$$

हम इस समीकरण के दोनों पक्षों में से 3 को घटाते हैं।

नई LHS है : $x + 3 - 3 = x$ तथा नई RHS है : $8 - 3 = 5$



हम 3 को क्यों घटाएँ कोई और संख्या क्यों न घटाएँ? 3 को जोड़ कर देखिए। क्या यह कुछ सहायता करेगा? क्यों नहीं?

ऐसा इसलिए किया है, क्योंकि 3 को घटाने पर L.H.S. में x रह जाता है।

चूँकि इससे संतुलन में कोई परिवर्तन नहीं होता है, इसलिए हमें प्राप्त होता है :

नई LHS = नई RHS या $x = 5$

यह वही है, जो हम चाहते हैं। अर्थात् यह समीकरण (4.6) का एक हल है।

इसकी पुष्टि करने के लिए कि यह सही है या नहीं, हम प्रारंभिक समीकरण में $x = 5$ रखेंगे। हमें LHS $= x + 3 = 5 + 3 = 8$ प्राप्त होती है, जो RHS के बराबर है। यही हल सही होने के लिए आवश्यक है।

समीकरण के दोनों पक्षों में सही गणितीय संक्रिया करने से (अर्थात् 3 घटाने से), हम समीकरण के हल पर पहुँच गए ।

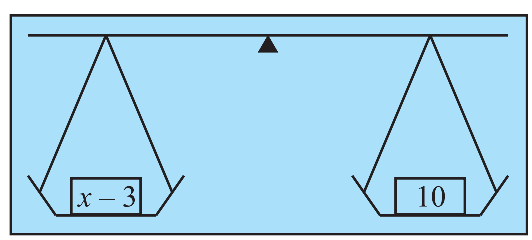
- आइए एक अन्य समीकरण लें :

$$x - 3 = 10 \qquad (4.7)$$

यहाँ हमें क्या करना चाहिए? हमें दोनों पक्षों में 3 जोड़ना चाहिए। ऐसा करने से, समीकरण का संतुलन बना रहेगा तथा L.H.S में केवल x रह जाएगा।

नई LHS $= x - 3 + 3 = x$, नई RHS $= 10 + 3 = 13$

अत: $x = 13$ है, जो वांछित हल है।



प्रारंभिक समीकरण (4.7) में $x = 13$ रखने पर, हम इसकी पुष्टि करते हैं कि यह हल सही है :

प्रारंभिक समीकरण की LHS $= x - 3 = 13 - 3 = 10$ है।

जैसा कि वांछनीय है यह, RHS के बराबर है।

- इसी प्रकार, आइए निम्नलिखित समीकरणों को देखें :

$$5y = 35 \qquad (4.8)$$

$$\frac{m}{2} = 5 \qquad (4.9)$$

पहली स्थिति में, हम दोनों पक्षों को 5 से भाग देंगे। इससे LHS में केवल y रह जाता है।

नई LHS $= \dfrac{5y}{5} = \dfrac{5 \times y}{5} = y$, नई RHS $= \dfrac{35}{5} = \dfrac{5 \times 7}{5} = 7$

अत: $y = 7$

यही समीकरण का वांछित हल है। हम समीकरण (4.8) में $y = 7$ प्रतिस्थापित करके इसकी जाँच कर सकते हैं कि समीकरण संतुष्ट हो जाता है।

दूसरी स्थिति में, हम दोनों पक्षों को 2 से गुणा करते हैं। इससे LHS में केवल m रह जाता है।

नई LHS $= \dfrac{m}{2} \times 2 = m$. तथा नई RHS $= 5 \times 2 = 10$ है।

अत:, $m = 10$ (यही वांछित हल है। आप इसकी जाँच कर सकते हैं कि यह हल सही है या नहीं)।

उपरोक्त उदाहरणों से यह देखा जा सकता है कि समीकरण के हल करने के लिए, हमें जिस संक्रिया की आवश्यकता पड़ेगी वह समीकरण पर निर्भर करता है। हमारा प्रयास यह होना चाहिए कि समीकरण में चर पृथक् हो जाए। कभी-कभी ऐसा करने के लिए, हमें एक से अधिक गणितीय संक्रियाएँ करनी पड़ सकती हैं। इसको मस्तिष्क में रखते हुए, आइए कुछ और समीकरण हल करें।

उदाहरण 5 हल कीजिए:

(a) $3n + 7 = 25$ (4.10)

(b) $2p - 1 = 23$ (4.11)

हल

(a) हम समीकरण की LHS में चर n को पृथक् करने के लिए, एक चरणबद्ध विधि से कार्य करते हैं। LHS यहाँ $3n + 7$ है। पहले हम इसमें से 7 घटाएँगे, जिससे $3n$ प्राप्त होगा। इससे अगले चरण में, हम इसे 3 से भाग देंगे, जिससे n प्राप्त होगा। याद रखिए कि हमें समीकरण के दोनों पक्षों में एक ही संक्रिया करनी चाहिए। अत:, दोनों पक्षों में से 7 घटाने पर,

$$3n + 7 - 7 = 25 - 7 \qquad \text{(चरण 1)}$$

या, $3n = 18$

अब दोनों पक्षों को 3 से भाग दीजिए :

$$\frac{3n}{3} = \frac{18}{3} \qquad \text{(चरण 2)}$$

या, $n = 6$, जो इसका हल है।

(b) यहाँ हमें क्या करना चाहिए? पहले हम दोनों पक्षों में 1 जोड़ते हैं :

$$2p - 1 + 1 = 23 + 1 \qquad \text{(चरण 1)}$$

या $2p = 24$

अब, दोनों पक्षों को 2 से भाग देते हैं : $\dfrac{2p}{2} = \dfrac{24}{2}$ (चरण 2)

या $p = 12$, जो इसका हल है।

आपको एक अच्छी आदत विकसित कर लेनी चाहिए, जो यह है कि प्राप्त किए हल की जाँच अवश्य कर लें। यद्यपि हमने यह (a) के लिए नहीं किया है, परंतु आइए इस उदाहरण (b) के लिए ऐसा करें।

आइए इस हल $p = 12$ को समीकरण में रखें ।

$$\text{LHS} = 2p - 1 = 2 \times 12 - 1 = 24 - 1$$
$$= 23 = \text{RHS}$$

इस प्रकार, हल की सत्यता की जाँच हो गई।

उपरोक्त (a) के हल की भी अब आप जाँच कर ही लीजिए ।

अब हम इस स्थिति में हैं कि अप्पू, सरिता और अमीना द्वारा प्रस्तुत किए गए बौद्धिक खेल पर वापस जाएँ और समझें कि उन्होंने अपने उत्तर किस प्रकार ज्ञात किए। इस कार्य के लिए, आइए समीकरणों (4.1) और (4.2) को देखें, जो क्रमशः अमीना और अप्पू के उदाहरणों के संगत हैं।

- पहले निम्नलिखित समीकरण पर विचार कीजिए: $4x + 5 = 65$. (4.1)

  दोनों पक्षों में से 5 घटाने पर, $4x + 5 - 5 = 65 - 5$.

  अर्थात्, $4x = 60$

  x को पृथक् करने के लिए, दोनों पक्षों को 4 से भाग देने पर, $\dfrac{4x}{4} = \dfrac{60}{4}$

  या $x = 15$, जो वांछित हल है। (जाँच कीजिए कि यह सही है।)

- अब निम्नलिखित समीकरण पर विचार कीजिए:

  $10y - 20 = 50$ (4.2)

  दोनों पक्षों में, 20 जोड़ने पर, हमें प्राप्त होता है:

  $10y - 20 + 20 = 50 + 20$ या $10y = 70$

  दोनों पक्षों को 10 से भाग देने पर, हमें प्राप्त होता है : $\dfrac{10y}{10} = \dfrac{70}{10}$

  या, $y = 7$, जो वांछित हल है। (जाँच कीजिए कि यह सही है।)

आप यह अनुभव करेंगे कि ठीक यही उत्तर अप्पू, सरिता और अमीना ने दिए थे। उन्होंने समीकरण बनाना और फिर उन्हें हल करना सीख लिया था। इसी कारण वे अपना बौद्धिक खेल बनाकर संपूर्ण कक्षा पर अपना प्रभाव डाल पाए। हम इस पर अनुच्छेद 4.7 में वापस आएँगे।

प्रश्नवली 4.2

1. पहले चर को पृथक् करने वाला चरण बताइए और फिर समीकरण को हल कीजिए :

   (a) $x - 1 = 0$ (b) $x + 1 = 0$ (c) $x - 1 = 5$

   (d) $x + 6 = 2$ (e) $y - 4 = -7$ (f) $y - 4 = 4$

   (g) $y + 4 = 4$ (h) $y + 4 = -4$

2. पहले चर को पृथक् करने के लिए प्रयोग किए जाने वाले चरण को बताइए और फिर समीकरण को हल कीजिए :

   (a) $3l = 42$ (b) $\frac{b}{2} = 6$ (c) $\frac{p}{7} = 4$ (d) $4x = 25$

   (e) $8y = 36$ (f) $\frac{z}{3} = \frac{5}{4}$ (g) $\frac{a}{5} = \frac{7}{15}$ (h) $20t = -10$

3. चर को पृथक् करने के लिए, जो आप चरण प्रयोग करेंगे, उसे बताइए और फिर समीकरण को हल कीजिए :

   (a) $3n - 2 = 46$ (b) $5m + 7 = 17$ (c) $\frac{20p}{3} = 40$ (d) $\frac{3p}{10} = 6$

4. निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए :

   (a) $10p = 100$ (b) $10p + 10 = 100$ (c) $\frac{p}{4} = 5$ (d) $\frac{-P}{3} = 5$

   (e) $\frac{3p}{4} = 6$ (f) $3s = -9$ (g) $3s + 12 = 0$ (h) $3s = 0$

   (i) $2q = 6$ (j) $2q - 6 = 0$ (k) $2q + 6 = 0$ (l) $2q + 6 = 12$

4.5 कुछ और समीकरण

आइए कुछ और समीकरणों को हल करने का अभ्यास करें। इन समीकरणों को हल करते समय, हम एक संख्या (पद) को **स्थानापन्न (transpose)** करने (अर्थात् एक पक्ष से दूसरे पक्ष में ले जाने) के बारे में पढ़ेंगे (सीखेंगे) हम किसी संख्या को, समीकरण के दोनों पक्षों में जोड़ने या दोनों पक्षों में घटाने के एवज में, स्थानापन्न कर सकते हैं।

उदाहरण 6 हल कीजिए : $12p - 5 = 25$ (4.12)

हल

- समीकरण के दोनों पक्षों में 5 जोड़ने पर,

  $12p - 5 + 5 = 25 + 5$ या, $12p = 30$

- दोनों पक्षों को 12 से भाग देने पर,

$$\frac{12p}{12} = \frac{30}{12} \text{ या } \quad p = \frac{5}{2}$$

जाँच : समीकरण (4.12) की LHS में, $p = \frac{5}{2}$ रखने पर

$$\text{LHS} = 12 \times \frac{5}{2} - 5$$
$$= 6 \times 5 - 5$$
$$= 30 - 5 = 25 = \text{RHS}$$

ध्यान दीजिए कि दोनों पक्षों में 5 जोड़ने का वही अर्थ है, जो (– 5) का पक्ष बदलने का है!

$$12p - 5 = 25$$
$$12p = 25 + 5$$

पक्ष बदलने को **स्थानापन्न** करना कहते हैं। स्थानापन्न करने में, संख्या का चिह्न बदल जाता है।

जैसा कि हमने किसी समीकरण को हल करते समय देखा है, सामान्यत: हम समीकरण के दोनों पक्षों में एक ही संख्या जोड़ते हैं या उनमें से एक ही संख्या को घटाते हैं। *किसी संख्या को स्थानापन्न करना* (अर्थात् संख्या के पक्षों में परिवर्तन करना) *संख्या को दोनों पक्षों में जोड़ने या दोनों पक्षों में से घटाने जैसा ही है।* ऐसा करने के लिए, उस संख्या का चिह्न बदलना पड़ता है। जो नियम संख्याओं के लिए प्रयोग किया जाता है, वही नियम व्यंजकों के लिए भी प्रयोग किया जाता है। आइए स्थानापन्न के दो और उदाहरण लें।

दोनों पक्षों में जोड़ना या घटाना	स्थानापन्न करना
(i) $3p - 10 = 5$ दोनों पक्षों में 10 जोड़िए $3p - 10 + 10 = 5 + 10$ या $3p = 15$	(i) $3p - 10 = 5$ LHS से (–10) को स्थानापन्न करना (स्थानापन्न करने पर, – 10 बदल कर + 10 हो जाता है।) $3p = 5 + 10$ या $3p = 15$
(ii) $5x + 12 = 27$ दोनों पक्षों में से 12 घटाइए। $5x + 12 - 12 = 27 - 12$ या $5x = 15$	(ii) $5x + 12 = 27$ + 12 को स्थानापन्न करना (+ 12 स्थानापन्न करने पर, – 12 हो जाता है) $5x = 27 - 12$ या $5x = 15$

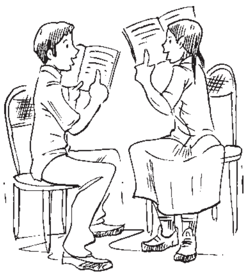
अब हम दो और समीकरणों को हल करेंगे। जैसा कि आप देख सकते हैं, इन समीकरणों में कोष्ठक भी हैं, जिन्हें सर्वप्रथम खोलना पड़ेगा।

उदाहरण 7 हल कीजिए :

(a) $4(m + 3) = 18$ (b) $-2(x + 3) = 8$

हल

(a) $4(m + 3) = 18$



आइए दोनों पक्षों को 4 से विभाजित करें। इससे LHS में से कोष्ठक हट जाएँगे। हमें प्राप्त होता है:

$$m+3=\frac{18}{4} \quad \text{या} \quad m+3=\frac{9}{2}$$

या $\quad m=\frac{9}{2}-3$ (3 को RHS में स्थानापन्न करने पर)

या $\quad m=\frac{3}{2}$ (वांछित हल) $\left(\text{क्योंकि } \frac{9}{2}-3=\frac{9}{2}-\frac{6}{2}=\frac{3}{2}\right)$

जाँच $\quad \text{LHS} = 4\left[\frac{3}{2}+3\right]=4\times\frac{3}{2}+4\times 3=2\times 3+4\times 3$ [$m = \frac{3}{2}$ रखिए]

$= 6 + 12 = 18 = \text{RHS}$

(b) $-2\,(x + 3) = 8$

LHS में से कोष्ठकों को हटाने के लिए, हम दोनों पक्षों को -2 से भाग देते हैं। हमें प्राप्त होता है :

$$x+3=-\frac{8}{2} \quad \text{या} \quad x + 3 = -4$$

या, $x = -4 - 3$ (3 को RHS में स्थानापन्न करने पर)

या $\quad x = -7 \quad$ (वांछित हल)

जाँच $\quad \text{LHS} = -2(-7+3)$

$= -2(-4)$

$= 8 = \text{RHS}$ जो होना चाहिए।

4.6 हल से समीकरण

अतुल सदैव अलग प्रकार से सोचता है। वह किसी विद्यार्थी द्वारा समीकरण हल करने में लिए गए उत्तरोतर चरणों को देखता है। वह सोचता है कि क्यों न इसके विपरीत (उल्टे) पथ का अनुसरण किया जाए।

समीकरण $\longrightarrow$ हल (सामान्य पथ)

हल $\longrightarrow$ समीकरण (विपरीत पथ)

वह नीचे दिए पथ का अनुसरण करता है :

प्रारंभ कीजिए		$x = 5$	
दोनों पक्षों को 4 से गुणा कीजिए	$\downarrow$	$4x = 20$	$\uparrow$ दोनों पक्षों को 4 से भाग दीजिए
दोनों पक्षों में से 3 घटाइए	$\downarrow$	$4x - 3 = 17$	$\uparrow$ दोनों पक्षों में 3 जोड़िए

इससे एक समीकरण प्राप्त हो जाती है। यदि हम प्रत्येक चरण के लिए, उसके विपरीत पथ का अनुसरण करें। (जैसे दाईं ओर दर्शाया गया है), तो हमें समीकरण का हल प्राप्त हो जाता है।

हेतल इसमें रुचि लेने लगती है। वह उसी पहले चरण से प्रारंभ करती है और एक अन्य समीकरण बना लेती है।

प्रयास कीजिए

उसी चरण $x = 5$ से प्रारंभ कीजिए और इससे दो भिन्न समीकरण बनाइए। अपनी कक्षा के दो सहपाठियों से इन समीकरणों को हल करने के लिए कहिए। जाँच कीजिए कि क्या उनका हल $x = 5$ है।

$$x = 5$$

दोनों पक्षों को 3 से गुणा करने पर, $3x = 15$

दोनों पक्षों में 4 जोड़ने पर, $3x + 4 = 19$

$y = 4$ से प्रारंभ कीजिए और इससे दो भिन्न-भिन्न समीकरण बनाइए। अपने तीन मित्रों से भी ऐसा करने को कहिए। क्या उनके समीकरण आपसे भिन्न हैं?

क्या यह अच्छा नहीं है कि आप समीकरणों को केवल हल ही नहीं कर सकते, अपितु उनको बना भी सकते हैं। साथ ही, क्या आपने यह देखा कि एक दी हुई समीकरण का आप केवल एक ही हल प्राप्त करते हैं, लेकिन एक दिए हुए हल से आप अनेक समीकरण बना सकते हैं।

अब सारा यह चाहती है कि पूरी कक्षा यह जान जाए कि वह क्या सोच रही है। वह कहती है, ‘‘मैं हेतल की समीकरण को लेकर उसे एक कथन के रूप में बदलूँगी, जिससे एक पहेली बन जाएगी। उदाहरणार्थ,

कोई संख्या सोचिए, उसे 3 से गुणा कीजिए और गुणनफल में 4 जोड़िए। अब बताइए कि आपने क्या संख्या प्राप्त की है।

यदि योग 19 है, तो हेतल द्वारा प्राप्त किये गए समीकरण से पहेली हल हो जाएगी। वास्तव में, हम जानते हैं कि यह 5 है, क्योंकि हेतल ने इससे प्रारंभ किया था।’’

वह अप्पू, सरिता और अमीना की ओर मुख करके पूछती है कि क्या उन्होंने ऐसे ही अपनी पहेली बनाई थी। वे तीनों कहते है, ‘‘हाँ’’।

अब हम जान गए हैं कि किस प्रकार अनेक संख्या पहेलियों और अन्य समस्याओं को बनाया जा सकता है।

प्रयास कीजिए

दो संख्या पहेलियों को बनाने का प्रयास कीजिए, एक हल 11 लेकर तथा दूसरा हल 100 लेकर।

प्रश्नावली 4.3

1. निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए :

(a) $2y + \frac{5}{2} = \frac{37}{2}$ (b) $5t + 28 = 10$ (c) $\frac{a}{5} + 3 = 2$ (d) $\frac{q}{4} + 7 = 5$

(e) $\frac{5}{2}x = 10$ (f) $\frac{5}{2}x = \frac{25}{4}$ (g) $7m + \frac{19}{2} = 13$ (h) $6z + 10 = -2$

(i) $\frac{3l}{2} = \frac{2}{3}$ (j) $\frac{2b}{3} - 5 = 3$

2. निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए :

(a) $2(x + 4) = 12$ (b) $3(n - 5) = 21$ (c) $3(n - 5) = - 21$

(d) $- 4(2 + x) = 8$ (e) $4(2 - x) = 8$

3. निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए :

(a) $4 = 5(p - 2)$ (b) $- 4 = 5(p - 2)$

(c) $16 = 4 + 3(t + 2)$ (d) $4+5(p - 1) = 34$ (e) $0 = 16 + 4(m - 6)$

4. (a) $x = 2$ से प्रारंभ करते हुए, 3 समीकरण बनाइए।

(b) $x = - 2$ से प्रारंभ करते हुए, 3 समीकरण बनाइए।

4.7 व्यावहारिक स्थितियों में सरल समीकरणों के अनुप्रयोग

हम ऐसे कई उदाहरण देख चुके हैं, जिनमें हमने दैनिक जीवन की भाषा से कथनों को लेकर, उन्हें सरल समीकरणों के रूप में बदला था। हम यह भी सीख चुके हैं कि सरल समीकरणों को किस प्रकार हल किया जाता है। इस प्रकार, अब हम पहेलियों और व्यावहारिक स्थितियों से संबंधित समस्याओं को हल करने के लिए, पूर्णतया समर्थ हो चुके हैं। इसकी विधि यह है कि पहले इन स्थितियों के संगत समीकरणों को बना लिया जाए और फिर इन पहेलियों / समस्याओं के हल प्राप्त करने के लिए प्राप्त समीकरणों को हल कर लिया जाए। हम उसी से प्रारंभ करते हैं, जिसे हम पहले ही देख चुके हैं [उदाहरण 1 (i) और (iii), अनुच्छेद 4.2]

उदाहरण 8 किसी संख्या के तिगुने और 11 का योग 32 है। वह संख्या ज्ञात कीजिए।

हल

- यदि अज्ञात संख्या को x मान लिया जाए, तो उसका तिगुना $3x$ होगा तथा $3x$ और 11 का योग 32 है। अर्थात् $3x + 11 = 32$.
- इस समीकरण को हल करने के लिए, हम 11 को RHS में स्थानापन्न करते हैं, जिससे हमें प्राप्त होता है :

  $3x = 32 - 11$ या, $3x = 21$

  अब दोनों पक्षों को 3 से भाग देने पर, हमें प्राप्त होता है:

  $$x = \frac{21}{3} = 7$$

  > यही समीकरण हमें पहले अनुच्छेद 4.2 के उदाहरण 1 में प्राप्त हुआ था।

  अतः वांछनीय संख्या 7 है। (हम इसकी जाँच के लिए 7 के तिगुने में 11 जोड़कर देख सकते हैं कि परिणाम 32 आता है)।

उदाहरण 9 वह संख्या ज्ञात कीजिए जिसका एक-चौथाई, 7 से 3 अधिक है।

हल

- आइए अज्ञात संख्या को y लें। इसका एक-चौथाई $\frac{y}{4}$ है।

संख्या $\left(\frac{y}{4}\right)$ संख्या 7 से 3 अधिक है।

अतः, हमें y में निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है : $\frac{y}{4} - 7 = 3$

- इस समीकरण को हल करने के लिए पहले -7 को RHS में स्थानापन्न कीजिए।

इस प्रकार, $\frac{y}{4} = 3 + 7 = 10.$

फिर हम दोनों पक्षों को 4 से गुणा करके, प्राप्त करते हैं :

$\frac{y}{4} \times 4 = 10 \times 4$ या, $y = 40$ (वांछित संख्या)

जाँच y का मान रखने पर,

LHS $= \frac{40}{4} - 7 = 10 - 7 = 3 =$ RHS, जो होना चाहिए।

प्रयास कीजिए

(i) जब आप एक संख्या को 6 से गुणा करते हैं और फिर गुणनफल में से 5 घटाते हैं, तो आपको 7 प्राप्त होता है। क्या आप बता सकते हैं कि वह संख्या क्या है?

(ii) वह कौन-सी संख्या है, जिसके एक-तिहाई में 5 जोड़ने पर 8 प्राप्त होता है?

उदाहरण 10 राजू के पिता की आयु राजू की आयु के तीन गुने से 5 वर्ष अधिक है। राजू की आयु ज्ञात कीजिए, यदि उसके पिता की आयु 44 वर्ष है।

हल

- उदाहरण 3 के अनुसार राजू की आयु (y) ज्ञात करने का समीकरण है: $3y + 5 = 44$
- इसे हल करने के लिए, पहले हम 5 को स्थानापन्न करते हैं। हमें प्राप्त होता है:

$3y = 44 - 5 = 39$

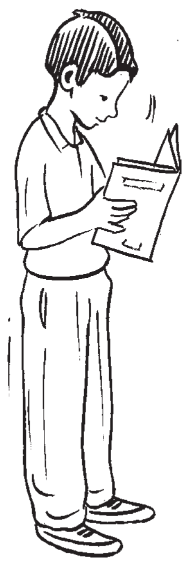
दोनों पक्षों को 3 से भाग देने पर, हमें प्राप्त होता है: $y = 13$

अर्थात् राजू की आयु 13 वर्ष है। (आप अपने उत्तर की जाँच कर सकते हैं।)

प्रयास कीजिए

मापों के अनुसार, दो प्रकार की पेटियाँ हैं, जिनमें आम रखे हुए हैं। प्रत्येक बड़ी पेटी में रखे आमों की संख्या 8 छोटी पेटियों में रखे आमों की संख्या से 4 अधिक हैं। प्रत्येक बड़ी पेटी में 100 आम हैं। प्रत्येक छोटी पेटी में कितने आम हैं?

प्रश्नावली 4.4



1. निम्नलिखित स्थितियों के लिए समीकरण बनाइए और फिर उन्हें हल करके अज्ञात संख्याएँ ज्ञात कीजिए :

(a) एक संख्या के आठ गुने में 4 जोड़िए; आपको 60 प्राप्त होगा।

(b) एक संख्या का $\frac{1}{5}$ घटा 4, संख्या 3 देता है।

(c) यदि मैं किसी संख्या का तीन-चौथाई लेकर इसमें 3 जोड़ दूँ, तो मुझे 21 प्राप्त होते हैं।

(d) जब मैंने किसी संख्या के दुगुने में से 11 को घटाया, तो परिणाम 15 प्राप्त हुआ।

(e) मुन्ना ने 50 में से अपनी अभ्यास-पुस्तिकाओं की संख्या के तिगुने को घटाया, तो उसे परिणाम 8 प्राप्त होता है।

(f) इबेनहल एक संख्या सोचती है। वह इसमें 19 जोड़कर योग को 5 से भाग देती है, उसे 8 प्राप्त होता है।

(g) अनवर एक संख्या सोचता है। यदि वह इस संख्या के $\frac{5}{2}$ में से 7 निकाल दे, तो परिणाम 23 है।

2. निम्नलिखित को हल कीजिए :

(a) अध्यापिका बताती है कि उनकी कक्षा में एक विद्यार्थी द्वारा प्राप्त किए गए अधिकतम अंक, प्राप्त किए न्यूनतम अंक का दुगुना जमा 7 है। प्राप्त किए गए अधिकतम अंक 87 हैं। प्राप्त किए गए न्यूनतम अंक क्या हैं?

(b) किसी समद्विबाहु त्रिभुज में आधार कोण बराबर होते हैं। शीर्ष कोण 40° है। इस त्रिभुज के आधार कोण क्या हैं? (याद कीजिए कि त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है।)

(c) सचिन द्वारा बनाए गए रनों की संख्या राहुल द्वारा बनाए गए रनों की संख्या की दुगुनी है। उन दोनों द्वारा मिलकर बनाए गए कुल रन एक दोहरे शतक से 2 रन कम हैं। प्रत्येक ने कितने रन बनाए थे?

3. निम्नलिखित को हल कीजिए :

(i) इरफान कहता है कि उसके पास परमीत के पास जितने कँचे हैं उनके पाँच गुने से 7 अधिक कँचे हैं। इरफान के पास 37 कँचे हैं। परमीत के पास कितने कँचे हैं?

(ii) लक्ष्मी के पिता की आयु 49 वर्ष है। उनकी आयु लक्ष्मी की आयु के तीन गुने से 4 वर्ष अधिक है। लक्ष्मी की आयु क्या है?

(iii) सुंदरग्राम के निवासियों ने अपने गाँव के एक बाग में कुछ पेड़ लगाए। इनमें से कुछ पेड़ फलों के पेड़ थे। उन पेड़ों की संख्या, जो फलों के नहीं थे, फलों वाले पेड़ों की संख्या के तिगुने से 2 अधिक थी। यदि ऐसे पेड़ों की संख्या, जो फलों के नहीं थे, 77 है, तो लगाए गए फलों के पेड़ों की संख्या क्या थी?

4. निम्नलिखित पहेली को हल कीजिए :

मैं एक संख्या हूँ,
मेरी पहचान बताओ!
मुझे सात बार लो,
और एक पचास जोड़ो!
एक तिहरे शतक तक पहुँचने के लिए
आपको अभी भी चालीस चाहिए!

हमने क्या चर्चा की?

1. एक समीकरण, एक चर पर ऐसा प्रतिबंध होता है जिसमें दोनों पक्षों में व्यंजकों का मान बराबर होना चाहिए ।

2. चर का वह मान जिसके लिए समीकरण संतुष्ट होता है, समीकरण का हल कहलाता है ।

3. किसी समीकरण के बाएँ और दाएँ पक्षों को परस्पर बदलने पर, समीकरण नहीं बदलता ।

4. एक संतुलित समीकरण की स्थिति में यदि हम

(i) दोनों पक्षों में एक ही संख्या जोड़ें या (ii) दोनों पक्षों में से एक ही संख्या घटाएँ या (iii) दोनों पक्षों को एक ही संख्या से गुणा करें या (iv) दोनों पक्षों को एक ही संख्या से भाग दें तो संतुलन में कोई परिवर्तन नहीं होता है अर्थात् LHS और RHS के मान समान रहते हैं ।

5. उपरोक्त गुणों द्वारा समीकरण को चरणबद्ध विधि से हल किया जा सकता है। हमें दोनों पक्षों में एक से अधिक गणितीय संक्रियाएँ करनी पड़ती हैं, जिससे कि दोनों में से एक पक्ष में हमें केवल चर प्राप्त हो। अंतिम चरण समीकरण का हल है।

6. स्थानापन्न का अर्थ है एक पक्ष से दूसरे पक्ष में जाना । किसी संख्या को स्थानापन्न करना, संख्या को दोनों पक्षों में जोड़ने या दोनों पक्षों में से घटाने के समान ही है। जब आप एक संख्या को एक पक्ष से दूसरे पक्ष में स्थानापन्न करते हैं तो आप उसके चिह्न को बदल देते हैं । उदाहरणार्थ, समीकरण $x + 3 = 8$ में $+ 3$ का स्थानापन्न LHS से RHS करने पर $x = 8 - 3 = 5$ प्राप्त होता है । हम व्यंजकों का भी स्थानापन्न उसी विधि से करते हैं जैसे एक संख्या का स्थानापन्न करते हैं ।

7. हमने व्यावहारिक स्थितियों को, संगत सरल बीजीय व्यंजक के रूप में लिखना भी सीखा।

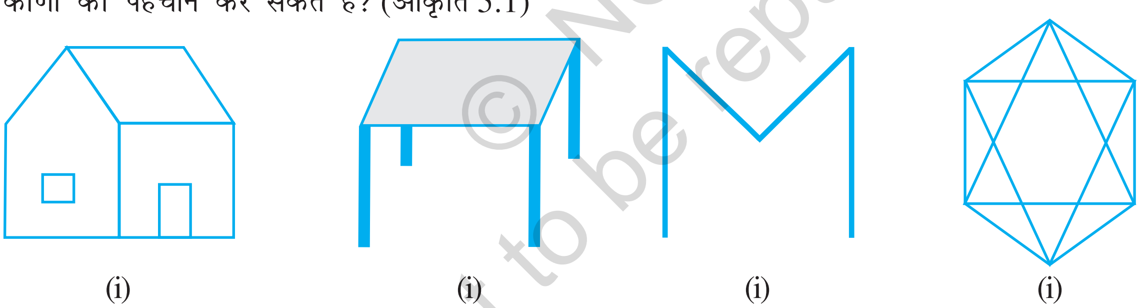
8. हमने यह भी सीखा कि हम किसी समीकरण के हल से प्रारंभ कर, दोनों पक्षों पर समान गणितीय संक्रियाओं की विधि का प्रयोग कर (उदाहरण के लिए दोनों पक्षों में समान संख्या जोड़ना या घटाना) एक समीकरण कैसे बना सकते हैं। साथ ही हमने यह भी सीखा कि हम किसी दिए गए समीकरण का व्यावहारिक स्थिति से संबंध बना सकते हैं और उस समीकरण के लिए कोई व्यावहारिक समस्या या पहेली भी बना सकते हैं ।

अध्याय 5

रेखा एवं कोण

5.1 रेखा

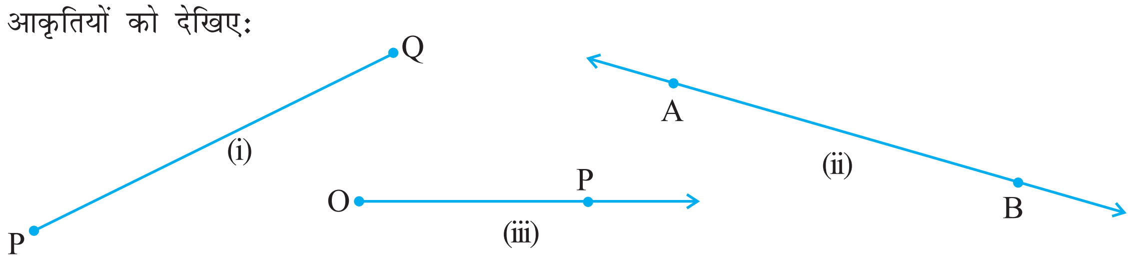
आप पहले से ही जानते हैं कि किसी दिए हुए आकार में विभिन्न रेखाएँ, रेखाखंडों एवं कोणों की पहचान कैसे की जाती है। क्या आप निम्नलिखित आकृतियों में विभिन्न रेखाखंडों एवं कोणों की पहचान कर सकते हैं? (आकृति 5.1)



आकृति 5.1

क्या आप यह भी जान सकते हैं कि निर्मित कोण, न्यून कोण अथवा अधिक कोण अथवा सम कोण हैं?

स्मरण कीजिए कि एक **रेखाखंड** के दो अंत **बिंदु** होते हैं। यदि हम इन दो अंत बिंदुओं को अपनी-अपनी दिशाओं में अपरिमित रूप में बढ़ाते हैं तो हमें एक **रेखा** प्राप्त होती है। इस प्रकार हम कह सकते हैं कि एक रेखा का कोई अंत बिंदु नहीं होता है। दूसरी तरफ़ स्मरण कीजिए कि किरण का एक अंत बिंदु (नामत: प्रारंभिक बिंदु) होता है। उदाहरणत: नीचे दी हुई आकृतियों को देखिए:



आकृति 5.2

यहाँ आकृति 5.2 (i) **रेखाखंड**, आकृति 5.2 (ii) **रेखा** एवं **आकृति** 5.2 (iii) **एक किरण**, को दर्शाती है। सामान्यत: एक रेखाखंड PQ को संकेत $\overline{PQ}$, रेखा AB को संकेत $\overleftrightarrow{AB}$ एवं किरण OP को संकेत $\overrightarrow{OP}$, से निर्दिष्ट किया जाता है। अपने दैनिक जीवन से रेखाखंडों एवं किरणों के कुछ उदाहरण दीजिए और उनके बारे में अपने मित्रों से चर्चा कीजिए।

पुन: स्मरण कीजिए कि रेखाएँ अथवा रेखाखंडों के मिलने पर **कोण** निर्मित होता है। उपर्युक्त आकृतियों (आकृति 5.1) में कोनों (corners) को प्रेक्षित कीजिए। जब दो रेखाएँ अथवा रेखाखंड किसी बिंदु पर प्रतिच्छेद करते हैं तो इन कोनों का निर्माण होता है। उदाहरणत: नीचे दी हुई आकृतियों को देखिए:

आकृति 5.3

आकृति 5.3 (i) में रेखाखंड AB एवं BC, कोण ABC का निर्माण करने के लिए, एक दूसरे को बिंदु B पर प्रतिच्छेद करते हैं और रेखाखंड BC एवं AC, कोण ACB का निर्माण करने के लिए एक दूसरे को C पर प्रतिच्छेद करते हैं इत्यादि। जबकि आकृति 5.3 (ii) में रेखाएँ PQ एवं RS एक दूसरे को बिंदु O पर प्रतिच्छेद करती हैं जिससे कोण POS, SOQ, QOR और ROP निर्मित होते हैं। कोण ABC को संकेत $\angle ABC$ द्वारा निरूपित किया जाता है। इस प्रकार आकृति 5.3 (i) में निर्मित तीन कोण $\angle ABC$, $\angle BCA$ एवं $\angle BAC$ हैं और आकृति 5.3 (ii) में निर्मित चार कोण $\angle POS$, $\angle SOQ$, $\angle QOR$ एवं $\angle POR$ हैं। आप पहले से ही अध्ययन कर चुके हैं कि न्यून कोण, अधिक कोण अथवा सम कोण के रूप में कोणों का वर्गीकरण कैसे किया जाता है।

प्रयास कीजिए

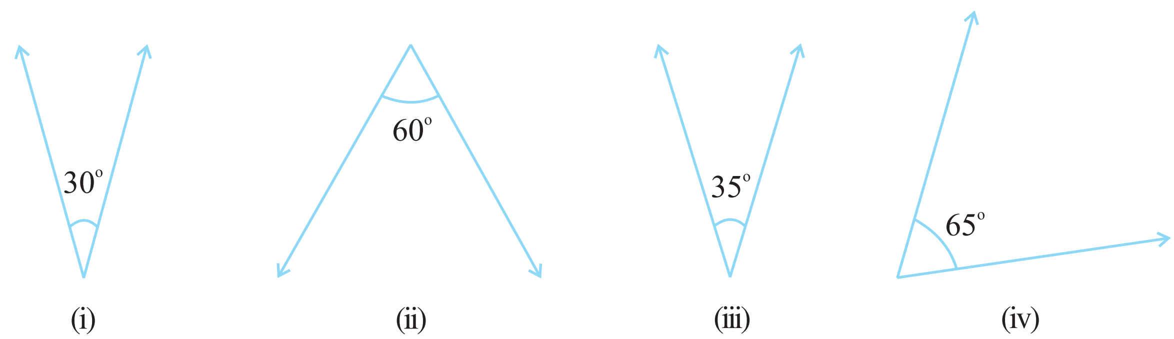
अपने आसपास दस आकृतियों को सूचीबद्ध कीजिए और उनमें पाए जाने वाले न्यून कोणों, अधिक कोणों एवं समकोणों की पहचान कीजिए।

टिप्पणी कोण ABC के माप के संदर्भ में, $m\angle ABC$ को साधारणत: $\angle ABC$ के रूप में लिखेंगे। प्रकरण से यह बात स्पष्ट हो जाएगी कि हम कोण के संदर्भ में अथवा इसके माप के सदर्भ में बात कर रहे हैं।

5.2 संबंधित कोण

5.2.1 पूरक कोण

जब दो कोणों के मापों का योग 90° होता है, तो ये कोण पूरक कोण (complementary angles) कहलाते हैं।



क्या ये दो कोण पूरक कोण हैं? हाँ **आकृति 5.4** क्या ये दो कोण पूरक कोण हैं? नहीं

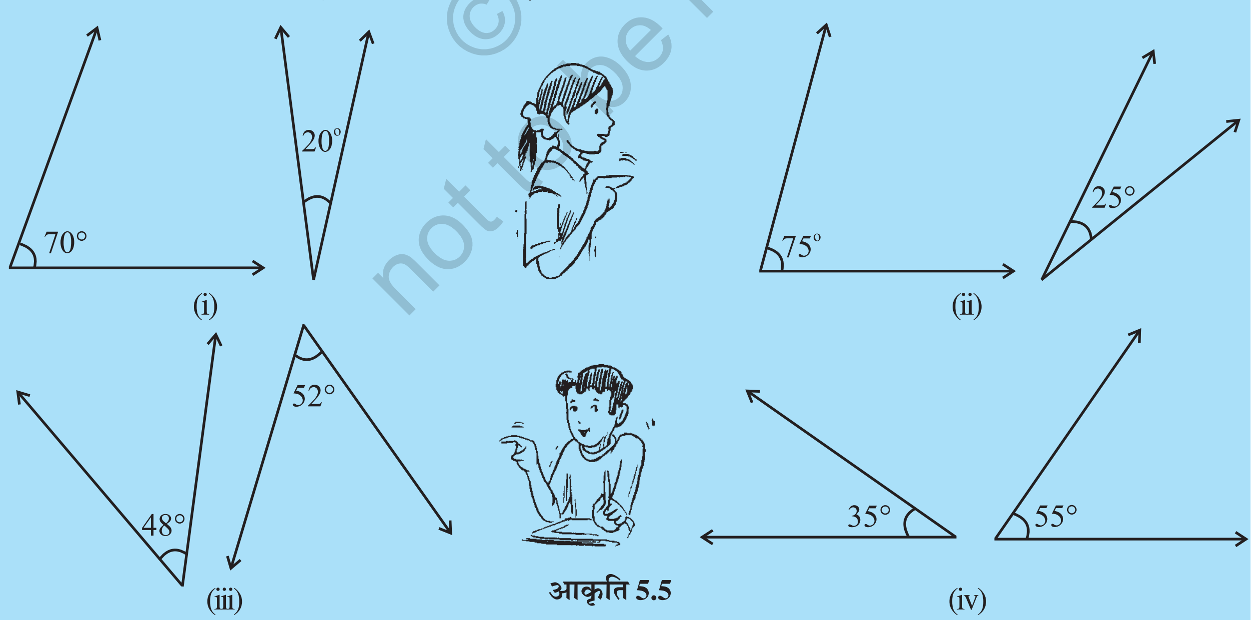
जब दो कोण पूरक होते हैं, तो इनमें से प्रत्येक कोण दूसरे कोण का **पूरक** कहलाता है। उपर्युक्त आरेख (आकृति 5.4) में "30° का कोण", "60° के कोण" का पूरक है और विलोमत:

सोचिए, चर्चा कीजिए एवं लिखिए

1. क्या दो न्यून कोण एक दूसरे के पूरक हो सकते हैं?
2. क्या दो अधिक कोण एक दूसरे के पूरक हो सकते हैं?
3. क्या दो समकोण एक दूसरे के पूरक हो सकते हैं?

प्रयास कीजिए

1. निम्नलिखित कोणों के युग्मों में कौन-से पूरक हैं? (आकृति 5.5)

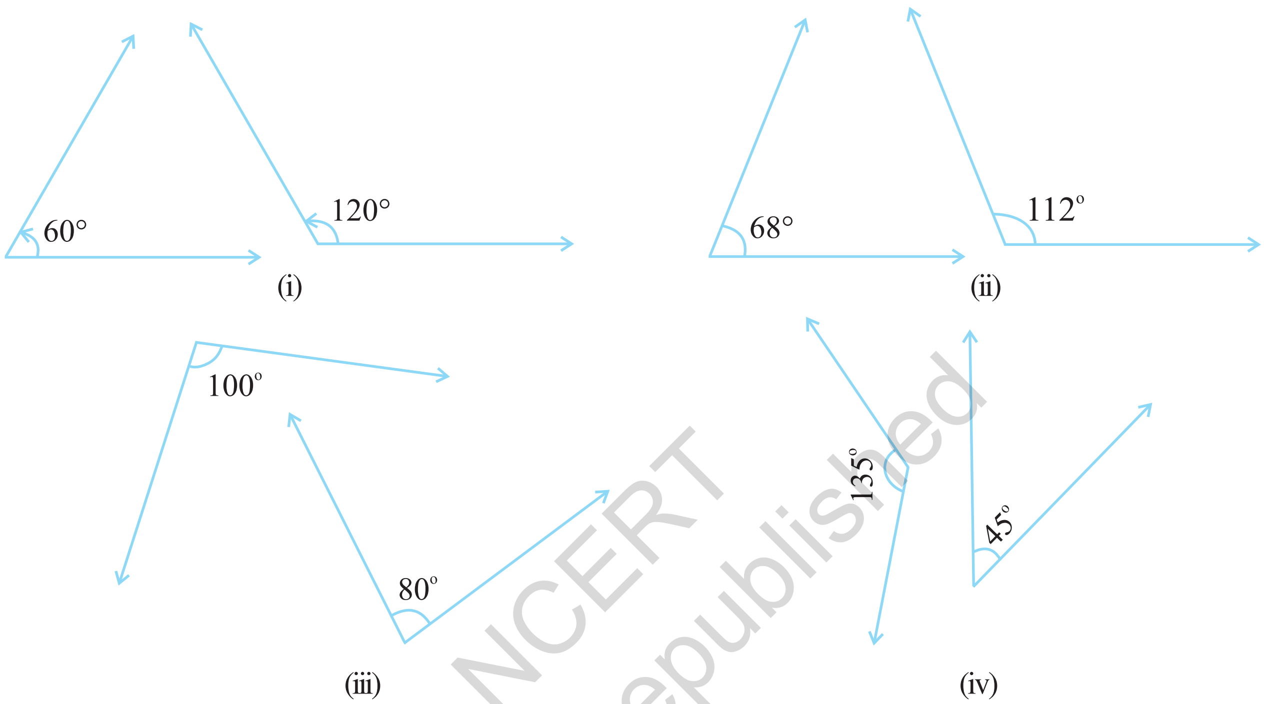


आकृति 5.5

2. निम्नलिखित कोणों में प्रत्येक के पूरक का माप क्या है?
   (i) 45° (ii) 65° (iii) 41° (iv) 54°
3. दो पूरक कोणों के मापों का अंतर 12° है। कोणों के माप ज्ञात कीजिए।

5.2.2 संपूरक कोण

आइए कोणों के निम्नलिखित युग्मों को देखते हैं (आकृति 5.6):



आकृति 5.6

क्या आप देखते हैं कि उपर्युक्त प्रत्येक युग्म में (आकृति 5.6) कोणों के मापों का योग 180° पाया जाता है ? कोणों के ऐसे युग्म **संपूरक कोण (supplementary angles)** कहलाते हैं। जब दो कोण संपूरक होते हैं तो उनमें से प्रत्येक कोण दूसरे कोण का **संपूरक** कहलाता है।

सोचिए, चर्चा कीजिए एवं लिखिए

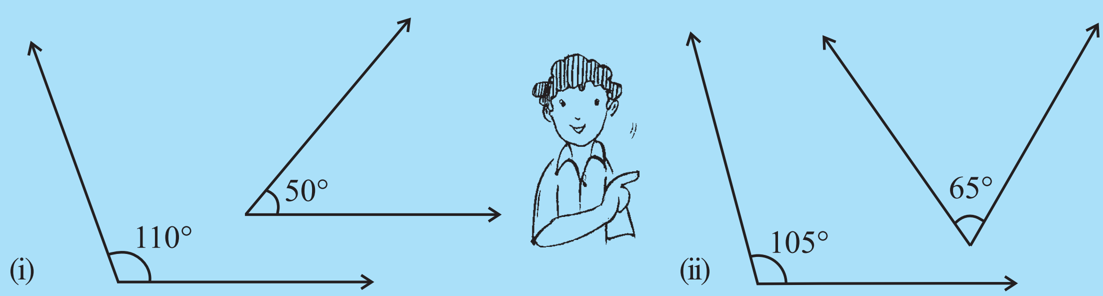
1. क्या दो अधिक कोण संपूरक हो सकते हैं?

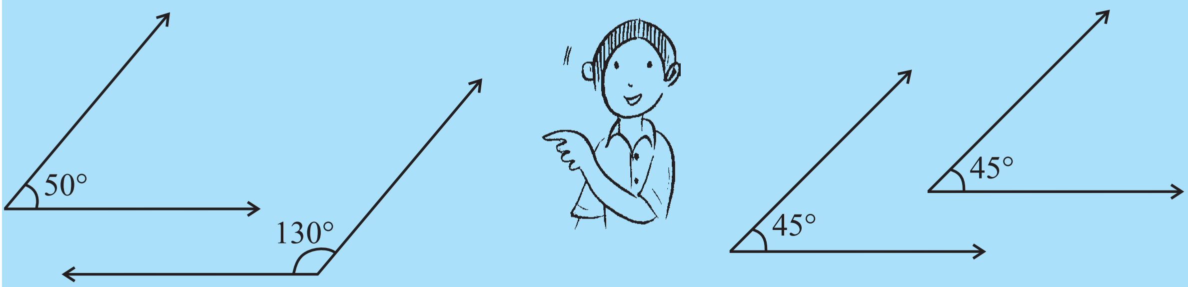
2. क्या दो न्यून कोण संपूरक हो सकते हैं?

3. क्या दो सम कोण संपूरक हो सकते हैं?

प्रयास कीजिए

1. आकृति 5.7 में संपूरक कोणों के युग्म ज्ञात कीजिए :





(iii) (iv)

आकृति 5.7

2. निम्नलिखित कोणों में प्रत्येक के संपूरक का माप क्या होगा?

(i) 100º (ii) 90º (iii) 55º (iv) 125º

3. दो संपूरक कोणों में बड़े कोण का माप छोटे कोण के माप से 44º अधिक है। कोणों के माप ज्ञात कीजिए।

5.2.3. आसन्न कोण

निम्नलिखित आकृतियों को देखिए :

जब आप एक पुस्तक को खोलते हैं तो यह उपर्युक्त आकृति की तरह दिखाई देती है। A और B में हम कोणों का एक ऐसा युग्म पाते हैं जिसमें एक कोण दूसरे के साथ संलग्न है।

किसी कार के इस स्टीयरिंग व्हील को देखिए। व्हील के केंद्र बिंदु पर तीन कोण पाए जाते हैं जिनमें से प्रत्येक कोण दूसरे के साथ संलग्न पाया जाता है।

आकृति 5.8

दोनों शीर्षों A और B पर, हम पाते हैं कि कोणों का एक युग्म एक दूसरे से संलग्न रखा गया है। ये कोण इस प्रकार हैं कि :

(i) उनका एक उभयनिष्ठ शीर्ष है

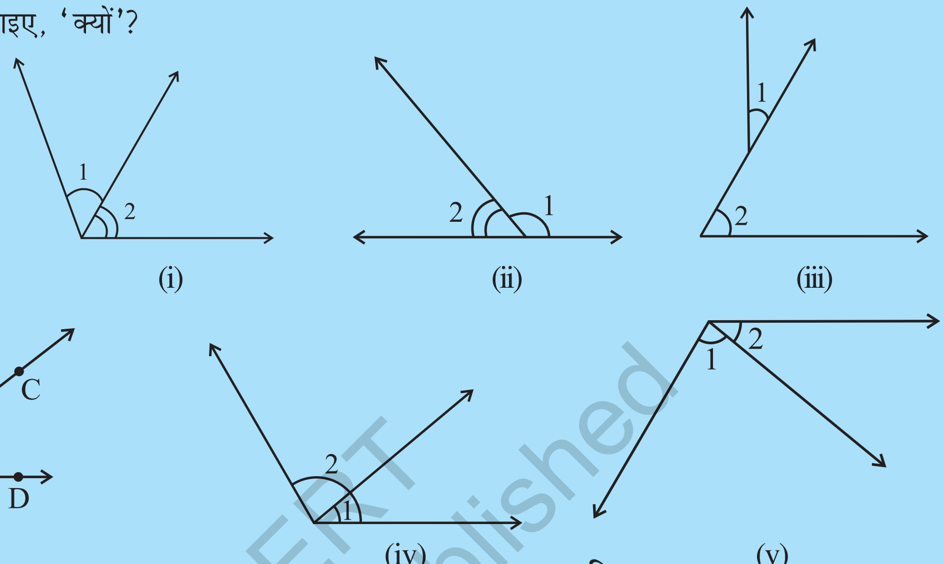
(ii) उनमें एक उभयनिष्ठ भुजा है और

(iii) जो भुजाएँ उभयनिष्ठ नहीं हैं, वे उभयनिष्ठ भुजा के एक-एक तरफ़ हैं।

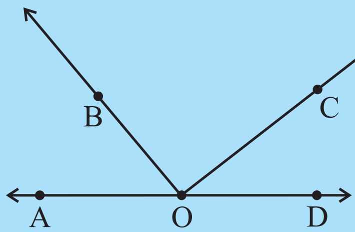
कोणों के ऐसे युग्म **आसन्न कोण (Adjacent angles)** कहलाते हैं। आसन्न कोणों में उभयनिष्ठ शीर्ष एवं उभयनिष्ठ भुजा होती है परंतु कोई भी अंत: बिंदु उभयनिष्ठ नहीं होता है।

प्रयास कीजिए

1. क्या 1 और 2 से अंकित कोण आसन्न हैं? [आकृति 5.9 (i)-(v)] यदि ये आसन्न नहीं हैं तो बताइए, 'क्यों'?



आकृति 5.9



आकृति 5.10

2. आकृति 5.10 में, क्या निम्नलिखित कोण आसन्न हैं?

(a) ∠AOB और ∠BOC (b) ∠BOD और ∠BOC

अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

सोचिए, चर्चा कीजिए एवं लिखिए

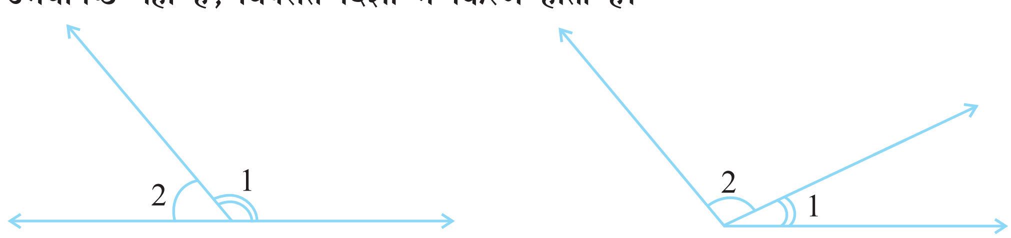
1. क्या दो आसन्न कोण संपूरक हो सकते हैं? **2.** क्या दो आसन्न कोण पूरक हो सकते हैं?

3. क्या दो अधिक कोण आसन्न कोण हो सकते हैं?

4. क्या एक न्यून कोण, अधिक कोण का आसन्न हो सकता है?

5.2.4 रैखिक युग्म

एक रैखिक युग्म (linear pair), ऐसे आसन्न कोणों का युग्म होता है जिनकी वे भुजाएँ जो उभयनिष्ठ नहीं हैं, विपरीत दिशा में किरणें होती हैं।



क्या ∠1, ∠2 एक रैखिक युग्म हैं? हाँ — (i)

क्या ∠1, ∠2 एक रैखिक युग्म है? नहीं (क्यों?) — (ii)

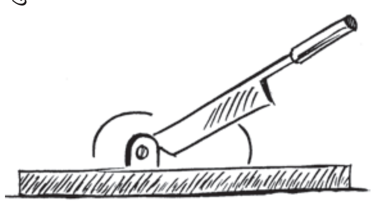
आकृति 5.11

उपर्युक्त आकृति 5.11 (i) में देखिए कि सम्मुख किरणें (जो $\angle 1$ एवं $\angle 2$ की उभयनिष्ठ भुजाएँ नहीं हैं) एक रेखा का निर्माण करती हैं। इस प्रकार $\angle 1 + \angle 2$ का मान 180° हो जाता है। रैखिक युग्म के कोण संपूरक होते हैं।

क्या आपने अपने आसपास में रैखिक युग्म के मॉडलों पर ध्यान दिया है?

सावधानीपूर्वक नोट कीजिए कि संपूरक कोणों का युग्म, रैखिम युग्म तभी बनाता है, जब प्रत्येक को दूसरे के आसन्न रखा जाए।

क्या आप अपने दैनिक जीवन में रैखिक युग्म के उदाहरण पाते हैं? सब्जी काटने वाले पट को प्रेक्षित कीजिए (आकृति 5.12)। क्या आप कह सकते हैं कि काटने वाला ब्लेड पट के साथ रैखिक युग्म बनाता है?



एक सब्जी काटने वाला पट

काटने वाला ब्लेड, पट के साथ कोणों का एक रैखिक युग्म बनाता है।

एक पेन स्टैंड

पेन, स्टैंड के साथ कोणों का एक रैखिक युग्म बनाता है।

आकृति 5.12

फिर से, पेन स्टैंड देखिए (आकृति 5.12)। क्या आप कह सकते हैं कि पेन, स्टैंड के साथ रैखिक युग्म बनाता है ?

सोचिए, चर्चा कीजिए एवं लिखिए

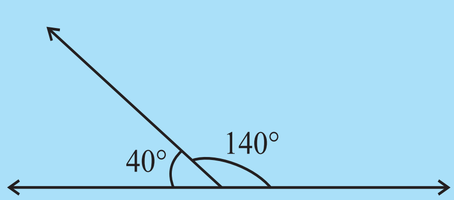
1. क्या दो न्यून कोण एक रैखिक युग्म बना सकते हैं?

2. क्या दो अधिक कोण एक रैखिक युग्म बना सकते हैं?

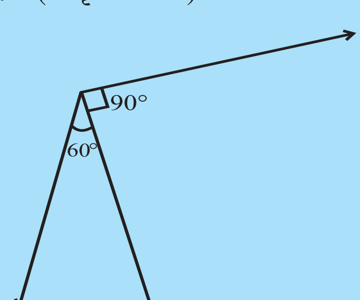
3. क्या दो समकोण एक रैखिक युग्म बना सकते हैं?

प्रयास कीजिए

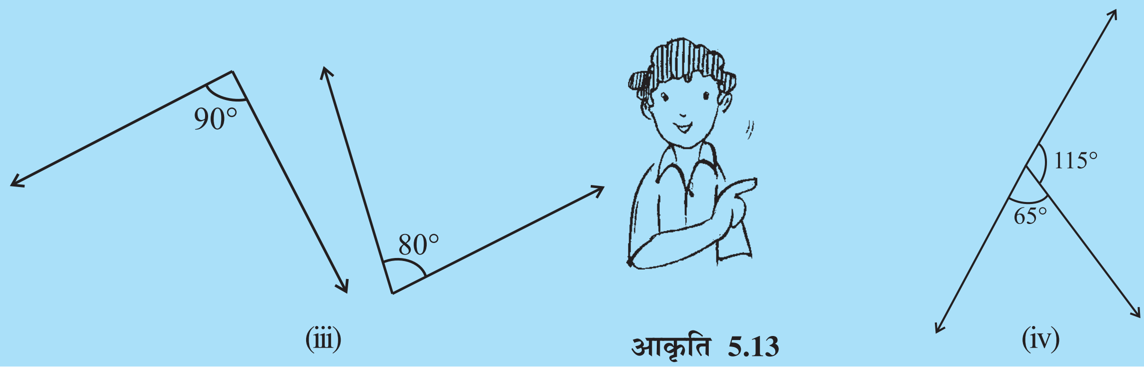
बताइए कोणों के निम्नलिखित युग्मों में से कौन-सा रैखिक युग्म बनाता है? (आकृति 5.13):



(i)

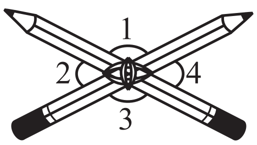


(ii)



आकृति 5.13

5.2.5 शीर्षाभिमुख कोण



आकृति 5.14

दो पेंसिल लीजिए और उन्हें मध्य में रबड़ बैंड की सहायता से एक-दूसरे के साथ बाँध दीजिए, जैसा कि आकृति 5.14 में दर्शाया गया है।

इस प्रकार निर्मित चार कोणों, $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ एवं $\angle 4$ को देखिए

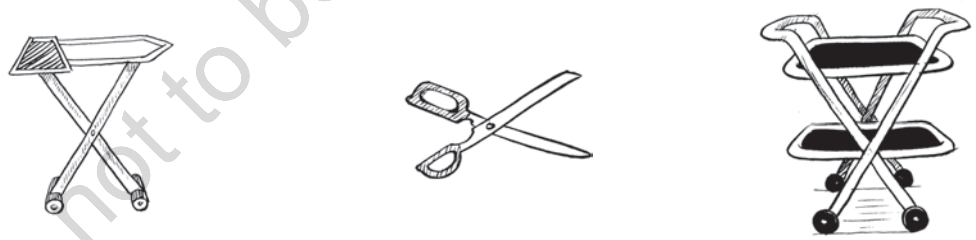
$\angle 1$, $\angle 3$ के शीर्षाभिमुख है और $\angle 4$, $\angle 2$ के शीर्षाभिमुख है।

$\angle 1$ एवं $\angle 3$ को हम शीर्षाभिमुख कोणों (vertically opposite angles) का एक युग्म कहते हैं।

क्या आप शीर्षाभिमुख कोणों के अन्य युग्म का नाम दे सकते हैं?

क्या $\angle 1$, $\angle 3$ के बराबर दिखाई देता है? क्या $\angle 2$, $\angle 4$ के बराबर दिखाई देता है?

इसको सत्यापित करने से पहले आइए हम शीर्षाभिमुख कोणों के लिए वास्तविक जीवन से कुछ उदाहरण देखते हैं (आकृति 5.15)।



आकृति 5.15

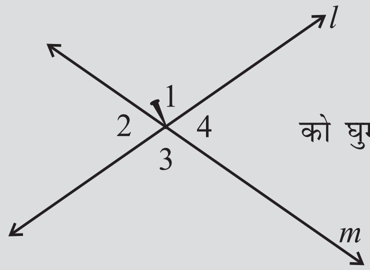
इन्हें कीजिए

किसी एक बिंदु पर प्रतिच्छेदित करती हुई दो रेखाएँ l और m खींचिए। अब आप $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ एवं $\angle 4$ अंकित कर सकते हैं जैसा कि आकृति 5.16 में दर्शाया गया है।

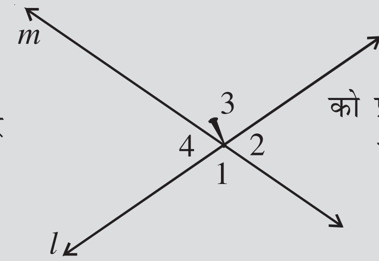
एक पारदर्शी कागज़ के ऊपर इस आकृति की एक अनुरेख प्रतिलिपि लीजिए।

उसको मूल प्रति के ऊपर इस प्रकार रखिए ताकि $\angle 1$ अपनी प्रतिलिपि को ढक ले, $\angle 2$ अपनी प्रतिलिपि को ढक ले, ... इत्यादि।

प्रतिच्छेदन बिंदु पर एक पिन लगाइए। प्रतिलिपि को $180°$ से घुमाइए। क्या रेखाएँ फिर से संपाती हो जाती हैं?



को घुमाकर



को प्राप्त किया जा सकता है।

आप पाते हैं कि $\angle 1$ एवं $\angle 3$ ने अपनी स्थितियाँ परस्पर बदल ली हैं और इसी प्रकार $\angle 2$ एवं $\angle 4$ ने भी अपनी स्थितियाँ परस्पर बदल ली हैं । यह सब रेखाओं की स्थिति को बदले बिना किया गया है। इस प्रकार $\angle 1 = \angle 3$ एवं $\angle 2 = \angle 4$.

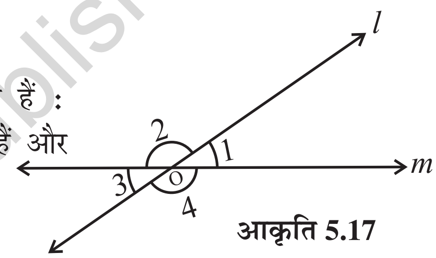
हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि **यदि दो रेखाएँ एक दूसरे को प्रतिच्छेद करती हैं तो इस प्रकार बने शीर्षाभिमुख कोण समान होते हैं।**

आइए ज्यामिति का उपयोग करते हुए इसे सिद्ध करने का प्रयास करते हैं।

आइए दो रेखाएँ l और m लेते हैं (आकृति 5.17)।

हम इस परिणाम पर तर्कसंगत युक्ति से निम्नलिखित प्रकार से पहुँच सकते हैं :

मान लीजिए l एवं m दो रेखाएँ हैं जो एक दूसरे को O पर प्रतिच्छेद करती हैं और इस प्रकार $\angle 1, \angle 2, \angle 3$ एवं $\angle 4$ निर्मित करती हैं।



आकृति 5.17

हम सिद्ध करना चाहते हैं कि $\angle 1 = \angle 3$ एवं $\angle 2 = \angle 4$

अब $\angle 1 = 180° - \angle 2$ ($\angle 1$ एवं $\angle 2$ रैखिक युग्म बनाते हैं इसलिए $\angle 1 + \angle 2 = 180°$) (i)

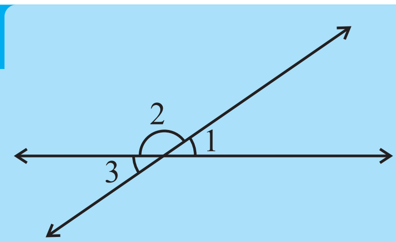
इसी प्रकार $\angle 3 = 180° - \angle 2$ ($\angle 2, \angle 3$ रैखिक युग्म बनाते हैं इसलिए $\angle 2 + \angle 3 = 180°$) (ii)

इसलिए $\angle 1 = \angle 3$ [(i) और (ii) से]

इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि $\angle 2 = \angle 4$ (प्रयास कीजिए)।

प्रयास कीजिए

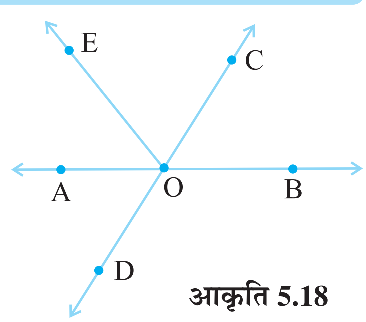
1. दी हुई आकृति में यदि $\angle 1 = 30°$, तो $\angle 2$ एवं $\angle 3$ ज्ञात कीजिए।
2. अपने आसपास से शीर्षाभिमुख कोणों का एक उदाहरण दीजिए।



उदाहरण 1 आकृति 5.18 में निम्नलिखित की पहचान कीजिए:

(i) आसन्न कोणों के पाँच युग्म (ii) तीन रैखिक युग्म

(iii) शीर्षाभिमुख कोणों के दो युग्म।



आकृति 5.18

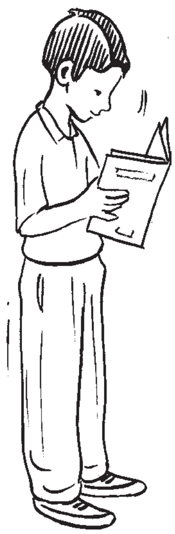
हल

(i) आसन्न कोणों के पाँच युग्म हैं : ($\angle$AOE, $\angle$EOC), ($\angle$EOC, $\angle$COB), ($\angle$AOC, $\angle$COB), ($\angle$COB, $\angle$BOD), ($\angle$EOB, $\angle$BOD)

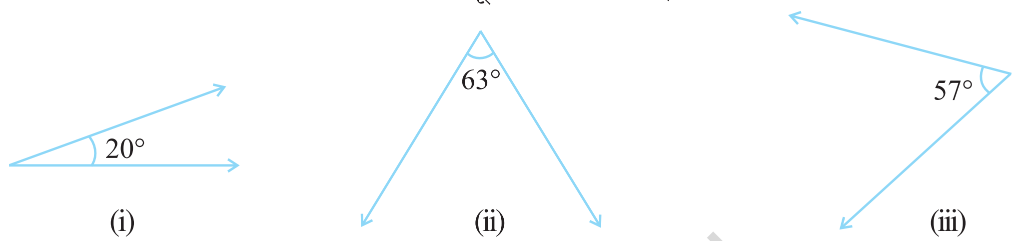
(ii) रैखिक युग्म हैं : ($\angle$AOE, $\angle$EOB), ($\angle$AOC, $\angle$COB), ($\angle$COB, $\angle$BOD)

(iii) शीर्षाभिमुख कोण हैं : ($\angle$COB, $\angle$AOD), ($\angle$AOC, $\angle$BOD)

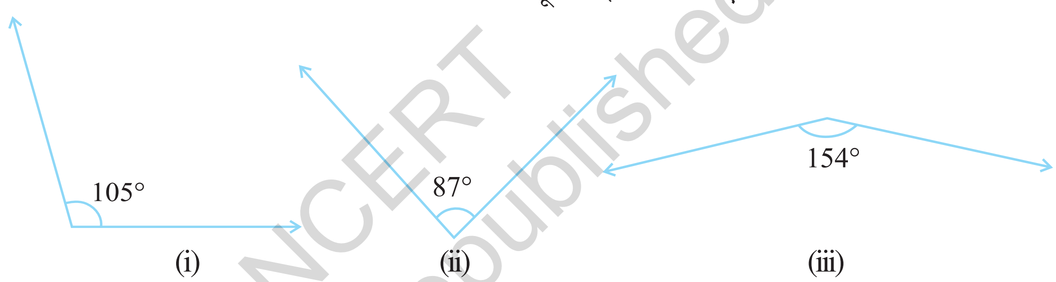
प्रश्नावली 5.1



1. निम्नलिखित कोणों में से प्रत्येक का पूरक ज्ञात कीजिए :



2. निम्नलिखित कोणों में से प्रत्येक का संपूरक ज्ञात कीजिए।



3. कोणों के निम्नलिखित युग्मों में से पूरक एवं संपूरक युग्मों की पृथक्-पृथक् पहचान कीजिए :

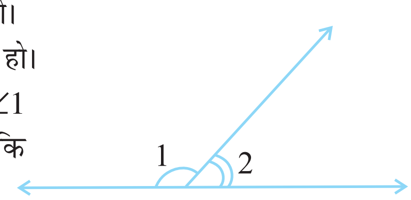
(i) 65°, 115° (ii) 63°, 27° (iii) 112°, 68°

(iv) 130°, 50° (v) 45°, 45° (vi) 80°, 10°

4. ऐसा कोण ज्ञात कीजिए जो अपने पूरक के समान हो।

5. ऐसा कोण ज्ञात कीजिए जो अपने संपूरक के समान हो।

6. दी हुई आकृति में $\angle 1$ एवं $\angle 2$ संपूरक कोण हैं। यदि $\angle 1$ में कमी की जाती है, तो $\angle 2$ में क्या परिवर्तन होगा ताकि दोनों कोण फिर भी संपूरक ही रहें।



7. क्या दो ऐसे कोण संपूरक हो सकते हैं यदि उनमें से दोनों

(i) न्यून कोण हैं? (ii) अधिक कोण हैं? (iii) समकोण हैं?

8. एक कोण 45° से बड़ा है। क्या इसका पूरक कोण 45° से बड़ा है अथवा 45° के बराबर है अथवा 45° से छोटा है?

9. संलग्न आकृति में :

(i) क्या $\angle 1$, $\angle 2$ का आसन्न है?

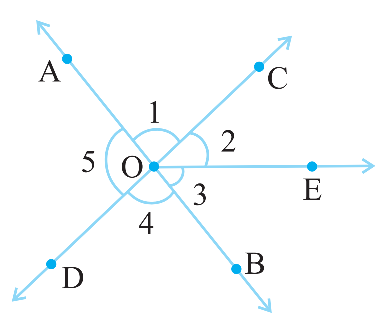
(ii) क्या $\angle$AOC, $\angle$AOE का आसन्न है?

(iii) क्या $\angle$COE एवं $\angle$EOD रैखिक युग्म बनाते हैं?

(iv) क्या $\angle$BOD एवं $\angle$DOA संपूरक है?

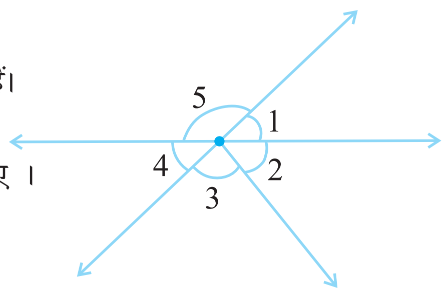
(v) क्या $\angle 1$ का शीर्षाभिमुख कोण $\angle 4$ है?

(vi) $\angle 5$ का शीर्षाभिमुख कोण क्या हैं?

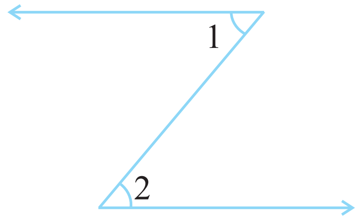


10. पहचानिए कि कोणों के कौन से युग्म :

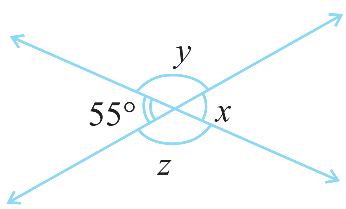
(i) शीर्षाभिमुख कोण हैं। (ii) रैखिक युग्म हैं।



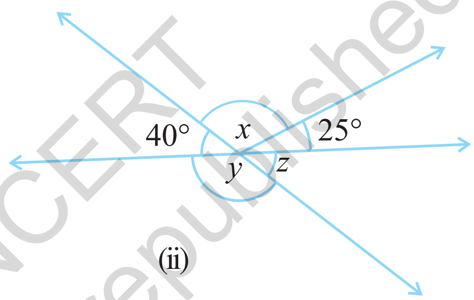
11. निम्नलिखित आकृति में क्या $\angle 1$, $\angle 2$ का आसन्न है? कारण लिखिए ।



12. निम्नलिखित में से प्रत्येक में कोण x, y एवं z के मान ज्ञात कीजिए।



(i)



(ii)

13. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

(i) यदि दो कोण पूरक हैं, तो उनके मापों का योग _______ है।

(ii) यदि दो कोण संपूरक हैं तो उनके मापों का योग _______ है।

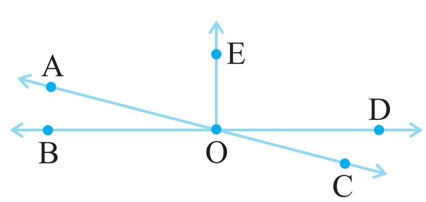
(iii) रैखिक युग्म बनाने वाले दो कोण _______________ होते हैं।

(iv) यदि दो आसन्न कोण संपूरक हैं, तो वे ___________ बनाते हैं।

(v) यदि दो रेखाएँ एक-दूसरे को एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करती हैं तो शीर्षाभिमुख कोण हमेशा _____________ होते हैं।

(vi) यदि दो रेखाएँ एक-दूसरे को एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करती है और यदि शीर्षाभिमुख कोणों का एक युग्म न्यून कोण है, तो शीर्षाभिमुख कोणों का दूसरा युग्म ________ है।

14. संलग्न आकृति में निम्नलिखित कोण युग्मों को नाम दीजिए :



(i) शीर्षाभिमुख अधिक कोण

(ii) आसन्न पूरक कोण

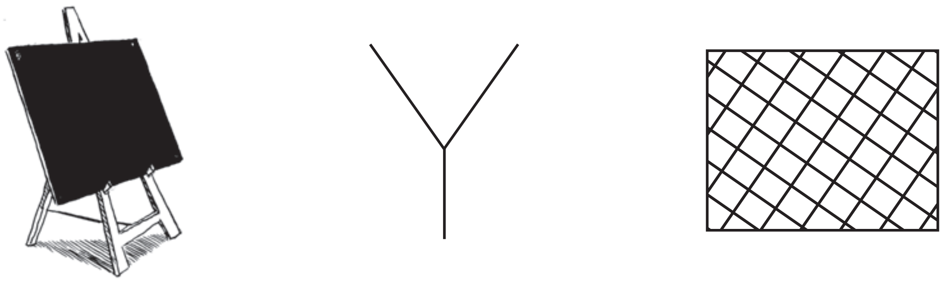
(iii) समान संपूरक कोण

(iv) असमान संपूरक कोण

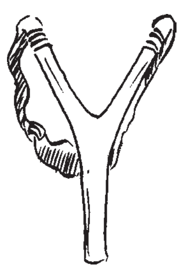
(v) आसन्न कोण जो रैखिक युग्म नहीं बनाते हैं।

5.3 रेखा युग्म

5.3.1 प्रतिच्छेदी रेखाएँ

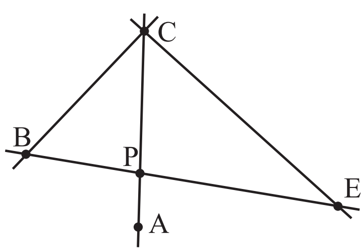


आकृति 5.19



स्टैंड पर रखा हुआ श्यामपट्ट, रेखाखंडों द्वारा निर्मित अक्षर Y और एक खिड़की का जालीदार दरवाज़ा, इन सभी में उभयनिष्ठ क्या हैं? ये प्रतिच्छेदी रेखाओं (intersecting lines) के उदाहरण हैं (आकृति 5.19)। दो रेखाएँ *l* और *m* **प्रतिच्छेद** करती हैं यदि उनमें एक बिंदु उभयनिष्ठ है। यह उभयनिष्ठ बिंदु उनका **प्रतिच्छेद बिंदु** कहलाता है।

सोचिए, चर्चा कीजिए एवं लिखिए



आकृति 5.20

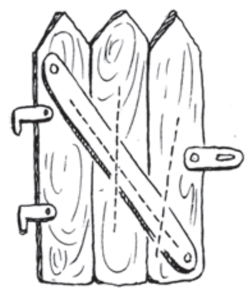
आकृति 5.20 में, AC और BE, P पर प्रतिच्छेद करती हैं।
AC और BC, C पर प्रतिच्छेद करती हैं। AC और EC, C पर प्रतिच्छेद करती हैं।
प्रतिच्छेदी रेखाखंडों के दस अन्य युग्म ज्ञात करने का प्रयास कीजिए।
क्या दो रेखाएँ अथवा रेखाखंड आवश्यक रूप से प्रतिच्छेद करने चाहिए?
क्या आप इस आकृति में दो रेखाखंडों के युग्म ज्ञात कर सकते हैं जो प्रतिच्छेदी नहीं है? क्या दो रेखाएँ एक से ज्यादा बिंदुओं पर प्रतिच्छेद कर सकती हैं। इसके बारे में विचार कीजिए।

प्रयास कीजिए

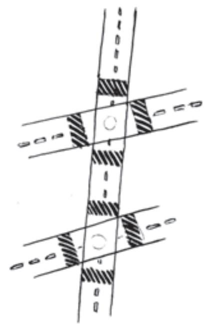
1. अपने आसपास के परिवेश से ऐसे उदाहरण ज्ञात कीजिए जहाँ रेखाएँ सम कोण पर प्रतिच्छेद करती हैं।
2. एक समबाहु त्रिभुज के शीर्षों पर प्रतिच्छेदी रेखाओं द्वारा निर्मित कोणों के माप ज्ञात कीजिए।
3. एक आयत खींचिए और प्रतिच्छेदी रेखाओं द्वारा निर्मित चार शीर्षों के कोणों के माप ज्ञात कीजिए।
4. यदि दो रेखाएँ एक-दूसरे को प्रतिच्छेद करती हैं, तो क्या वे हमेशा एक-दूसरे को सम कोण पर प्रतिच्छेद करती हैं?

5.3.2 तिर्यक छेदी रेखा

शायद, आपने दो अथवा अधिक सड़कों को पार करते हुए एक सड़क देखी होगी अथवा कई अन्य रेल पटरियों को पार करते हुए एक रेल पटरी देखी होगी। इनसे तिर्यक छेदी रेखा या तिर्यक रेखा (transversal) का अनुभव प्राप्त होता है (आकृति 5.21)।



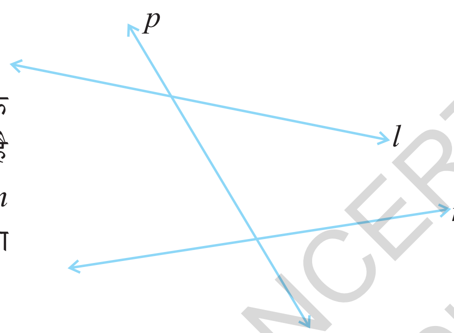
(i)



(ii)

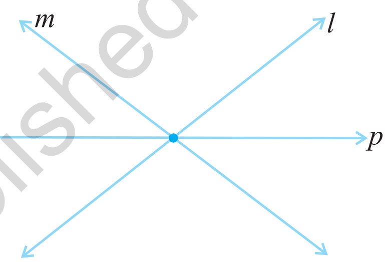
आकृति 5.21

एक ऐसी रेखा जो दो अथवा अधिक रेखाओं को भिन्न बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करती है, **तिर्यक छेदी रेखा** (transversal) कहलाती है। आकृति 5.22 में, p, रेखाएँ l और m की तिर्यक छेदी रेखा है।



आकृति 5.22

आकृति 5.23 में, p एक तिर्यक छेदी रेखा नहीं है तथापि यह रेखाएँ l और m को काटती है। क्या आप बता सकते हैं 'क्यों'?



आकृति 5.23

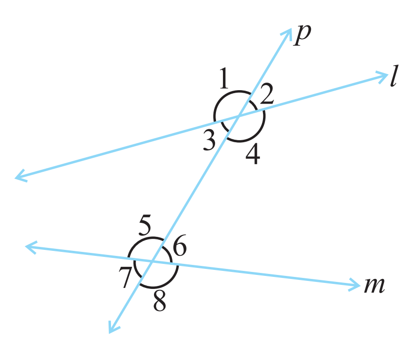
प्रयास कीजिए

1. मान लीजिए दो रेखाएँ दी हुई हैं। इन रेखाओं के लिए आप कितनी तिर्यक छेदी रेखाएँ खींच सकते हैं?
2. यदि एक रेखा तीन रेखाओं की तिर्यक छेदी रेखा है, तो बताइए कितने प्रतिच्छेदन बिंदु हैं।
3. अपने आसपास कुछ तिर्यक छेदी रेखाएँ ढूँढने का प्रयास कीजिए।

5.3.3 तिर्यक छेदी रेखा द्वारा निर्मित कोण

आकृति 5.24 में, आप देखते हैं कि रेखाएँ l एवं m तिर्यक छेदी रेखा p द्वारा काटी जा रही है। इस प्रकार बनने वाले 1 से 8 तक अंकित कोणों के विशिष्ट नाम हैं:

अंत:कोण	$\angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6,$
बाह्य कोण	$\angle 1, \angle 2, \angle 7, \angle 8$
संगत कोणों के युग्म	$\angle 1$ और $\angle 5$, $\angle 2$ और $\angle 6$, $\angle 3$ और $\angle 7$, $\angle 4$ और $\angle 8$.
एकांतर अंत: कोणों के युग्म	$\angle 3$ और $\angle 6$, $\angle 4$ और $\angle 5$
एकांतर बाह्य कोणों के युग्म	$\angle 1$ और $\angle 8$, $\angle 2$ और $\angle 7$
तिर्यक छेदी रेखा के एक ही तरफ़ बने अंत:कोणों के युग्म	$\angle 3$ और $\angle 5$, $\angle 4$ और $\angle 6$

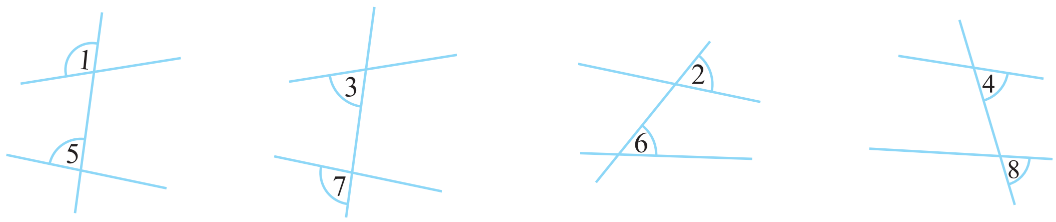


आकृति 5.24

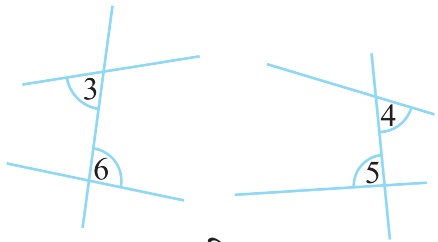
टिप्पणी: आकृति 5.25 में ($\angle 1$ एवं $\angle 5$ जैसे) संगत कोणों में निम्नलिखित सम्मिलित होते हैं :

(i) विभिन्न शीर्ष (ii) तिर्यक छेदी रेखा के एक ही तरफ बने होते हैं।

(iii) दो रेखाओं के सापेक्ष संगत स्थितियों (ऊपर अथवा नीचे, बायाँ अथवा दायाँ) में होते हैं।



आकृति 5.25



आकृति 5.26

आकृति 5.26 में ($\angle 3$ एवं $\angle 6$ जैसे) अंतः एकांतर कोण

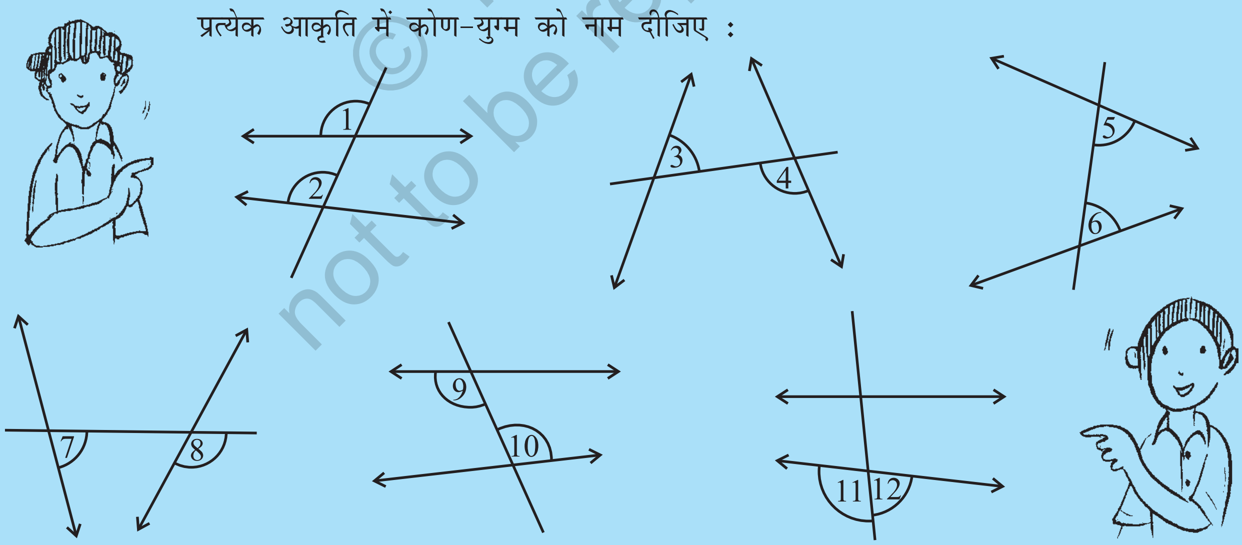
(i) के विभिन्न शीर्ष होते हैं।

(ii) तिर्यक छेदी रेखा के सम्मुख स्थिति पर बने होते हैं।

(iii) दो रेखाओं के "मध्य" स्थित होते हैं।

प्रयास कीजिए

प्रत्येक आकृति में कोण-युग्म को नाम दीजिए :



5.3.4 समांतर रेखाओं की तिर्यक छेदी रेखा

क्या आपको याद है कि समांतर रेखाएँ क्या हैं । ये किसी तल में ऐसी रेखाएँ होती हैं जो एक-दूसरे से कहीं नहीं मिलती। क्या आप निम्नलिखित आकृतियों में समांतर रेखाओं की पहचान कर सकते हैं? (आकृति 5.27)

आकृति 5.27

समांतर रेखाओं की तिर्यक छेदी रेखा या तिर्यक रेखा से बहुत ही रुचिकर परिणाम प्राप्त होते हैं।

इन्हें कीजिए

एक रेखांकित कागज़ लीजिए। दो मोटी रंगीली समांतर रेखाएँ l और m खींचिए।

रेखाएँ l और m की एक तिर्यक छेदी रेखा t खींचिए। $\angle 1$ और $\angle 2$ को लेबल कीजिए जैसा कि आकृति 5.28(i) में दर्शाया गया है।

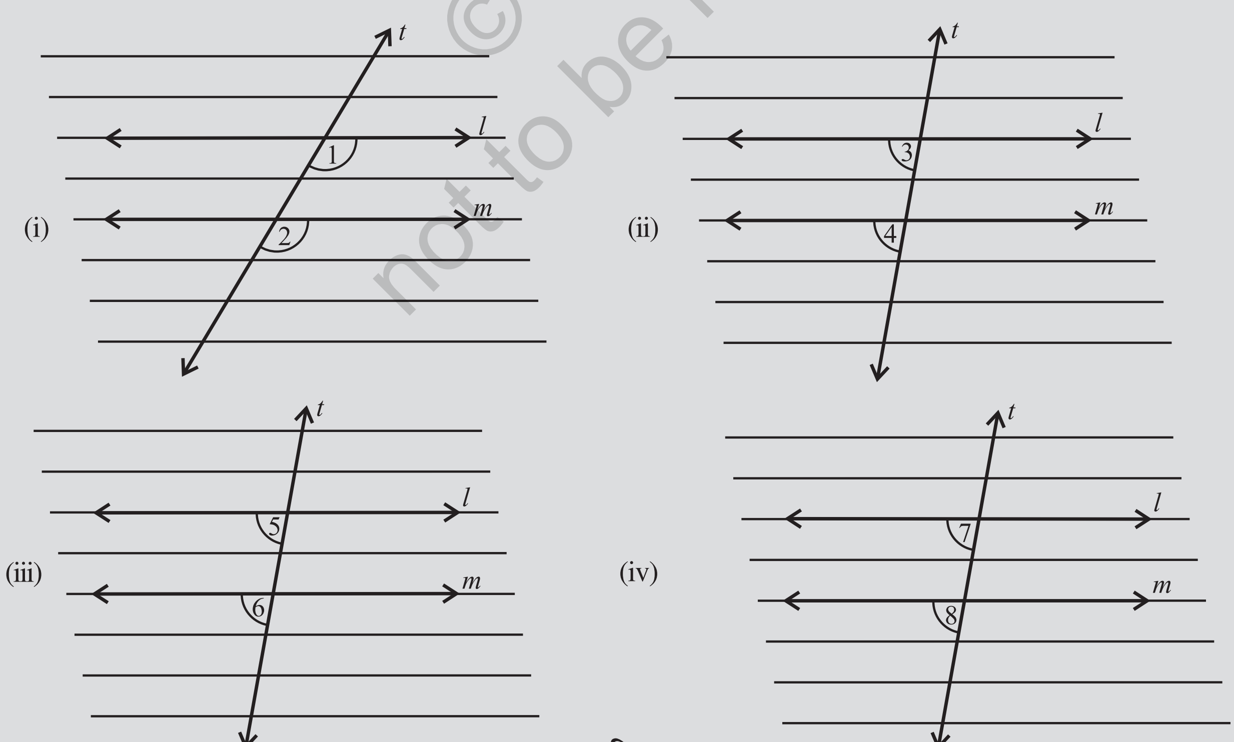
खींची गई आकृति पर एक अनुरेखण कागज़ (ट्रेसिंग पेपर) रखिए। रेखाएँ l, m और t की प्रतिलिपि बनाइए।

ट्रेसिंग पेपर को t के अनु तब तक खिसकाइए जब तक l, m के संपाती न हो जाए।

आप पाते हैं कि प्रतिलिपित आकृति का $\angle 1$, मूल आकृति के $\angle 2$ के संपाती हो जाता है।

वास्तव में आप निम्नलिखित परिणामों को अनुरेखण एवं खिसकाने के क्रियाकलाप से सत्यापित कर सकते हैं।

(i) $\angle 1 = \angle 2$ (ii) $\angle 3 = \angle 4$ (iii) $\angle 5 = \angle 6$ (iv) $\angle 7 = \angle 8$



आकृति 5.28

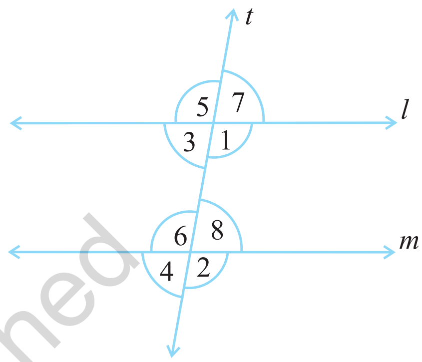
यह क्रियाकलाप निम्नलिखित तथ्य को दृष्टांतित करती है :

> यदि दो समांतर रेखाएँ किसी तिर्यक छेदी रेखा द्वारा काटी जाती है, तो संगत कोणों के प्रत्येक युग्म का माप समान होता है।

इस परिणाम का उपयोग करते हुए हम एक दूसरा रुचिकर परिणाम प्राप्त करते हैं।आकृति 5.29 को देखिए।

जब समांतर रेखाएँ l और m, रेखा t द्वारा काटी जाती हैं,
तो $\angle 3 = \angle 7$ (शीर्षाभिमुख कोण)
परंतु $\angle 7 = \angle 8$ (संगत कोण) इसलिए $\angle 3 = \angle 8$
इसी प्रकार आप दर्शा सकते हैं कि $\angle 1 = \angle 6$.
अत: हमें निम्नलिखित परिणाम की प्राप्ति होती है:

> यदि दो समांतर रेखाएँ किसी तिर्यक छेदी रेखा द्वारा काटी जाती हैं, तो अंत: एकांतर कोणों का प्रत्येक युग्म समान होता है।



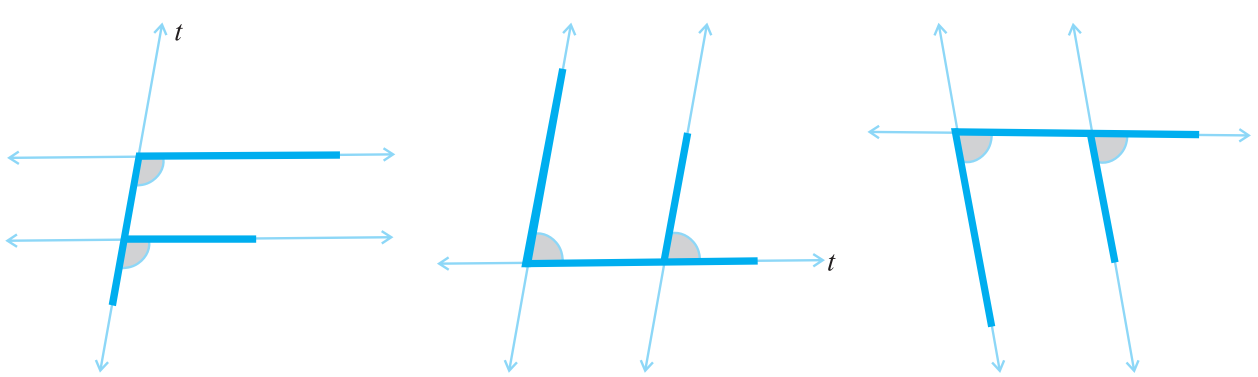
आकृति 5.29

यह दूसरा परिणाम हमें एक और रुचिकर गुणधर्म की ओर अग्रसर करता है। फिर से आकृति 5.29 में दिए हुए आलेख से, $\angle 3 + \angle 1 = 180°$ ($\angle 3$ और $\angle 1$ रैखिक युग्म बनाते हैं)
परंतु $\angle 1 = \angle 6$ (अंत: एकांतर कोणों का एक युग्म)
इस प्रकार हम कह सकते हैं कि $\angle 3 + \angle 6 = 180°$।
इसी प्रकार $\angle 1 + \angle 8 = 180°$. इस प्रकार हमें निम्नलिखित परिणाम की प्राप्ति होती है :

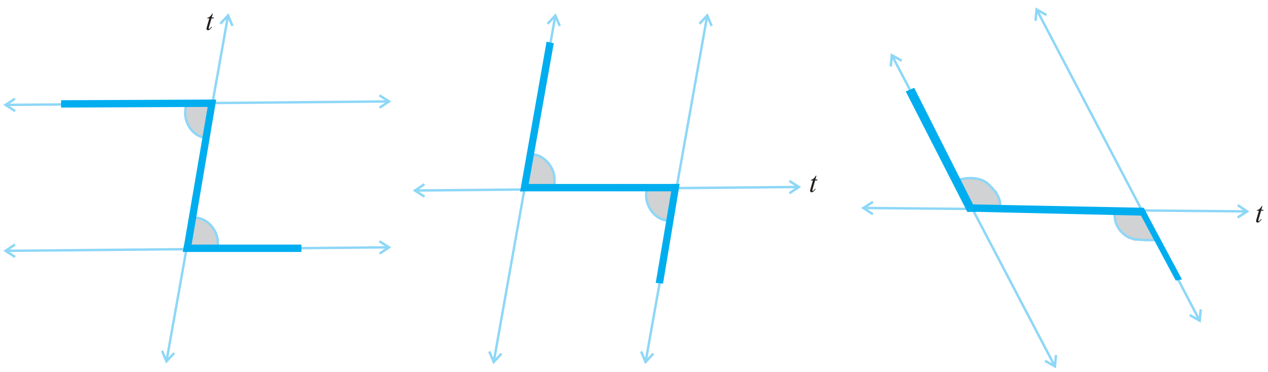
> यदि दो समांतर रेखाएँ किसी एक तिर्यक छेदी रेखा द्वारा काटी जाती हैं तो तिर्यक छेदी रेखा के एक ही तरफ़ को बने अंत: कोणों का प्रत्येक युग्म संपूरक होता है।

सुसंगत आकृतियों को ध्यान में रखते हुए आप इन परिणामों को बहुत आसानी से स्मरण कर सकते हैं:

संगत कोणों के लिए F-आकार को ध्यान में रखिए



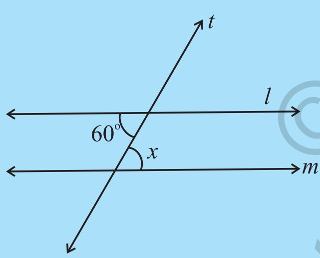
एकांतर कोणों के लिए Z - आकार को ध्यान में रखिए।



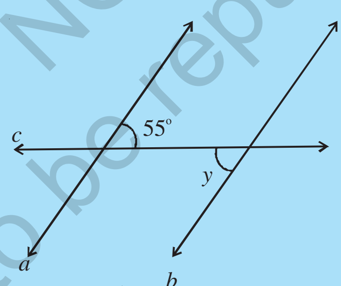
इन्हें कीजिए

समांतर रेखाओं का एक युग्म एवं एक तिर्यक छेदी रेखा खींचिए। कोणों को मापकर उपर्युक्त तीन कथनों का सत्यापन कीजिए।

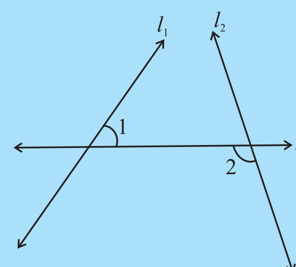
प्रयास कीजिए



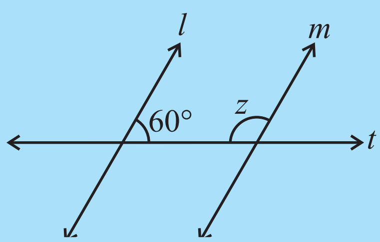
$l \parallel m$,
t एक तिर्यक छेदी रेखा है
$\angle x = ?$



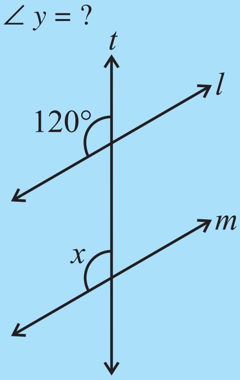
$a \parallel b$,
c एक तिर्यक छेदी रेखा है
$\angle y = ?$



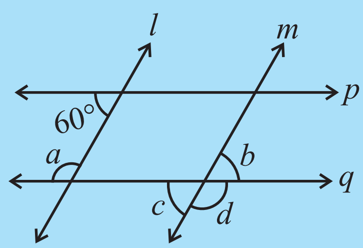
l_1, l_2 दो रेखाएँ हैं,
t एक तिर्यक छेदी रेखा है।
क्या $\angle 1 = \angle 2$ हैं?



$l \parallel m$,
t एक तिर्यक छेदी रेखा है,
$\angle z = ?$



$l \parallel m$,
t एक तिर्यक छेदी रेखा है,
$\angle x = ?$

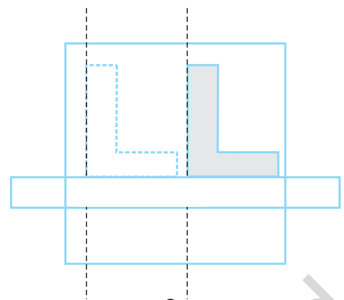


$l \parallel m, p \parallel q$,
a, b, c, d ज्ञात कीजिए

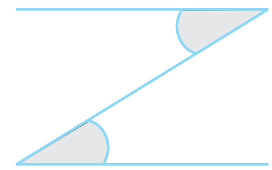
5.4 समांतर रेखाओं की जाँच

यदि दो रेखाएँ समांतर हैं, तो आप जानते हैं कि एक तिर्यक छेदी रेखा की सहायता से, समान संगत कोणों का एक युग्म प्राप्त होता है, समान अंत: एकांतर कोणों का युग्म प्राप्त होता है और तिर्यक छेदी रेखा के एक ही तरफ़ बनें अंत: कोण, जो संपूरक होते हैं।

जब दो रेखाएँ दी हुई हैं तो क्या कोई ऐसी विधि है जिसकी सहायता से यह जाँच की जा सके कि दी हुई रेखाएँ समांतर हैं अथवा नहीं? जीवन से जुड़ी अनेक परिस्थितियों में आपको इस कौशल की आवश्यकता होती है।



आकृति 5.30



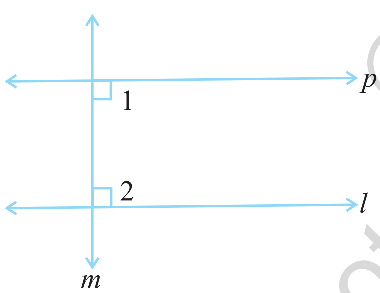
आकृति 5.31

इन खंडों को (आकृति 5.30) खींचने के लिए एक नक्शानवीश, बढ़ई के वर्ग एवं रुलर का प्रयोग करता है। वह दावा करता है कि ये समांतर हैं। कैसे? क्या आप देख पाते हैं कि उसने संगत कोणों को समान रखा है? (यहाँ तिर्यक छेदी रेखा क्या है?)

अत: जब एक तिर्यक छेदी रेखा दो रेखाओं को इस प्रकार काटती है कि संगत कोणों के युग्म समान हैं, तो रेखाएँ समांतर होती हैं।

अक्षर Z (आकृति 5.31) को देखिए। यहाँ क्षैतिज खंड समांतर हैं क्योंकि एकांतर कोण समान हैं।

जब एक तिर्यक छेदी रेखा दो रेखाओं को इस प्रकार काटती है कि अंत: एकांतर कोणों का युग्म समान है, तो रेखाएँ समांतर होती हैं।



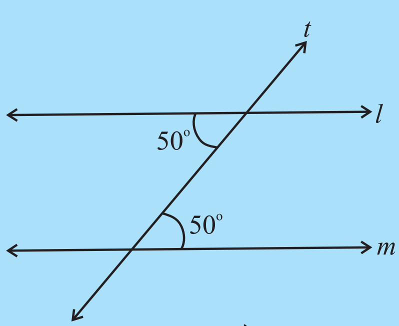
आकृति 5.32

एक रेखा l खींचिए (आकृति 5.32).

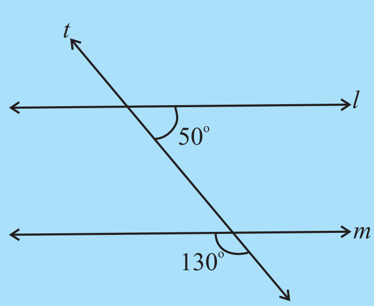
रेखा l के लंबवत् एक रेखा m खींचिए। एक रेखा p इस प्रकार खींचिए ताकि p, m के लंबवत् हो। इस प्रकार p, l लंब पर लंब है। आप पाते हैं $p \parallel l$ कैसे? यह इसलिए है क्योंकि आपने p को इस प्रकार खींचा है कि $\angle 1 + \angle 2 = 180°$.

अत: जब एक तिर्यक छेदी रेखा दो रेखाओं को इस प्रकार काटती है कि तिर्यक छेदी रेखा के एक ही तरफ़ बने अंत: कोणों का युग्म संपूरक है, तो रेखाएँ समांतर होती हैं।

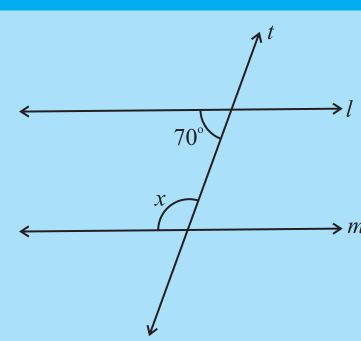
प्रयास कीजिए



क्या $l \parallel m$ है? क्यों



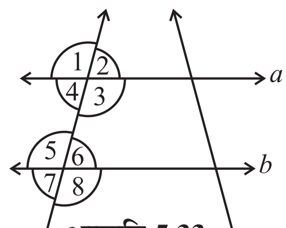
क्या $l \parallel m$ है? क्यों



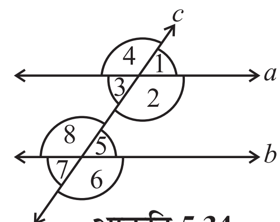
यदि $l \parallel m$, तो x क्या है?

प्रश्नावली 5.2

1. निम्नलिखित कथनों में प्रत्येक कथन में उपयोग किए गए गुणधर्म का वर्णन कीजिए (आकृति 5.33)।
   (i) यदि $a \parallel b$, तो $\angle 1 = \angle 5$
   (ii) यदि $\angle 4 = \angle 6$, तो $a \parallel b$.
   (iii) यदि $\angle 4 + \angle 5 = 180°$, तो $a \parallel b$

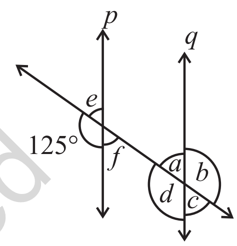


आकृति 5.33

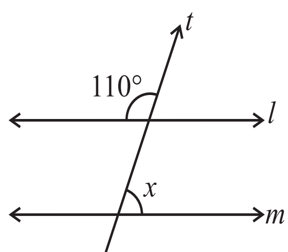


आकृति 5.34

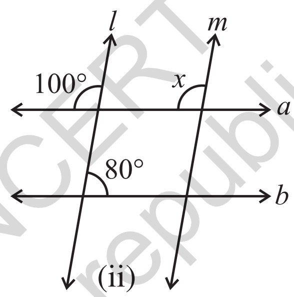
2. आकृति 5.34 में निम्नलिखित की पहचान कीजिए:
   (i) संगत कोणों के युग्म (ii) अंत: एकांतर कोणों के युग्म
   (iii) तिर्यक छेदी रेखा के एक तरफ़ बने अंत:कोणों के युग्म
   (iv) शीर्षाभिमुख कोण



3. सलंग्न आकृति में $p \parallel q$। अज्ञात कोण ज्ञात कीजिए।
4. यदि $l \parallel m$ है, तो निम्नलिखित आकृतियों में प्रत्येक में x का मान ज्ञात कीजिए।

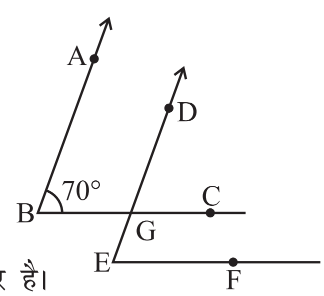


(i)

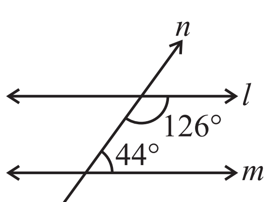


(ii)

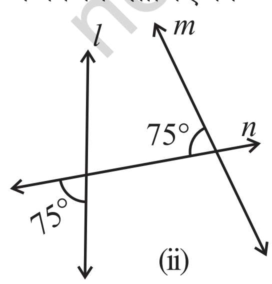
5. दी हुई आकृति में, दो कोणों की भुजाएँ समांतर हैं। यदि $\angle ABC = 70°$, तो
   (i) $\angle DGC$ ज्ञात कीजिए।
   (ii) $\angle DEF$ ज्ञात कीजिए।



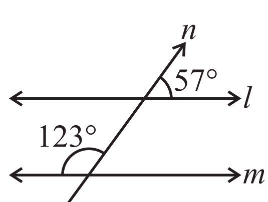
6. नीचे दी हुई आकृतियों में निर्णय लीजिए कि क्या l, m के समांतर है।



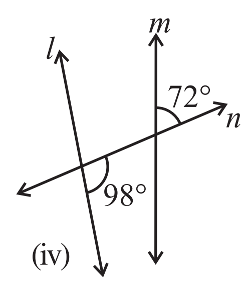
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

हमने क्या चर्चा की?

1. हम स्मरण करते हैं कि
   (i) एक रेखाखंड के दो अंत बिंदु होते हैं।
   (ii) एक किरण का केवल एक अंत बिंदु (इसका शीर्ष) होता है।
   (iii) एक रेखा का किसी भी तरफ़ कोई अंत बिंदु नहीं होता है।

2. एक कोण का निर्माण तब होता है जब दो रेखाएँ (अथवा किरण अथवा रेखाखंड) एक दूसरे को मिलती हैं।

कोण युग्म	**प्रतिबंध**
दो पूरक कोण	मापों का योग 90° है।
दो संपूरक कोण	मापों का योग 180° है।
दो आसन्न कोण	एक उभयनिष्ठ शीर्ष और एक उभयनिष्ठ भुजा होती है। परंतु कोई उभयनिष्ठ अंतस्थ नहीं होता है।
रैखिक युग्म	आसन्न एवं संपूरक

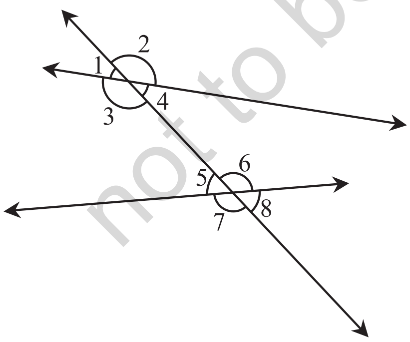
3. जब दो रेखाएँ l और m एक दूसरे से मिलती हैं तो हम कहते हैं कि ये रेखाएँ *प्रतिच्छेद* करती हैं। मिलान बिंदु प्रतिच्छेद बिंदु कहलाता है। ऐसी रेखाएँ जिन्हें कितना भी बढ़ाया जाए, आपस में नहीं मिलती, *समांतर रेखाएँ* कहलाती हैं।

4. (i) जब दो रेखाएँ प्रतिच्छेद करती हैं (सामान्यत:, अक्षर X की भाँति दिखाई देती हैं) तो हमें सम्मुख कोणों के दो युग्म प्राप्त होते हैं। इन्हें *शीर्षाभिमुख कोण* कहा जाता है। इनका माप समान होता है।

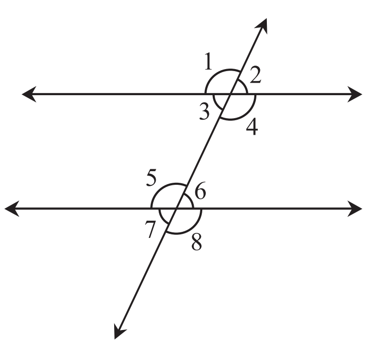
(ii) दो अथवा अधिक रेखाओं को विभिन्न बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करने वाली रेखा तिर्यक छेदी रेखा कहलाती है।

(iii) एक तिर्यक छेदी रेखा आरेख से विभिन्न प्रकार के कोण प्राप्त होते हैं।

(iv) आकृति में हमें मिलता है



कोणों के प्रकार	**दर्शाने वाले कोण**
अंत:	$\angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6$
बाह्य	$\angle 1, \angle 2, \angle 7, \angle 8$
संगत	$\angle 1$ तथा $\angle 5$, $\angle 2$ एवं $\angle 6$, $\angle 3$ तथा $\angle 7$, $\angle 4$ एवं $\angle 8$
अंत: एकांतर	$\angle 3$ तथा $\angle 6$, $\angle 4$ एवं $\angle 5$,
बाह्य एकांतर	$\angle 1$ तथा $\angle 8$, $\angle 2$ एवं $\angle 7$,
तिर्यक छेदी रेखा के एक ही तरफ़ बने अंत: कोणों के युग्म,	$\angle 3$ तथा $\angle 5$, $\angle 4$ एवं $\angle 6$,



(v) जब एक तिर्यक छेदी रेखा दो समांतर रेखाओं को काटती है, तो हमें निम्नलिखित रुचिकर संबंध प्राप्त होते है। *संगत कोणों का प्रत्येक युग्म समान होता है:* $\angle 1 = \angle 5, \angle 3 = \angle 7, \angle 2 = \angle 6, \angle 4 = \angle 8$

अंत: एकांतर कोणों के युग्म समान होते हैं: $\angle 3 = \angle 6, \angle 4 = \angle 5$

तिर्यक छेदी रेखा के एक ही तरफ़ बने अंत: कोणों का प्रत्येक युग्म संपूरक होता है: $\angle 3 + \angle 5 = 180°, \angle 4 + \angle 6 = 180°$

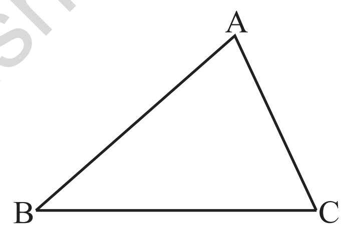
अध्याय 6

त्रिभुज और उसके गुण

0757CH06

6.1 भूमिका

आप देख चुके हैं कि त्रिभुज, तीन रेखाखंडों से बनी एक बंद सरल आकृति है। इसके तीन शीर्ष, तीन भुजाएँ व तीन कोण होते हैं। यहाँ एक ΔABC (आकृति 6.1) है। इसमें हैं :



आकृति 6.1

भुजाएँ : $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$

कोण : $\angle BAC$, $\angle ABC$, $\angle BCA$

शीर्ष : A, B, C

शीर्ष A की सम्मुख भुजा $\overline{BC}$ है। क्या आप भुजा $\overline{AB}$ के सम्मुख कोण का नाम बता सकते हैं? आप जानते हैं कि त्रिभुजों का वर्गीकरण (i) भुजाओं (ii) कोणों के आधार पर किस प्रकार किया जाता है।

(i) भुजाओं के आधार पर : विषमबाहु, समद्विबाहु तथा समबाहु त्रिभुज।

(ii) कोणों के आधार पर : न्यून कोण, अधिक कोण तथा समकोण त्रिभुज।

ऊपर बताए गए, सभी प्रकार के त्रिभुजों के आकारों के नमूने, कागज़ से काटकर बनाइए। अपने नमूनों की, साथियों के नमूनों से तुलना कीजिए और उनके बारे में चर्चा कीजिए।

प्रयास कीजिए

1. ΔABC के छः अवयवों (तीन भुजाओं तथा तीन कोणों) के नाम लिखिए।

2. लिखिए:

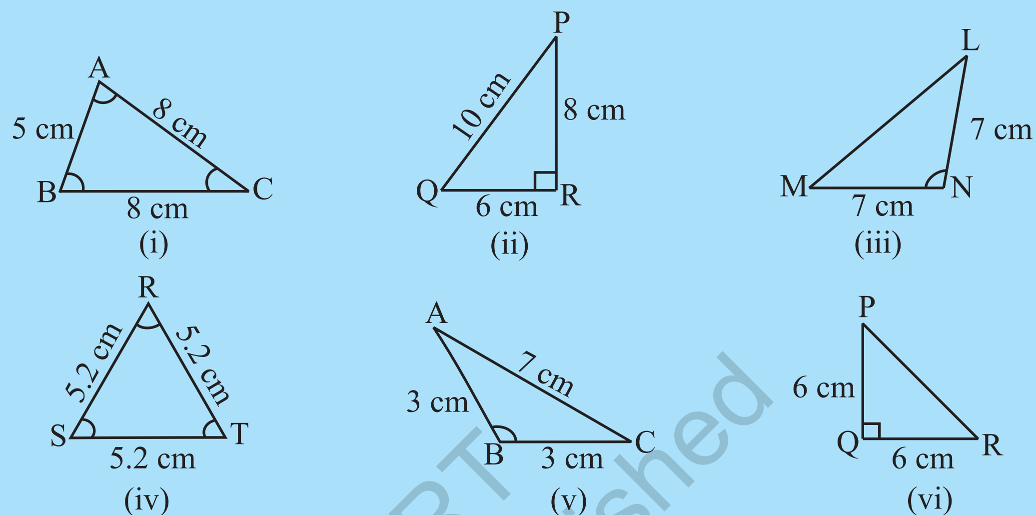
(i) ΔPQR के शीर्ष Q की सम्मुख भुजा

(ii) ΔLMN की भुजा LM का सम्मुख कोण

(iii) ΔRST की भुजा RT का सम्मुख शीर्ष

3. आकृति 6.2 देखिए तथा त्रिभुजों में से प्रत्येक का वर्गीकरण कीजिए :

(a) भुजाओं के आधार पर (b) कोणों के आधार पर



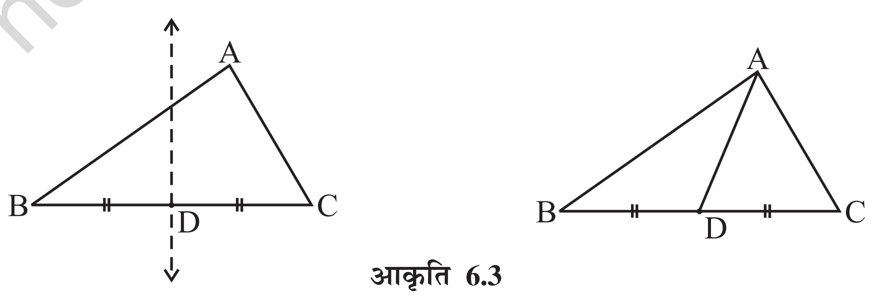
आकृति 6.2

आइए, त्रिभुजों के बारे में कुछ और अधिक जानने का प्रयास करें।

6.2 त्रिभुज की माध्यिकाएँ

आप जानते हैं कि एक दिए गए रेखाखंड का लंब समद्विभाजक कागज़ मोड़ने की प्रक्रिया द्वारा कैसे ज्ञात किया जाता है।

कागज़ के टुकड़े से एक त्रिभुज ABC काटिए (आकृति 6.3)। इसकी कोई एक भुजा, मानों $\overline{BC}$ लीजिए। कागज़ मोड़ने की प्रक्रिया द्वारा $\overline{BC}$ का लंब समद्विभाजक ज्ञात कीजिए। कागज़ पर मोड़ की तह, भुजा $\overline{BC}$ को D पर काटती है जो उसका मध्य बिंदु है। शीर्ष A को D से मिलाइए।



आकृति 6.3

रेखाखंड AD, जो भुजा $\overline{BC}$ के मध्यबिंदु D को सम्मुख शीर्ष A से मिलाता है, त्रिभुज की एक **माध्यिका** है।

भुजाएँ $\overline{AB}$ तथा $\overline{CA}$ लेकर, इस त्रिभुज की दो और माध्यिकाएँ खींचिए।

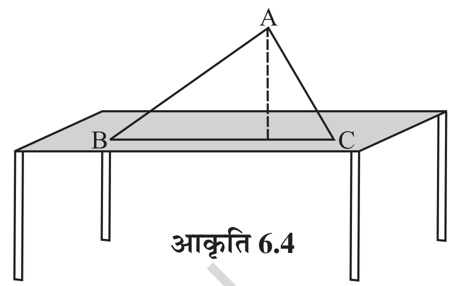
माध्यिका, त्रिभुज के एक शीर्ष को, सम्मुख भुजा के मध्य बिंदु से मिलाती है।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

1. एक त्रिभुज में कितनी माध्यिकाएँ हो सकती हैं ?
2. क्या एक माध्यिका पूर्णतया त्रिभुज के अंदर में स्थित होती है ? (यदि आप समझते हैं कि यह सत्य नहीं है तो उस स्थिति के लिए एक आकृति खींचिए।)

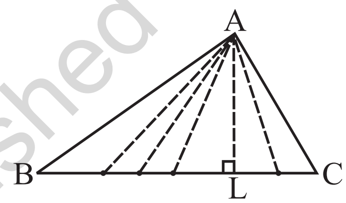
6.3 त्रिभुज के शीर्षलंब

त्रिभुज के आकार वाला गत्ते का एक टुकड़ा ABC लीजिए। इसे एक मेज पर सीधा ऊर्ध्वाधर खड़ा कीजिए। इसकी ऊँचाई कितनी है ? यह ऊँचाई शीर्ष A से भुजा $\overline{BC}$ तक की दूरी है (आकृति 6.4)।



आकृति 6.4

शीर्ष A से भुजा $\overline{BC}$ तक अनेक रेखाखंड खींचे जा सकते हैं (आकृति 6.5)। इनमें से त्रिभुज की ऊँचाई कौन-सी रेखाखंड प्रदर्शित करती है ?



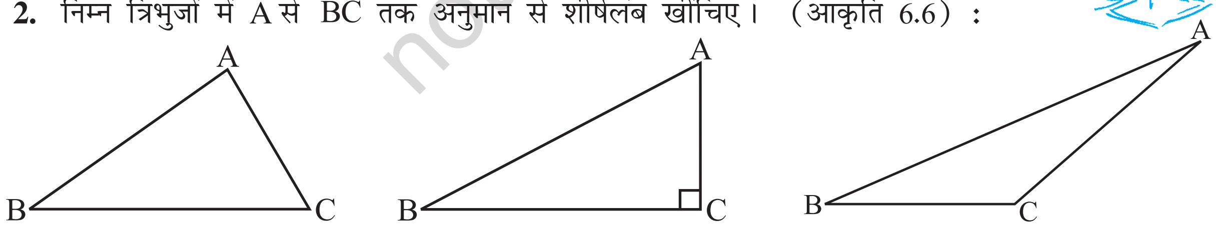
आकृति 6.5

वह रेखाखंड जो शीर्ष A से सीधा ऊर्ध्वाधर नीचे $\overline{BC}$ तक और उस पर लंबवत होता है, इसकी **ऊँचाई** होती है।
रेखाखंड AL त्रिभुज का एक **शीर्षलंब** है।

शीर्षलंब का एक अंत बिंदु, त्रिभुज के एक शीर्ष पर और दूसरा अंत बिंदु सम्मुख भुजा बनाने वाली रेखा पर स्थित होता है। प्रत्येक शीर्ष से एक शीर्षलंब खींचा जा सकता है।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

1. एक त्रिभुज में कितने शीर्ष हो सकते हैं ?
2. निम्न त्रिभुजों में A से $\overline{BC}$ तक अनुमान से शीर्षलंब खींचिए। (आकृति 6.6) :



न्यून कोण (i) समकोण (ii) अधिक कोण (iii)

आकृति 6.6

3. क्या एक शीर्षलंब पूर्णतया त्रिभुज के अभ्यंतर में सदैव स्थित होगा ? (यदि आप समझते हैं कि यह सत्य होना आवश्यक नहीं है तो उस स्थिति के लिए एक आकृति खींचिए।
4. क्या आप कोई ऐसा त्रिभुज सोच सकते हैं; जिसके दो शीर्षलंब उसकी दो भुजाएँ ही हों ?
5. क्या किसी त्रिभुज की माध्यिका व शीर्षलंब एक ही रेखाखंड हो सकता है ?

(संकेत: प्रश्न 4 व 5 के लिए, प्रत्येक प्रकार के त्रिभुज के शीर्षलंब खींचकर खोज करिए।)

इन्हें कीजिए

कागज़ से काटी गई इन आकृतियों को लीजिए।

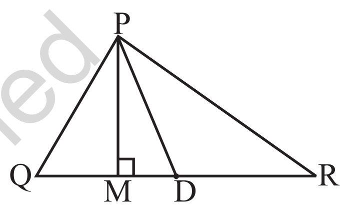
(i) समबाहु त्रिभुज (ii) समद्विबाहु त्रिभुज तथा

(iii) विषमबाहु त्रिभुज

इनके शीर्षलंब तथा माध्यिकाएँ ज्ञात कीजिए। क्या आप इनमें कुछ विशेषता पाते हैं? अपने साथियों के साथ इन पर चर्चा कीजिए।

प्रश्नावली 6.1

1. Δ PQR में भुजा $\overline{QR}$ का मध्य बिंदु D है



$\overline{PM}$ ________________ है।

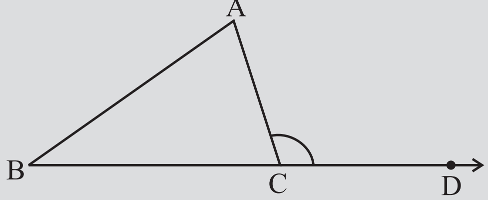
PD ________________ है।

क्या QM = MR ?

2. निम्न के लिए अनुमान से आकृति खींचिए।
   (a) ΔABC में, BE एक माध्यिका है।
   (b) ΔPQR में, PQ तथा PR त्रिभुज के शीर्षलंब हैं।
   (c) ΔXYZ में, YL एक शीर्षलंब उसके बहिर्भाग में है।
3. आकृति खींचकर पुष्टि कीजिए कि एक समद्विबाहु त्रिभुज में शीर्षलंब व माध्यिका एक ही रेखाखंड हो सकता है।

6.4 त्रिभुज का बाह्य कोण एवं इसके गुण

इन्हें कीजिए



आकृति 6.7

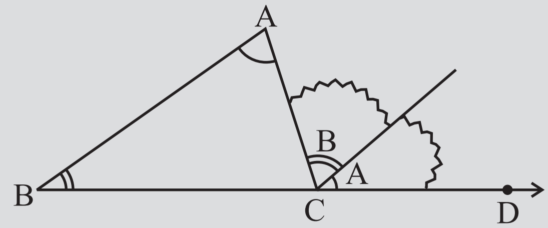
1. एक त्रिभुज ABC खींचिए और इसकी एक भुजा, $\overline{BC}$ को एक ओर बढ़ाइए (आकृति 6.7)। शीर्ष C पर बने कोण ACD पर ध्यान दीजिए। यह कोण ΔABC के बहिर्भाग में स्थित है। हम इसे ΔABC के शीर्ष C पर बना एक बाह्य कोण कहते हैं।

स्पष्ट है कि $\angle$BCA तथा $\angle$ACD परस्पर संलग्न कोण हैं। त्रिभुज के शेष दो कोण, $\angle$A तथा $\angle$B बाह्य कोण ACD के दो **सम्मुख अंत:कोण** या **दूरस्थ अंत:कोण** कहलाते हैं। अब काट कर या अक्स (Trace copy) लेकर $\angle$A तथा $\angle$B एक दूसरे के संलग्न मिलाकर $\angle$ACD पर रखिए जैसा कि आकृति 6.8 में दिखाया गया है।

क्या ये दोनों कोण ∠ACD को पूर्णतया आच्छादित करते हैं ?

क्या आप कह सकते हैं

$m\angle ACD = m\angle A + m\angle B$?



आकृति 6.8

2. जैसा कि पहले किया गया है, एक त्रिभुज ABC लेकर उसका बाह्य कोण ACD बनाइए। कोण मापक की सहायता से ∠ACD, ∠A तथा ∠B को मापिए।

∠A + ∠B का योग ज्ञात कर उसकी तुलना ∠ACD की माप से कीजिए। कोण मापक की सहायता से ∠ACD की माप ∠A + ∠B के बराबर होगी। यदि माप में कोई त्रुटि है तो इसकी माप लगभग बराबर होगी ।

इन दो क्रियाकलापों को, कुछ अन्य त्रिभुज लेकर और उनके बाह्य कोण खींचकर, आप दोहरा सकते हैं। प्रत्येक बार आप यही पाएँगे कि त्रिभुज का बाह्य कोण उसके दोनों सम्मुख अंत:कोणों के योग के बराबर होता है।

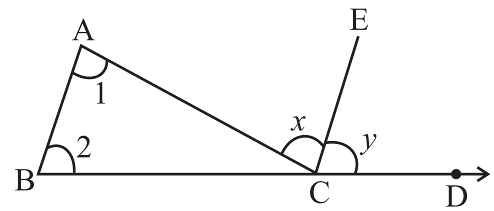
एक चरणबद्ध व तर्कपूर्ण विधि से भी इस गुण की पुष्टि की जा सकती है।

किसी त्रिभुज का बाह्य कोण अपने दोनों सम्मुख अंत:कोणों के योग के बराबर होता है।

दिया है : ΔABC लेते हैं। ∠ACD इसका एक बाह्य कोण है।

दिखाना है : $m\angle ACD = m\angle A + m\angle B$

शीर्ष C से भुजा $\overline{BA}$ के समांतर CE रेखा खींचिए ।



आकृति 6.9

औचित्य

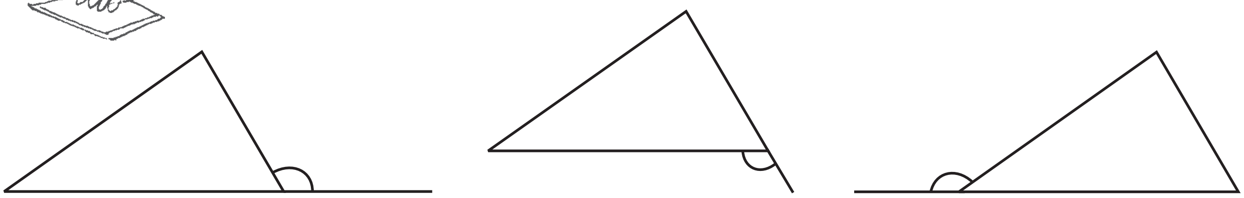
चरण	**कारण**
(a) $\angle 1 = \angle x$	$\overline{BA} \parallel \overline{CE}$ तथा $\overline{AC}$ एक तिर्यक रेखा है। अत:, एकांतर कोण समान होने चाहिए।
(b) $\angle 2 = \angle y$	$\overline{BA} \parallel \overline{CE}$ तथा $\overline{BD}$ एक तिर्यक रेखा है। अत:, संगत कोण समान होने चाहिए।
(c) $\angle 1 + \angle 2 = \angle x + \angle y$	
(d) अब, $\angle x + \angle y = m\angle ACD$	(आकृति 6.9 से)

अत:, $\angle 1 + \angle 2 = \angle ACD$

किसी त्रिभुज में बाह्य कोण और उसके दोनों सम्मुख अंत:कोणों के बीच यह संबंध **त्रिभुज के बाह्य कोण के गुण** के नाम से जाना जाता है।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

1. एक त्रिभुज के लिए बाह्य कोण भिन्न-भिन्न प्रकार से बनाए जा सकते हैं। इनमें से तीन, निम्न प्रकार से दिखाए गए हैं (आकृति 6.10)।

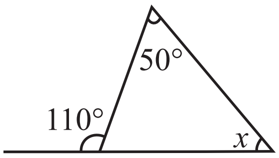


आकृति 6.10

इनके अतिरिक्त तीन और प्रकार से भी बाह्य कोण बनाए जा सकते हैं। उन्हें भी अनुमान से बनाइए।

2. किसी त्रिभुज के एक शीर्ष पर बने दोनों बाह्य कोण क्या परस्पर समान होते हैं ?
3. किसी त्रिभुज के एक बाह्य कोण और उसके संलग्न अंत:कोण के योग के बारे में आप क्या कह सकते हैं ?

उदाहरण 1 आकृति 6.11 में x का मान ज्ञात कीजिए।



आकृति 6.11

हल सम्मुख अंत:कोणों का योग = बाह्य कोण

अथवा $50° + x = 110°$

अथवा $x = 60°$

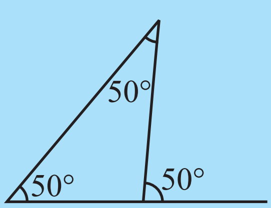
सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

1. प्रत्येक दशा में अंत: सम्मुख कोणों के बारे में आप क्या कह सकते हैं जब कि बाह्य कोण है:

   (i) एक समकोण (ii) एक अधिक कोण (iii) एक न्यून कोण

2. क्या किसी त्रिभुज का कोई बाह्य कोण एक सरल कोण भी हो सकता है ?

प्रयास कीजिए

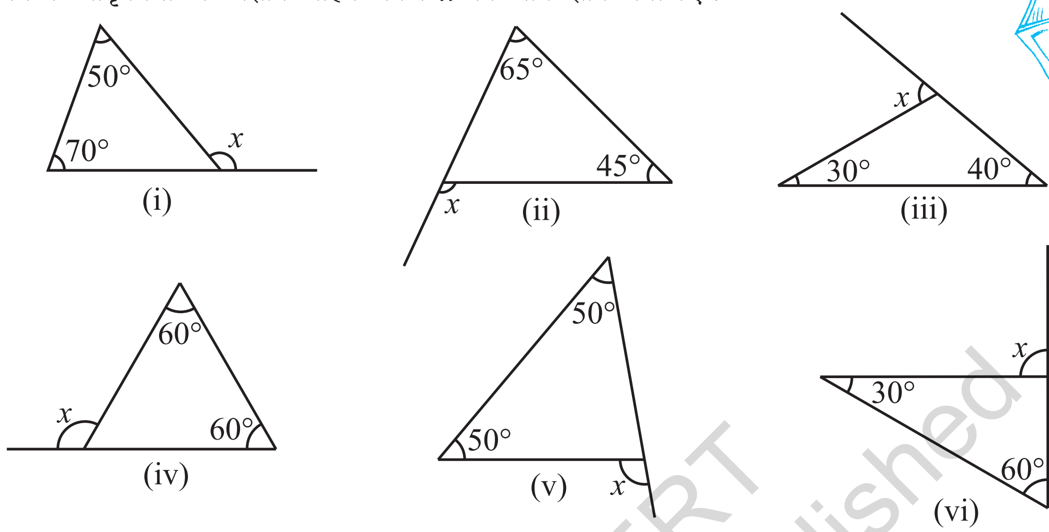


आकृति 6.12

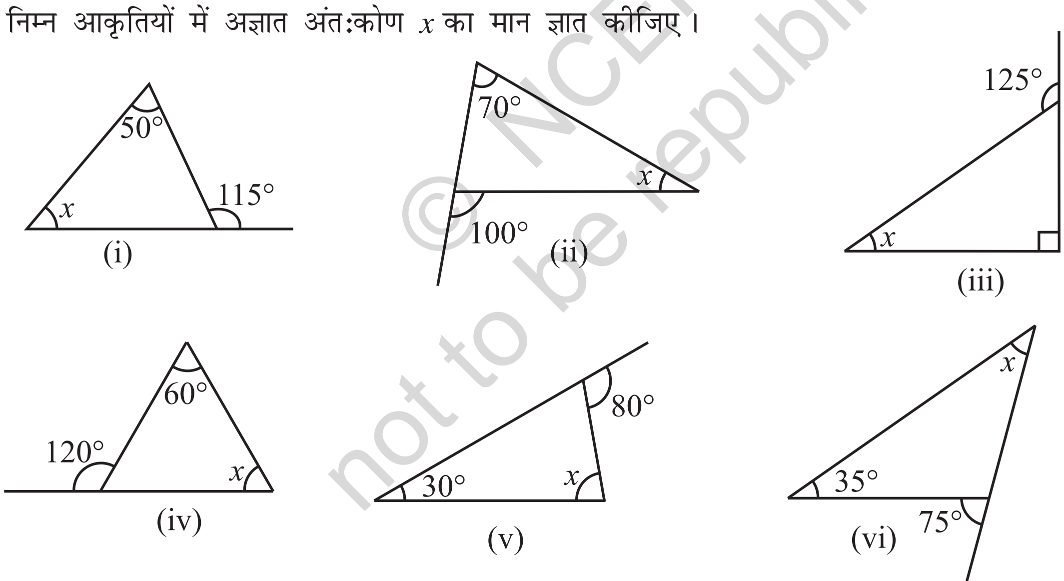
1. किसी त्रिभुज में एक बाह्य कोण की माप 70° है और उसके अंत: सम्मुख कोणों में से एक की माप 25° है। दूसरे अंत: सम्मुख कोण की माप ज्ञात कीजिए।
2. किसी त्रिभुज के दो अंत: सम्मुख कोणों की माप 60° तथा 80° है। उसके बाह्य कोण की माप ज्ञात कीजिए।
3. क्या इस आकृति में कोई त्रुटि है (आकृति 6.12)? टिप्पणी करें।

प्रश्नावली 6.2

1. निम्न आकृतियों में अज्ञात बाह्य कोण x का मान ज्ञात कीजिए।



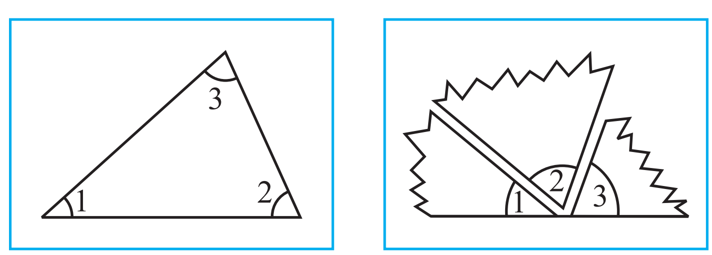
2. निम्न आकृतियों में अज्ञात अंत:कोण x का मान ज्ञात कीजिए।



6.5 त्रिभुज के अंत:कोणों का योग गुण

त्रिभुज के तीनों कोणों का आपस में संबंध दर्शाने वाला एक अद्‌भुत गुण है। इस गुण को आप निम्नलिखित चार क्रियाकलापों द्वारा देख व समझ पाएँगे।

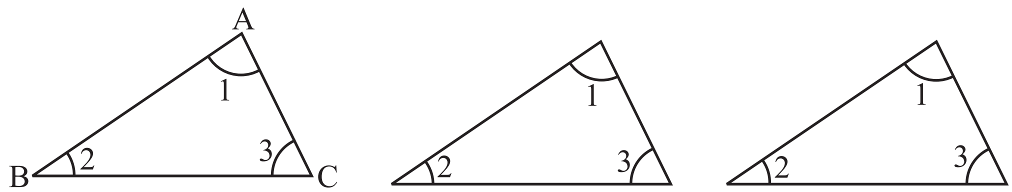
1. एक त्रिभुज खींचिए। इसके तीनों कोणों को काटकर अलग-अलग कीजिए। इन्हें अब इस प्रकार व्यवस्थित करके रखिए जैसा कि आकृति 6.13 (i) व (ii) में दिखाया गया है।



(i) **आकृति 6.13** (ii)

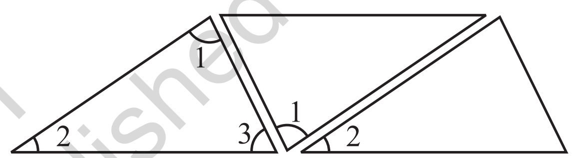
ये तीनों कोण मिलकर एक कोण बनाते हैं। जिसकी माप 180° है।
इस प्रकार, त्रिभुज के तीनों कोणों की मापों का योग 180° होता है।

2. इस तथ्य को आप एक अन्य विधि द्वारा भी देख सकते हैं। किसी ΔABC के तीन प्रतिरूप बनाइए, (आकृति 6.14)।



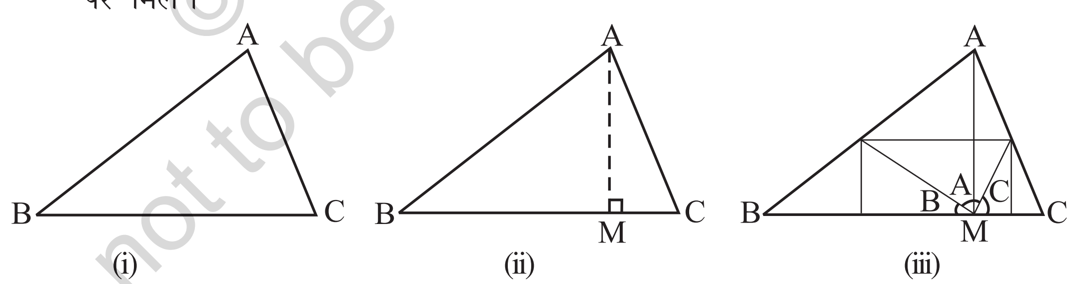
आकृति 6.14

इन तीनों को आकृति 6.15 की भाँति मिलाकर ठीक से रखिए। $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$ के बारे में आप क्या अवलोकन करते हैं? (क्या आप यहाँ बाह्य कोण से संबंधित गुण भी देख पाते हैं?)



आकृति 6.15

3. कागज़ के एक टुकड़े से कोई एक त्रिभुज, जैसे ΔABC (आकृति 6.16) काटिए। इस त्रिभुज को मोड़कर शीर्ष A से गुज़रता हुआ शीर्षलंब AM निर्धारित कीजिए। अब इस त्रिभुज के तीनों कोनों को इस प्रकार मोड़िए जिससे तीनों शीर्ष A, B तथा C बिंदु M पर मिलें।



आकृति 6.16

आप देखते हैं कि त्रिभुज के तीनों कोण मिलकर एक सरल कोण बनाते हैं। यह क्रियाकलाप पुनः दर्शाता है कि त्रिभुज के तीनों कोणों की मापों का योग 180° होता है।

4. अपनी अभ्यास पुस्तिका में कोई तीन त्रिभुज, मानों ΔABC, ΔPQR तथा ΔXYZ खींचिए। इन सभी त्रिभुजों के प्रत्येक कोण की माप एक कोण मापक द्वारा माप कर ज्ञात कीजिए। इन मापों को तालिका रूप में इस प्रकार लिखिए,

Δ का नाम	कोणों की माप			तीनों कोणों की मापों का योग
ΔABC	$m\angle A =$	$m\angle B =$	$m\angle C =$	$m\angle A + m\angle B + m\angle C =$
ΔPQR	$m\angle P =$	$m\angle Q =$	$m\angle R =$	$m\angle P + m\angle Q + m\angle R =$
ΔXYZ	$m\angle X =$	$m\angle Y =$	$m\angle Z =$	$m\angle X + m\angle Y + m\angle Z =$

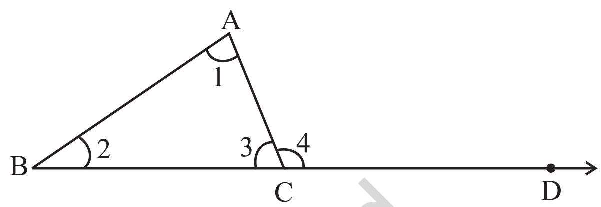
मापने में हुई संभावित त्रुटियों को ध्यान में रखते हुए आप पाएँगे कि अंतिम स्तंभ में तीनों कोणों का योग 180° (या लगभग 180°) ही है।

पूर्णयता शुद्ध माप संभव होने पर हम यही पाएँगे कि त्रिभुज के तीनों कोणों की मापों का योग 180° होता है।

अब आप अपने इस निर्णय को तर्कपूर्ण कथनों द्वारा चरणबद्ध रूप में प्रस्तुत कर सकते हैं।

कथन त्रिभुज के तीनों कोणों की मापों का योग 180° होता है।

इस तथ्य को स्थापित करने के लिए हम त्रिभुज के बाह्य कोण के गुण का उपयोग करते हैं।



आकृति 6.17

दिया है : ΔABC के तीन कोण $\angle 1$, $\angle 2$ तथा $\angle 3$ हैं (आकृति 6.17)।

$\angle 4$ एक बाह्य कोण है जो भुजा $\overline{BC}$ को D तक बढ़ाने पर बनता है।

उपपत्ति $\angle 1 + \angle 2 = \angle 4$ (बाह्य कोण का गुण)

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 4 + \angle 3$ (दोनों पक्षों में $\angle 3$ योग करने पर)

परंतु $\angle 4$ तथा $\angle 3$ एक रैखिक युग्म बनाते हैं। अत:, इनका योग 180° है।

अर्थात् $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$

आइए, अब देखें कि त्रिभुज के कोणों के इस गुण को, विभिन्न समस्याएँ हल करने में हम कैसे उपयोग कर सकते हैं।

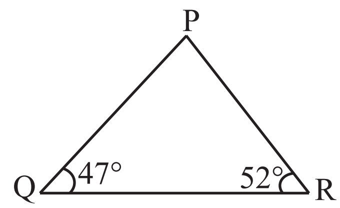


Fig 6.18

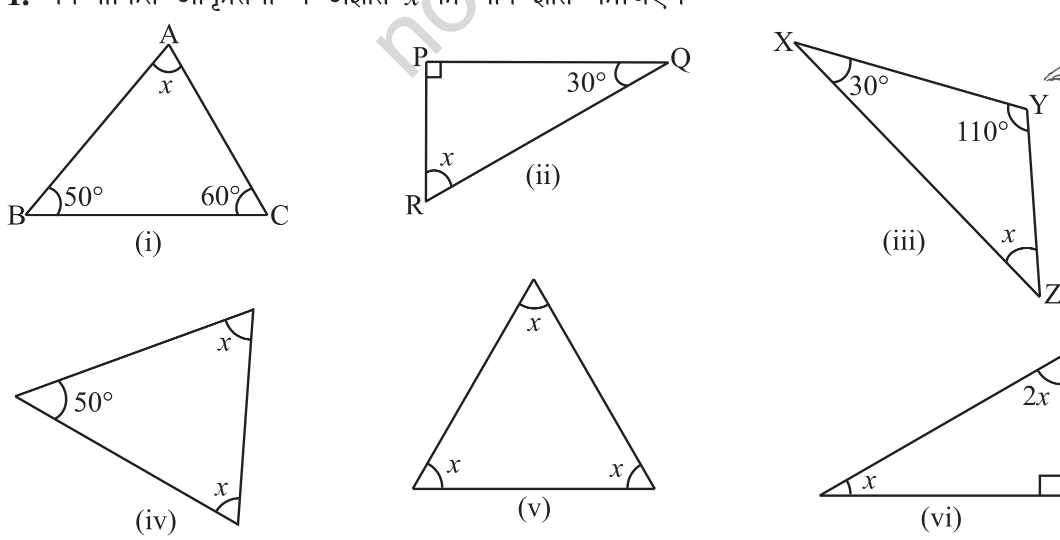
उदाहरण 2 दी गई आकृति 6.18 में $\angle P$ की माप ज्ञात कीजिए।

हल त्रिभुज के कोणों का योग गुण से $m\angle P + 47° + 52° = 180°$

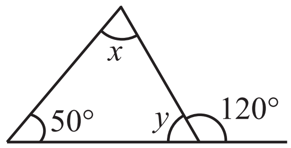
अत: $m\angle P = 180° - 47° - 52° = 180° - 99° = 81°$

प्रश्नावली 6.3

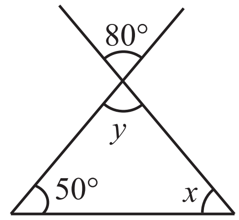
1. निम्नांकित आकृतियों में अज्ञात x का मान ज्ञात कीजिए।



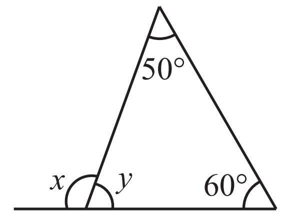
2. निम्नांकित आकृतियों में अज्ञात x और y का मान ज्ञात कीजिए।



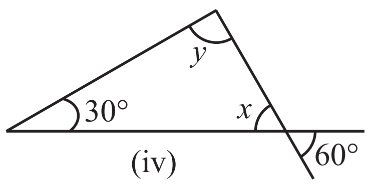
(i)



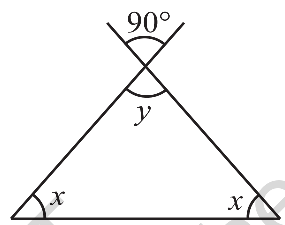
(ii)



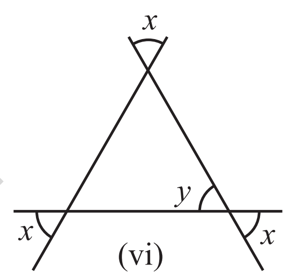
(iii)



(iv)



(v)



(vi)

प्रयास कीजिए

1. एक त्रिभुज के दो कोण 30° तथा 80° हैं। इस त्रिभुज का तीसरा कोण ज्ञात कीजिए।
2. किसी त्रिभुज का एक कोण 80° है तथा शेष दोनों कोण बराबर हैं। बराबर कोणों में प्रत्येक की माप ज्ञात कीजिए।
3. किसी त्रिभुज के तीनों कोणों में 1 : 2 : 1 का अनुपात है। त्रिभुज के तीनों कोण ज्ञात कीजिए। त्रिभुज का दोनों प्रकार से वर्गीकरण भी कीजिए।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

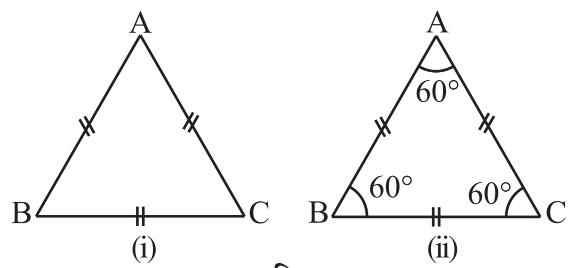
1. क्या कोई ऐसा त्रिभुज संभव है जिसके दो कोण समकोण हों?
2. क्या कोई ऐसा त्रिभुज संभव है जिसमें दो कोण अधिक कोण हों?
3. क्या कोई ऐसा त्रिभुज संभव है जिसमें दो कोण न्यून कोण हों?
4. क्या कोई ऐसा त्रिभुज संभव है जिसमें तीनों कोण 60° से अधिक हों?
5. क्या कोई ऐसा त्रिभुज संभव है जिसमें तीनों कोण 60° के हों?
6. क्या कोई ऐसा त्रिभुज संभव है जिसमें तीनों कोण 60° से कम के हों?

6.6 दो विशेष त्रिभुज : समबाहु तथा समद्विबाहु

एक त्रिभुज, जिसकी तीनों भुजाओं की माप समान हो, समबाहु त्रिभुज कहलाता है।

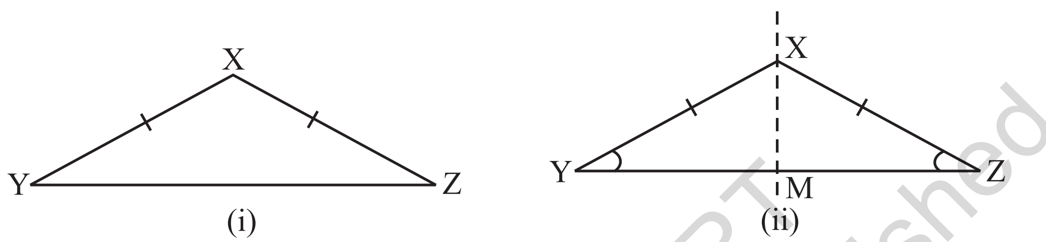
एक समबाहु त्रिभुज ABC (आकृति 6.19) बनाइए। इसका प्रतिरूप यानी इसी माप का एक और समबाहु त्रिभुज कागज़ से काटें। पहले त्रिभुज को स्थिर रखते हुए इस पर दूसरा त्रिभुज इसे ढकते

हुए रखें। दूसरा त्रिभुज पहले को पूरी तरह ढक लेता है। दूसरे त्रिभुज को पहले त्रिभुज पर किसी भी तरह घुमाकर रखें, वे दोनों त्रिभुज फिर भी एक दूसरे को ढक लेते हैं। क्या आप देख पाते हैं कि यदि त्रिभुज की तीनों भुजाएँ समान माप की हैं तब तीनों कोण भी समान माप के ही होते हैं। हम निष्कर्ष निकालते हैं कि समबाहु त्रिभुज में (i) तीनों भुजाएँ समान माप की होती हैं। (ii) प्रत्येक कोण की माप 60° होती है।



आकृति 6.19

एक त्रिभुज, जिसकी दो भुजाओं की माप समान हों, एक समद्विबाहु त्रिभुज कहलाता है।



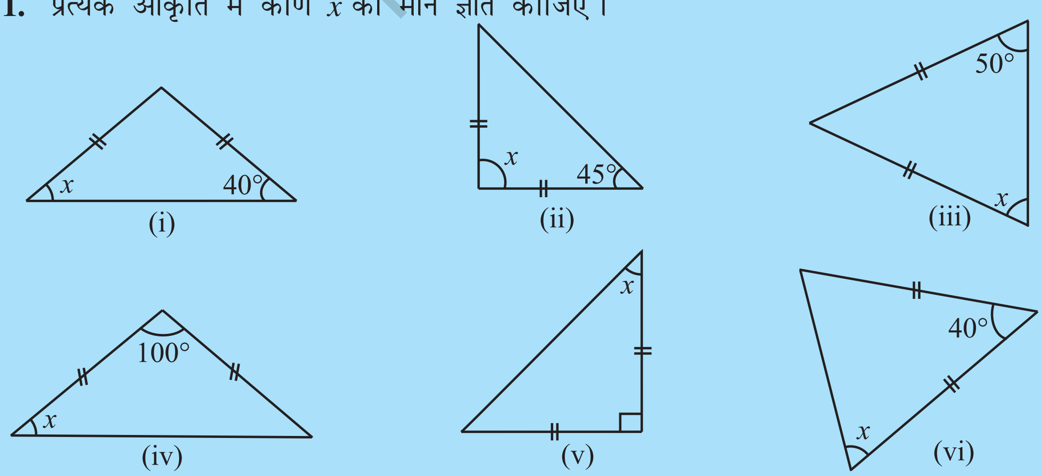
आकृति 6.20

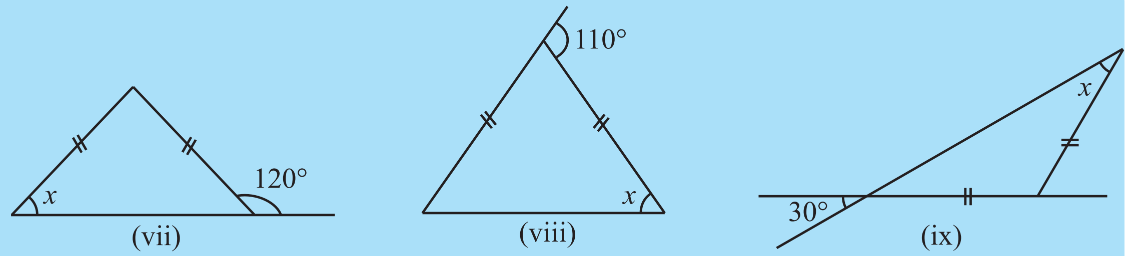
कागज़ के टुकड़े से एक समद्विबाहु त्रिभुज XYZ, काटिए, जिसमें भुजा XY = भुजा XZ हो (आकृति 6.20)। इसे इस प्रकार मोड़िए जिससे शीर्ष Z शीर्ष Y पर आच्छादित हो। अब शीर्ष X से गुज़रने वाली रेखा XM इस त्रिभुज का सममित अक्ष है (जिसके बारे में आप अध्याय 14 में पढ़ेंगे)। आप देखते हैं कि $\angle Y$ और $\angle Z$ एक दूसरे को पूर्णतया ढक लेते हैं। XY और XZ त्रिभुज की सम भुजाएँ कहलाती हैं। YZ आधार कहलाता है; $\angle Y$ तथा $\angle Z$ आधार कोण कहलाते हैं जो परस्पर समान होते हैं।

इस प्रकार हम निष्कर्ष निकालते हैं कि समद्विबाहु त्रिभुज में (i) दो भुजाएँ बराबर लंबाई की होती हैं। (ii) समान भुजाओं के सामने का कोण समान होता है।

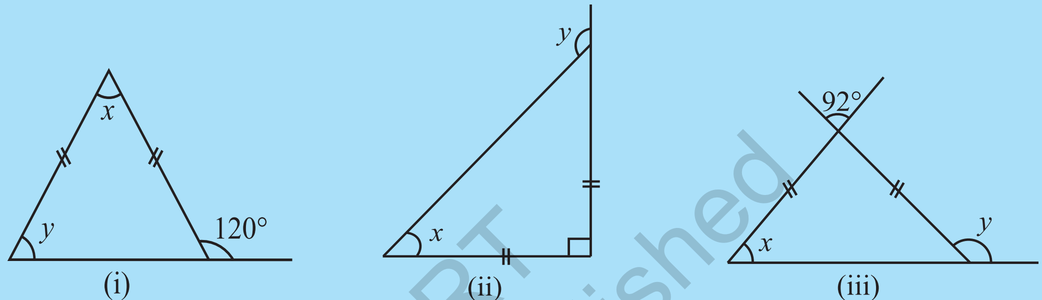
प्रयास कीजिए

1. प्रत्येक आकृति में कोण x का मान ज्ञात कीजिए।



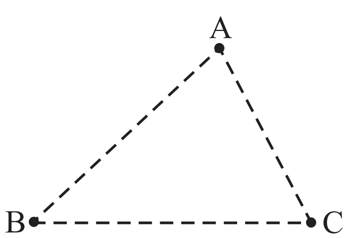


2. प्रत्येक आकृति में कोण x तथा y का मान ज्ञात कीजिए।



6.7 एक त्रिभुज की दो भुजाओं की मापों का योग

1. अपने खेल के मैदान में तीन बिंदु A, B तथा C अंकित कीजिए जो एक ही रेखा में न हों। चूना पाउडर लेकर AB, BC तथा AC पथ निर्धारित कीजिए।



आकृति 6.21

अपने किसी मित्र से कहिए कि वह निर्धारित पथों का उपयोग कर किसी प्रकार A से प्रारंभ कर C तक पहुँचे। उदाहरण के लिए, वह पहले पथ $\overline{AB}$ पर और फिर पथ $\overline{BC}$ पर चलकर C पर पहुँचें अथवा पथ $\overline{AC}$ पर चलकर सीधे C पर पहुँच जाए। स्वाभाविक है कि वह सीधा पथ AC पसंद करेगी। अगर वह कोई अन्य पथ (जैसे $\overline{AB}$ फिर $\overline{BC}$) लेगी, तब उसे अधिक दूरी चलनी पड़ेगी। दूसरे शब्दों में

$$AB + BC > AC \qquad \text{(i)}$$

इसी प्रकार यदि वह B से प्रारंभ कर A पर पहुँचना चाहती है तब वह पहले पथ $\overline{BC}$ और फिर पथ $\overline{CA}$ नहीं लेगी बल्कि वह पथ $\overline{BA}$ लेकर सीधा B से A पर पहुँचेगी। यह इसलिए कि

$$BC + CA > AB \qquad \text{(ii)}$$

इसी प्रकार तर्क करने पर हम देखते हैं कि

$$CA + AB > BC \qquad \text{(iii)}$$

इससे पता चलता है कि **किसी त्रिभुज की दो भुजाओं की मापों का योग तीसरी भुजा की माप से बड़ा होता है।**

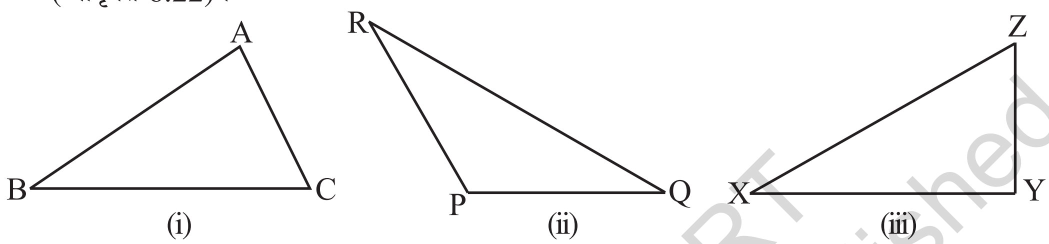
2. अलग-अलग मापों वाली 15 छोटी तीलियाँ (या पट्टियाँ) लीजिए। उनकी मापें, मान लीजिए 6 cm, 7 cm, 8 cm 9 cm, ...20 cm हैं।
इनमें से कोई तीन तीलियाँ लेकर त्रिभुज बनाने का प्रयत्न कीजिए। तीन-तीन तीलियों के विभिन्न समूह लेकर इस प्रक्रिया को दोहराइए।

मान लीजिए पहले आप दो तीलियाँ 6 cm व 12 cm लंबी लेते हैं। तीसरी तीली $12 - 6 = 6$ cm से अधिक लंबी लेकिन $12 + 6 = 18$ cm से कम लंबी लेनी होगी। यह सब करके देखिए और पता लगाइए कि ऐसा क्यों आवश्यक है।

एक त्रिभुज बनाने के लिए, आपको तीन तीलियाँ इस प्रकार चुननी होंगी जिससे कि उनमें, कोई दो तीलियों की लंबाइयों का योग तीसरी तीली की लंबाई से अधिक हो।

इस प्रक्रिया से यह भी पता चलता है कि एक त्रिभुज की दो भुजाओं की मापों का योग तीसरी भुजा की माप से अधिक होता है।

3. अपनी अभ्यास-पुस्तिका में कोई तीन त्रिभुज, जैसे ΔABC, ΔPQR तथा ΔXYZ बनाइए (आकृति 6.22)।



आकृति 6.22

अपने पैमाने (रूलर) की सहायता से इन त्रिभुजों की भुजाओं को माप कर, एक तालिका के रूप में निम्न प्रकार से लिखिए :

Δ का नाम	भुजाओं की माप	क्या यह सही है?	
Δ ABC	AB ___	$AB - BC < CA$	(हाँ/नहीं)
		___ + ___ > ___	
	BC ___	$BC - CA < AB$	(हाँ/नहीं)
		___ + ___ > ___	
	CA ___	$CA - AB < BC$	(हाँ/नहीं)
		___ + ___ > ___	
Δ PQR	PQ ___	$PQ - QR < RP$	(हाँ/नहीं)
		___ + ___ > ___	
	QR ___	$QR - RP < PQ$	(हाँ/नहीं)
		___ + ___ > ___	
	RP ___	$RP - PQ < QR$	(हाँ/नहीं)
		___ + ___ > ___	
Δ XYZ	XY ___	$XY - YZ < ZX$	(हाँ/नहीं)
		___ + ___ > ___	
	YZ ___	$YZ - ZX < XY$	(हाँ/नहीं)
		___ + ___ > ___	
	ZX ___	$ZX - XY < YZ$	(हाँ/नहीं)
		___ + ___ > ___	

इस प्रक्रिया से हमारे पिछले अनुमान की भी पुष्टि होती है। अत: हम निष्कर्ष निकालते हैं कि **एक त्रिभुज की कोई दो भुजाओं की मापों का योग, तीसरी भुजा की माप से अधिक होती है।**

साथ ही हमें यह भी पता चलता है कि एक त्रिभुज की किसी दो भुजाओं का अंतर, तीसरी भुजा की माप से कम होता है।

उदाहरण 3 क्या कोई ऐसा त्रिभुज संभव है जिसकी भुजाओं की मापें 10.2 cm, 5.8 cm तथा 4.5 cm हों?

हल मान लीजिए ऐसा त्रिभुज संभव है। तब इस त्रिभुज की कोई भी दो भुजाओं की लंबाइयों का योग तीसरी भुजा की लंबाई से अधिक होगा। आइए, जाँच करके देखें :

क्या	$4.5 + 5.8 > 10.2$?	सही है
क्या	$5.8 + 10.2 > 4.5$?	सही है
क्या	$10.2 + 4.5 > 5.8$?	सही है

अत:, इन भुजाओं वाला त्रिभुज संभव है।

उदाहरण 4 एक त्रिभुज की दो भुजाओं की माप 6 cm तथा 8 cm हैं। इसकी तीसरी भुजा की माप किन दो संख्याओं के बीच होगी?

हल हम जानते हैं कि त्रिभुज की कोई दो भुजाओं का योग तीसरी से अधिक होता है।

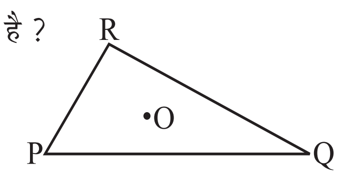
अत:, तीसरी भुजा, दी हुई दो भुजाओं के योग से कम होनी चाहिए। अर्थात् तीसरी भुजा $8 + 6 = 14$ cm से कम होगी।

यह तीसरी भुजा दी हुई दोनों भुजाओं के अंतर से अधिक होनी चाहिए। अर्थात् तीसरी भुजा $8 - 6 = 2$ cm से अधिक होगी।

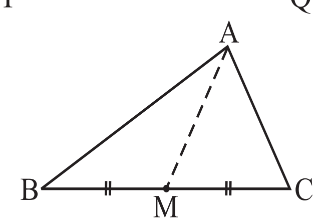
तीसरी भुजा की माप 2 cm से अधिक तथा 14 cm से कम होनी चाहिए।

प्रश्नावली 6.4

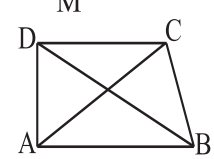
1. निम्न दी गई भुजाओं की मापों से क्या कोई त्रिभुज संभव है?
   (i) 2 cm, 3 cm, 5 cm (ii) 3 cm, 6 cm, 7 cm
   (iii) 6 cm, 3 cm, 2 cm



2. त्रिभुज PQR के अभ्यंतर में कोई बिंदु O लीजिए। क्या यह सही है कि
   (i) $OP + OQ > PQ$?
   (ii) $OQ + OR > QR$?
   (iii) $OR + OP > RP$?



3. त्रिभुज ABC की एक माध्यिका AM है। बताइए कि क्या $AB + BC + CA > 2\ AM$?
   (संकेत : ΔABM तथा ΔAMC की भुजाओं पर विचार कीजिए।)

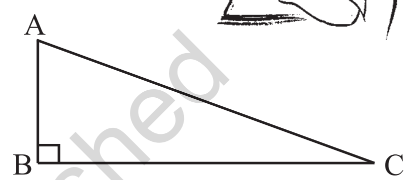


4. ABCD एक चतुर्भुज है। क्या AB + BC + CD + DA > AC + BD?
5. ABCD एक चतुर्भुज है। क्या AB + BC + CD + DA < 2 (AC + BD)?
6. एक त्रिभुज की दो भुजाओं की माप 12 cm तथा 15 cm है। इसकी तीसरी भुजा की माप किन दो मापों के बीच होनी चाहिए ?

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

1. किसी त्रिभुज में क्या उसके कोई दो कोणों का योग तीसरे कोण से सदैव अधिक होता है ?

6.8 समकोण त्रिभुज तथा पाइथागोरस गुण



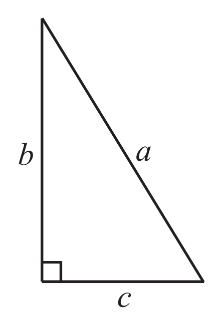
आकृति 6.23

ईसा से छठी शताब्दी पूर्व, एक यूनानी दार्शनिक पाइथागोरस ने, समकोण त्रिभुज से संबंधित एक बहुत उपयोगी व महत्वपूर्ण गुण के बारे में पता लगाया, जिसे हम इस अनुभाग में बता रहे हैं। अत: इस गुण को उनके नाम से ही जाना जाता है। वास्तव में इस गुण का ज्ञान कुछ अन्य देशों के लोगों को भी था। भारतीय गणितज्ञ बौधायन ने भी इस गुण के समकक्ष एक गुण की जानकारी दी थी।

अब हम पाइथागोरस गुण का विस्तार से अध्ययन करते हैं।

समकोण त्रिभुज में उसकी भुजाओं को विशेष नाम दिए जाते हैं। समकोण के सामने वाली भुजा को **कर्ण** कहते हैं। अन्य दो भुजाओं को समकोण त्रिभुज के **पाद** (legs) कहते हैं।

ΔABC में (आकृति 6.23), शीर्ष B पर समकोण बना है। अत:, AC इसका कर्ण है। $\overline{AB}$ तथा $\overline{BC}$ समकोण त्रिभुज ABC के दो पाद हैं।

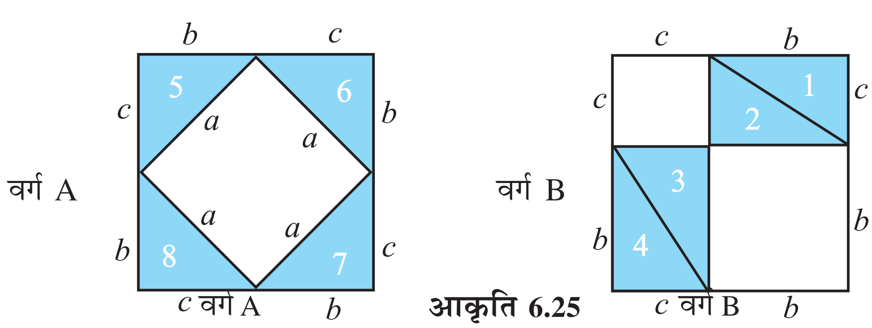


आकृति 6.24

किसी भी माप का एक समकोण त्रिभुज लेकर उसके आठ प्रतिरूप बनाइए। उदाहरण के लिए एक समकोण त्रिभुज लेते हैं जिसके कर्ण की माप a इकाई तथा उसके दो पादों की माप b इकाई तथा c इकाई है (आकृति 6.24)।

एक कागज़ पर एक समान माप वाले दो वर्ग बनाइए जिनकी भुजाओं की माप $b + c$ के बराबर हो।

अब अपने आठ त्रिभुजों में से चार त्रिभुजों को वर्ग A में तथा चार त्रिभुजों को वर्ग B में स्थापित कीजिए जैसा कि निम्न आकृति में दिखाया गया है (आकृति 6.25)।



आकृति 6.25

आप जानते हैं कि दोनों वर्ग एकरूप हैं यानी एक समान हैं तथा रखे गए आठों त्रिभुज भी एक समान हैं।

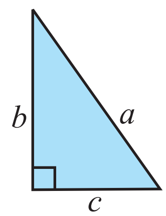
अत: वर्ग A का अनाच्छदित क्षेत्रफल = वर्ग B का अनाच्छादित क्षेत्रफल

अथवा वर्ग A के भीतर वाले वर्ग का क्षेत्रफल = वर्ग B के भीतर दोनों अनाच्छादित वर्गों के क्षेत्रफल का योग अर्थात्

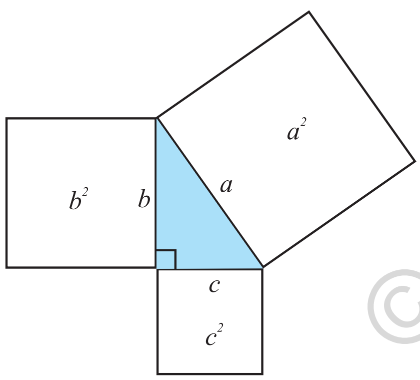
$$a^2 = b^2 + c^2$$

यह पाइथागोरस गुण है। इसे इस प्रकार कहा जा सकता है :

एक समकोण त्रिभुज में
कर्ण पर बना वर्ग = पादों पर बने दोनों वर्गों का योग



पाइथागोरस गुण, गणित में एक बहुत ही महत्वपूर्ण गुण है। आगे की कक्षाओं में इसे एक साध्य के रूप में विधिपूर्वक सिद्ध भी किया जाएगा। अभी आप इसके तात्पर्य को भली भांति समझ लें।



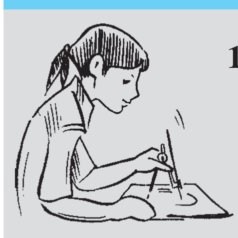
आकृति 6.26

इसके अनुसार, किसी समकोण त्रिभुज में कर्ण पर बने वर्ग का क्षेत्रफल दोनों पादों पर बने वर्गों के क्षेत्रफल के योग के बराबर होता है।

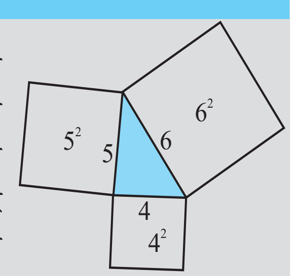
एक वर्गाकार कागज़ लेकर, उस पर एक समकोण त्रिभुज बनाइए। इसकी भुजाओं पर वर्गों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए और इस साध्य की व्यावहारिक रूप से जाँच कीजिए (आकृति 6.26)।

यदि कोई त्रिभुज, समकोण त्रिभुज है तब उस पर पाइथागोरस गुण प्रयुक्त होता है। अब यदि किसी त्रिभुज पर पाइथागोरस गुण सत्य है तो क्या यह एक समकोण त्रिभुज होगा ? (ऐसी समस्याओं को हम विलोम समस्याएँ कहते हैं।) हम इस बात का उत्तर देने का प्रयत्न करेंगे। अब हम दिखाएँगे कि यदि किसी त्रिभुज में कोई दो भुजाओं के वर्गों का योग, तीसरी भुजा के वर्ग के बराबर है तब वह एक समकोण त्रिभुज होना चाहिए।

इन्हें कीजिए



1. 4 cm, 5 cm तथा 6 सेमी लंबी भुजाओं वाले तीन वर्ग कागज़ से काटिए। इन तीनों वर्गों के तीन शीर्षों को मिलाते हुए इस प्रकार व्यवस्थित कर रखिए कि उनकी भुजाओं से एक त्रिभुज प्राप्त हो (**आकृति** 6.27)। इस प्रकार प्राप्त त्रिभुज को कागज़ पर चिन्हित कीजिए। इस त्रिभुज के तीनों कोणों को मापिए। आप देखेंगे कि इनमें कोई भी समकोण नहीं है। ध्यान दीजिए कि
$4^2 + 5^2 \neq 6^2$, $5^2 + 6^2 \neq 4^2$ तथा $6^2 + 4^2 \neq 5^2$



आकृति 6.27

2. उपर्युक्त प्रक्रिया को 4 cm, 5 cm तथा 7 cm भुजाओं वाले तीन वर्ग लेकर फिर दोहराइए। इस बार आपको एक अधिक कोण त्रिभुज प्राप्त होगा। यहाँ ध्यान दीजिए कि
$4^2 + 5^2 \neq 7^2$ इत्यादि ।

इस प्रक्रिया से पता चलता है कि पाइथागोरस गुण केवल तभी प्रयुक्त होता है जब कि त्रिभुज एक समकोण त्रिभुज होगा।

अतः हमें यह तथ्य प्राप्त होता है :

> यदि किसी त्रिभुज पर पाइथागोरस गुण प्रयुक्त होता है, तभी वह एक समकोण त्रिभुज होगा।

उदाहरण 5 एक त्रिभुज की भुजाएँ 3 cm, 4 cm तथा 5 cm लंबी हैं। निर्धारित कीजिए कि क्या वह एक समकोण त्रिभुज है ?

हल $3^2 = 3 \times 3 = 9; 4^2 = 4 \times 4 = 16; 5^2 = 5 \times 5 = 25$

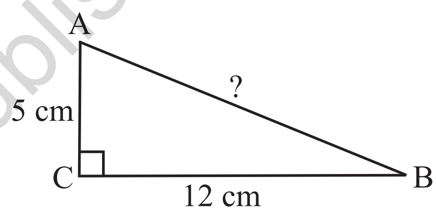
हम देखते हैं कि $3^2 + 4^2 = 5^2$

अतः, यह त्रिभुज, एक समकोण त्रिभुज है।

ध्यान दीजिए : किसी भी समकोण त्रिभुज में कर्ण सबसे लंबी भुजा होती है। इस उदाहरण में 5 cm लंबी भुजा ही कर्ण है।

उदाहरण 6 Δ ABC का C एक समकोण है। यदि AC = 5 cm तथा BC = 12 cm, तब AB की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल सहायता के लिए अनुमान से एक उपयुक्त आकृति बनाते हैं (आकृति 6.28)।



आकृति 6.28

पाइथागोरस गुण से,

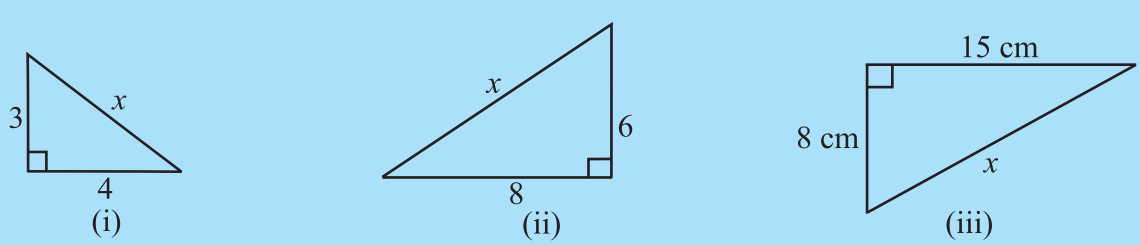
$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$
$$= 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$$

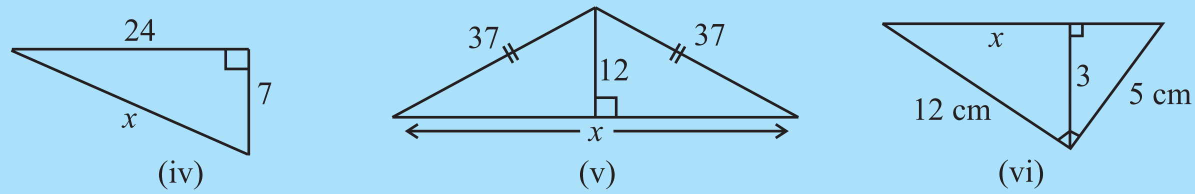
अर्थात् $AB^2 = 13^2$. अतः, AB = 13 है। अर्थात् AB की लंबाई 13 cm है।

ध्यान रखें : पूर्ण वर्ग संख्याएँ पहचानने के लिए आप अभाज्य गुणनखंड विधि प्रयोग में ला सकते हैं।

प्रयास कीजिए

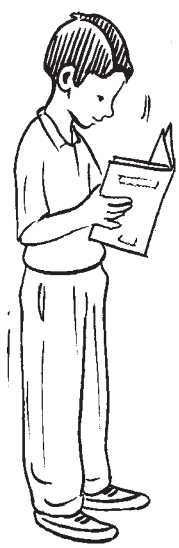
निम्न आकृति 6.29 में अज्ञात लंबाई x ज्ञात कीजिए:





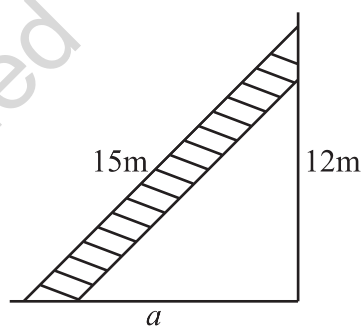
आकृति 6.29

प्रश्नावली 6.5



1. PQR एक त्रिभुज है जिसका P एक समकोण है। यदि PQ = 10 cm तथा PR = 24 cm तब QR ज्ञात कीजिए।

2. ABC एक त्रिभुज है जिसका C एक समकोण है। यदि AB = 25 cm तथा AC = 7 cm तब BC ज्ञात कीजिए।



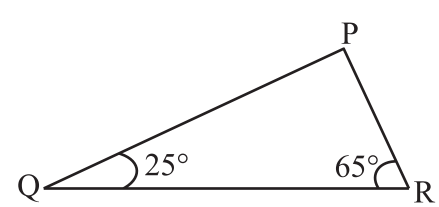
3. दीवार के सहारे उसके पैर कुछ दूरी पर टिका कर 15 m लंबी एक सीढ़ी भूमि से 12 m ऊँचाई पर स्थित खिड़की तक पहुँच जाती है। दीवार से सीढ़ी के पैर की दूरी ज्ञात कीजिए।

4. निम्नलिखित में भुजाओं के कौन से समूह एक समकोण त्रिभुज बना सकते हैं ?
   (i) 2.5 cm, 6.5 cm, 6 cm
   (ii) 2 cm, 2 cm, 5 cm
   (iii) 1.5 cm, 2 cm, 2.5 cm

   समकोण त्रिभुज होने की स्थिति में उसके समकोण को भी पहचानिए।

5. एक पेड़ भूमि से 5 m की ऊँचाई पर टूट जाता है और उसका ऊपरी सिरा भूमि को उसके आधार से 12 m की दूरी पर छूता है। पेड़ की पूरी ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

6. त्रिभुज PQR में कोण Q = 25° तथा कोण R = 65°. हैं। निम्नलिखित में कौन सा कथन सत्य है ?
   (i) $PQ^2 + QR^2 = RP^2$
   (ii) $PQ^2 + RP^2 = QR^2$
   (iii) $RP^2 + QR^2 = PQ^2$



7. एक आयत की लंबाई 40 cm है तथा उसका एक विकर्ण 41 cm है। इसका परिमाप ज्ञात कीजिए।

8. एक समचतुर्भुज के विकर्ण 16cm तथा 30 cm हैं। इसका परिमाप ज्ञात कीजिए।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

1. त्रिभुज PQR का कोण P एक समकोण है। इसकी सबसे लंबी भुजा कौन-सी है?
2. त्रिभुज ABC का कोण B एक समकोण है। इसकी सबसे लंबी भुजा कौन-सी है?
3. किसी समकोण त्रिभुज में सबसे लंबी भुजा कौन-सी होती है?
4. किसी आयत में विकर्ण पर बने वर्ग का क्षेत्रफल उसकी लंबाई तथा चौड़ाई पर बने वर्गों के क्षेत्रफल के योग के बराबर होता है। यह बौधायन का प्रमेय है। इसकी पाइथागोरस गुण से तुलना कीजिए।

इन्हें कीजिए

ज्ञानवर्द्धक क्रियाकलाप

आकृतियों को जोड़ अथवा तोड़कर, पाइथागोरस साध्य को अनेक विधियों से सिद्ध किया गया है। इन विधियों में से कुछ को एकत्रित कर उन्हें एक चार्ट बनाकर प्रस्तुत कीजिए।

हमने क्या चर्चा की?

1. एक त्रिभुज की **तीन भुजाएँ** तथा **तीन कोण**, इसके **छः अवयव** कहलाते हैं।
2. किसी त्रिभुज के एक शीर्ष को उसके सम्मुख भुजा के मध्य बिंदु से मिलाने वाले रेखाखंड को उसकी एक **माध्यिका** कहते हैं। एक त्रिभुज की तीन माध्यिकाएँ होती हैं।
3. किसी त्रिभुज के एक शीर्ष से उसके सम्मुख भुजा पर खींचे गए लंब को त्रिभुज का एक **शीर्षलंब** कहते हैं। एक त्रिभुज के तीन शीर्षलंब होते हैं।
4. किसी त्रिभुज का **बाह्य कोण** किसी एक भुजा को एक ही ओर बढ़ाने पर बनता है। प्रत्येक शीर्ष पर, एक भुजा को दो प्रकार से बढ़ाकर दो बाह्य कोण बनाए जा सकते हैं।
5. बाह्य कोण का एक गुण –

   त्रिभुज के बाह्य कोण की माप, उसके दो सम्मुख अंत:कोणों के योग के बराबर होती है।
6. त्रिभुज के कोणों के योग का गुण –

   एक त्रिभुज के तीनों कोणों का योग $180°$ होता है।
7. एक त्रिभुज जिसकी प्रत्येक भुजा की माप समान हो, **समबाहु त्रिभुज** कहलाता है। समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण $60°$ का होता है।
8. एक त्रिभुज, जिसकी कोई दो भुजाएँ माप में समान हों, **समद्विबाहु त्रिभुज** कहलाता है। समद्विबाहु त्रिभुज की असमान भुजा उसका **आधार** कहलाती है तथा आधार पर बने दोनों कोण एक दूसरे के बराबर होते हैं।

9. त्रिभुज की भुजाओं से संबंधित गुण–

(i) त्रिभुज की कोई दो भुजाओं की मापों का योग, तीसरी भुजा की माप से अधिक होता है।

(ii) त्रिभुज की कोई दो भुजाओं की मापों का अंतर, तीसरी भुजा की माप से कम होता है।

यें दोनों गुण, किसी त्रिभुज की रचना की संभावना बताने में उपयोगी होते हैं जब कि उसकी तीनों भुजाओं की माप दी हों।

10. समकोण त्रिभुज में समकोण के सामने वाली भुजा **कर्ण** तथा अन्य दोनों भुजाएँ उसके **पाद** कहलाती हैं।

11. पाइथागोरस गुण–

एक समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग = उसके पादों के वर्गों का योग।

यदि एक त्रिभुज, समकोण त्रिभुज नहीं है तब यह गुण प्रयुक्त नहीं होता है। यह गुण इस बात को तय करने में उपयोगी होता है कि कोई दिया गया त्रिभुज समकोण त्रिभुज है या नहीं।

त्रिभुजों की सर्वांगसमता

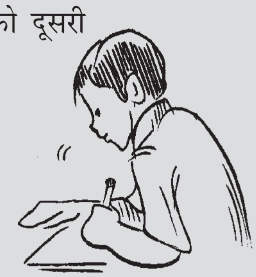
अध्याय 7

7.1 भूमिका

अब आप एक बहुत ही महत्त्वपूर्ण ज्यामितीय संकल्पना 'सर्वांगसमता' को सीखने जा रहे हैं। विशेषकर, आप त्रिभुजों की सर्वांगसमता के बारे में बहुत कुछ पढ़ेंगे। सर्वांगसमता को समझने के लिए, हम कुछ क्रियाकलाप करेंगे।

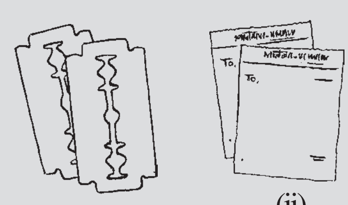
इन्हें कीजिए

एक ही प्रकार (denomination) की दो टिकटें लीजिए (आकृति 7.1)। एक टिकट को दूसरी पर रखिए। आप क्या देखते हैं ?



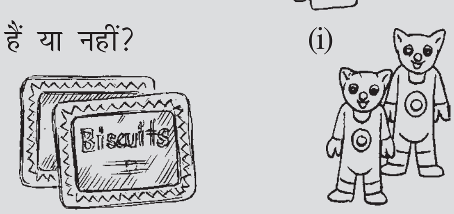
आकृति 7.1

एक टिकट दूसरे को पूर्णतया ढक लेती है। इसका अर्थ यह है कि दोनों टिकटें एक ही आकार और एक ही माप की हैं। ऐसी वस्तुएँ सर्वांगसम कहलाती हैं। आपके द्वारा प्रयोग की गई दोनों टिकटें एक दूसरे के सर्वांगसम हैं। सर्वांगसम वस्तुएँ एक दूसरे की हू-ब-हू प्रतिलिपियाँ होती हैं।



क्या अब, आप, बता सकते हैं कि निम्न वस्तुएँ सर्वांगसम हैं या नहीं?

1. एक ही कंपनी के शेविंग ब्लेड [आकृति 7.2 (i)]
2. एक ही लेटर पैड की शीटें [आकृति 7.2 (ii)]
3. एक ही पैकट के बिस्कुट [आकृति 7.2 (iii)]
4. एक ही साँचे से बने खिलौने [आकृति 7.2 (iv)]

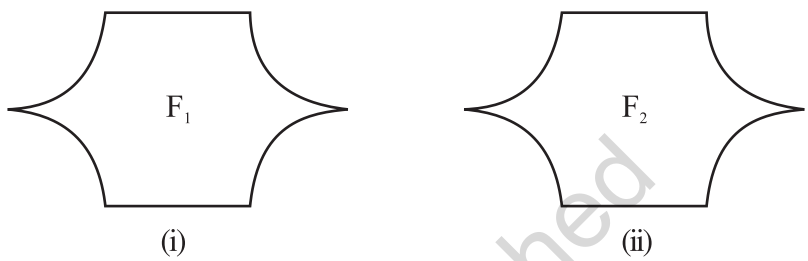


आकृति 7.2

दो वस्तुओं के सर्वांगसम होने के संबंध को **सर्वांगसमता** कहते हैं। इस अध्याय में, हम केवल तल में बनी आकृतियों की चर्चा करेंगे यद्यपि सर्वांगसमता एक साधारण विषय है जिसका उपयोग हम त्रिआयामी (3-Dimensional) आकारों के लिए भी करते हैं। अब हम तल में बनी ऐसी आकृतियों की सर्वांगसमता का विधिपूर्वक अर्थ जानने की कोशिश करेंगे जिन्हें हम पहले से जानते हैं।

7.2 तल-आकृतियों की सर्वांगसमता

यहाँ दी गई दो आकृतियों को देखिए (आकृति 7.3)। क्या ये आकृतियाँ सर्वांगसम हैं?



आकृति 7.3

आप अध्यारोपण विधि का प्रयोग कर सकते हैं। इनमें से एक का अक्स (trace-copy) बनाकर दूसरी आकृति पर रखते हैं। यदि ये आकृतियाँ एक दूसरे को पूर्णतया ढक लेती हैं तो वे सर्वांगसम कहलाती हैं। दूसरे ढंग से, आप इनमें से एक आकृति को काट कर उसे दूसरी आकृति पर रख सकते हैं। लेकिन सावधान! जिस आकृति को आपने काटा है (या अक्स बनाया है) उसे मोड़ने या फैलाने की आपको छूट नहीं है।

आकृति 7.3 में, यदि आकृति F_1, आकृति F_2 के सर्वांगसम है तो हम लिखेंगे $F_1 \cong F_2$.

7.3 रेखाखंडों में सर्वांगसमता

दो रेखाखंड कब सर्वांगसम होते हैं? नीचे दिए गए रेखाखंडों के दो युग्मों को देखिए।

आकृति 7.4

प्रत्येक रेखाखंड युग्म के लिए अक्स प्रतिलिपि बनाकर अध्यारोपण विधि का प्रयोग कीजिए [आकृति 7.4(i)] $\overline{CD}$ का अक्स बनाकर इसे $\overline{AB}$ पर रखें। आप देखेंगे कि $\overline{CD}$ $\overline{AB}$ को पूर्णतया ढक लेता है और C, A पर तथा D, B पर स्थित है। अत: हम कह सकते हैं कि दोनों रेखाखंड सर्वांगसम हैं और हम लिखेंगे $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

आकृति 7.4 (ii) के रेखाखंड युग्म के लिए इस क्रियाकलाप को दोहराइए। आप क्या देखते हैं? ये रेखाखंड सर्वांगसम नहीं हैं। यह आपने कैसे जाना? क्योंकि जब एक रेखाखंड को दूसरे रेखाखंड पर रखा जाता है तो वे एक दूसरे को पूर्णतया नहीं ढकते हैं।

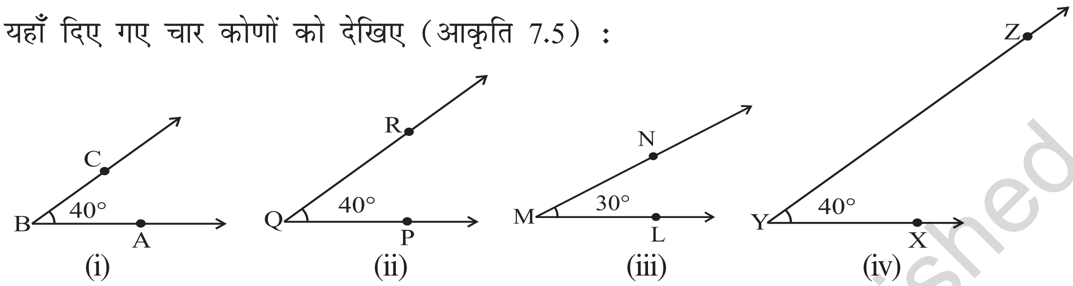
आकृति 7.4 (i) में आपने देखा होगा कि रेखाखंडों के युग्म का एक दूसरे के साथ सुमेलन (matching) होता है क्योंकि उनकी लंबाई बराबर है परंतु आकृति 7.4 (ii) में ऐसी स्थिति नहीं है।

> यदि दो रेखाखंडों की लंबाई समान (यानी बराबर) है तो वे सर्वांगसम होते हैं। यदि दो रेखाखंड सर्वांगसम हैं तो उनकी लंबाइयाँ समान होती हैं।

ऊपर दिए गए तथ्य को ध्यान में रखते हुए, जब दो रेखाखंड सर्वांगसम होते हैं तो हम कहते हैं कि रेखाखंड बराबर हैं; और हम लिखते हैं AB = CD। (हमारा वास्तव में अर्थ है कि $\overline{AB} \cong \overline{CD}$)।

7.4 कोणों की सर्वांगसमता

यहाँ दिए गए चार कोणों को देखिए (आकृति 7.5) :



आकृति 7.5

$\angle PQR$ का अक्स बनाइए और इससे $\angle ABC$ को ढकने का प्रयास कीजिए। इसके लिए, सबसे पहले Q को B पर और $\overrightarrow{QP}$ को $\overrightarrow{BA}$ पर रखिए। $\overrightarrow{QR}$ कहाँ पर आएगा ? यह BC के ऊपर होगा।

इस प्रकार, $\angle PQR$ का सुमेलन $\angle ABC$ से होता है।

इस सुमेलन में $\angle ABC$ और $\angle PQR$ सर्वांगसम हैं।

(ध्यान दीजिए कि इन दोनों सर्वांगसम कोणों की माप समान है)

हम लिखते हैं $\qquad \angle ABC \cong \angle PQR \qquad$ (i)

या $\qquad m\angle ABC = m\,\angle PQR$ (इस स्थिति में माप 40° है)

अब आप $\angle LMN$ का अक्स बनाइए और इसे $\angle ABC$ पर रखिए। M को B पर तथा $\overrightarrow{ML}$ को $\overrightarrow{BA}$ पर रखिए। क्या $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{BC}$ पर आता है ? नहीं, इस स्थिति में ऐसा नहीं होता है। आपने देखा कि $\angle ABC$ और $\angle LMN$ एक दूसरे को पूर्णतया नहीं ढकते हैं। इसलिए वे सर्वांगसम नहीं हैं। (ध्यान दीजिए, इस स्थिति में $\angle ABC$ और $\angle LMN$ की माप बराबर नहीं है)

$\angle XYZ$ और $\angle ABC$ के बारे में आप क्या कहेंगे। आकृति 7.5 (iv) में किरण $\overrightarrow{YX}$ और $\overrightarrow{YZ}$ क्रमशः किरण $\overrightarrow{BA}$ और $\overrightarrow{BC}$ से अधिक लंबी प्रतीत होती है। इसके आधार पर आप सोच सकते हैं कि $\angle ABC$, $\angle XYZ$ से छोटा है। परंतु याद रखिए कि आकृति में किरण केवल दिशा को ही प्रदर्शित करती है न कि लंबाई को। आप देखेंगे कि ये दोनों कोण भी सर्वांगसम हैं।

हम लिखते हैं $\qquad \angle ABC \cong \angle XYZ \qquad$ (ii)

या $\qquad m\angle ABC = m\angle XYZ$

(i) और (ii) को ध्यान में रखते हुए, हम यह भी लिख सकते हैं :

$$\angle ABC \cong \angle PQR \cong \angle XYZ$$

यदि दो कोणों की माप समान हो तो वे सर्वांगसम होते हैं। यदि दो कोण सर्वांगसम हैं तो उनकी माप भी समान होती है।

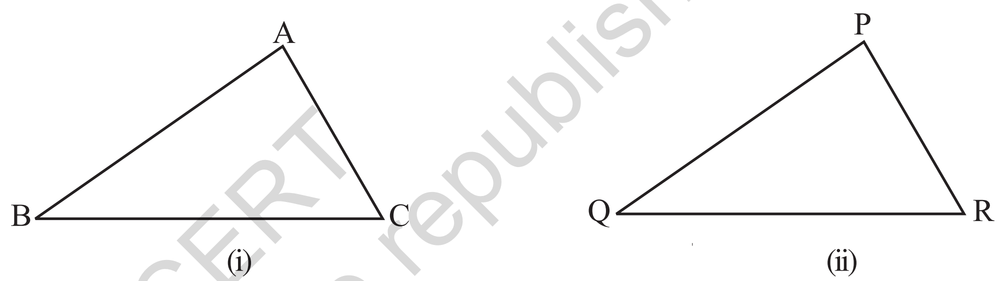
कोणों की सर्वांगसमता पूर्णतया उनके मापों की समानता के ऊपर निर्भर करती है जैसाकि रेखाखंडों की स्थिति में बताया गया है। इस प्रकार, यह कहना कि दो कोण सर्वांगसम हैं, हम कई बार केवल यही कहते हैं कि कोण बराबर हैं; और हम लिखते हैं:

$$\angle ABC = \angle PQR \text{ (अर्थात } \angle ABC \cong \angle PQR).$$

7.5 त्रिभुजों की सर्वांगसमता

हमने देखा कि दो रेखाखंड सर्वांगसम होते हैं जब उनमें से एक, दूसरे की प्रतिलिपि हो। इसी प्रकार, दो कोण सर्वांगसम होते हैं यदि उनमें से एक, दूसरे की प्रतिलिपि हो। हम इस संकल्पना को अब त्रिभुजों के लिए भी देखते हैं।

दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं यदि वे एक दूसरे की प्रतिलिपियाँ हों और एक को दूसरे के ऊपर रखे जाने पर, वे एक दूसरे को आपस में पूर्णतया ढक लें।



आकृति 7.6

ΔABC और ΔPQR समान आकार एवं समान आमाप के हैं। ये सर्वांगसम हैं। अतः इनको निम्नलिखित प्रकार से दर्शाएँगे :

$$\Delta ABC \cong \Delta PQR.$$

इसका अर्थ यह है कि यदि आप ΔPQR को ΔABC पर रखते हैं, तो P, A के ऊपर; Q, B के ऊपर और R, C के ऊपर आता है। इसी प्रकार $\overline{PQ}$, $\overline{AB}$ के अनुदिश; $\overline{QR}$, $\overline{BC}$ के अनुदिश तथा $\overline{PR}$, $\overline{AC}$ के अनुदिश आते हैं। यदि दिए गए सुमेलन (correspondence) में दो त्रिभुज सर्वांगसम हैं तो उनके संगत भाग (अर्थात् कोण और भुजाएँ) समान होते हैं। अतः इन दोनों सर्वांगसम त्रिभुजों में, हमें प्राप्त होता है :

संगत शीर्ष : A और P, B और Q, C और R.

संगत भुजाएँ : $\overline{AB}$ और $\overline{PQ}$, $\overline{BC}$ और $\overline{QR}$, $\overline{AC}$ और $\overline{PR}$.

संगत कोण : $\angle A$ और $\angle P$, $\angle B$ और $\angle Q$, $\angle C$ और $\angle R$.

यदि आप ΔPQR को ΔABC पर इस प्रकार से आरोपित करते हैं कि P, B के ऊपर रखें तो क्या दूसरे शीर्ष भी यथायोग्य सुमेलित होंगे? *ऐसा होना आवश्यक नहीं है?* आप त्रिभुजों की अक्स प्रतिलिपियाँ लीजिए और यह ज्ञात करने का प्रयत्न कीजिए। यह दर्शाता है कि त्रिभुजों की

सर्वांगसमता के बारे में चर्चा करते समय न केवल कोणों की माप और भुजाओं की लंबाइयाँ महत्त्व रखती हैं, परंतु शीर्षों का सुमेलन भी उतना ही महत्त्व रखता है। ऊपर दी गई स्थिति में, सुमेलन है :

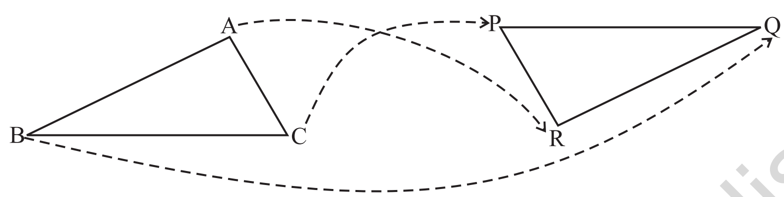
$$A \leftrightarrow P, \ B \leftrightarrow Q, \quad C \leftrightarrow R$$

हम इसे, इस प्रकार भी लिख सकते हैं $ABC \leftrightarrow \ PQR$

उदाहरण 1 यदि ΔABC और ΔPQR सुमेलन $ABC \leftrightarrow RQP$ के अंतर्गत सर्वांगसम हों, तो ΔABC के वे भाग लिखिए जो निम्न के संगत हों

(i) $\angle P$ (ii) $\angle Q$ (iii) $\overline{RP}$

हल इस सर्वांगसमता को अच्छे ढंग से समझने के लिए, आइए हम एक आकृति (आकृति 7.7) का प्रयोग करते हैं।



आकृति 7.7

यहाँ सुमेलन $ABC \leftrightarrow RQP$ है। अर्थात् $A \leftrightarrow R$; $B \leftrightarrow Q$; $C \leftrightarrow P$.

अतः (i) $\overline{PQ} \leftrightarrow \overline{CB}$ (ii) $\angle Q \leftrightarrow \angle B$ (iii) $\overline{RP} \leftrightarrow \overline{AB}$

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

जब दो त्रिभुज, मान लीजिए ABC और PQR, दिए हुए हों तो उनमें आपस में कुल छः संभव सुमेलन होते हैं। उनमें से दो सुमेलन ये हैं :

(i) $ABC \leftrightarrow PQR$ और (ii) $ABC \leftrightarrow QRP$

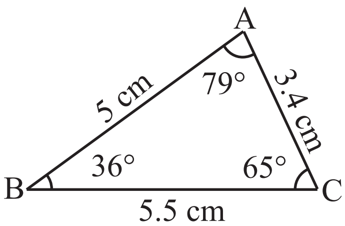
दो त्रिभुजों के कट-आउट (cutouts) का प्रयोग करके अन्य चार सुमेलनों को ज्ञात कीजिए। क्या ये सभी सुमेलन सर्वांगसमता दर्शाते हैं? इसके बारे में विचार कीजिए।

प्रश्नावली 7.1

1. निम्न कथनों को पूरा कीजिए :
   (a) दो रेखाखंड सर्वांगसम होते हैं यदि ____________।
   (b) दो सर्वांगसम कोणों में से एक की माप 70° है, दूसरे कोण की माप ____________ है।
   (c) जब हम $\angle A = \angle B$ लिखते हैं, हमारा वास्तव में अर्थ होता है ____________।
2. वास्तविक जीवन से संबंधित सर्वांगसम आकारों के कोई दो उदाहरण दीजिए।
3. यदि सुमेलन $ABC \leftrightarrow FED$ के अंतर्गत $\Delta ABC \cong \Delta FED$ तो त्रिभुजों के सभी संगत सर्वांगसम भागों को लिखिए।
4. यदि $\Delta DEF \cong \Delta BCA$ हो, तो ΔBCA के उन भागों को लिखिए जो निम्न के संगत हो :
   (i) $\angle E$ (ii) $\overline{EF}$ (iii) $\angle F$ (iv) $\overline{DF}$

7.6 त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए प्रतिबंध

हम अपने दैनिक जीवन में त्रिभुजाकार संरचनाओं और नमूनों का प्राय: प्रयोग करते हैं। अत: यह ज्ञात करना लाभकारी होगा कि दो त्रिभुजाकार आकृतियाँ कब सर्वांगसम होंगी। यदि आपकी नोटबुक में दो त्रिभुज बने हैं और आप प्रमाणित करना चाहते हैं कि क्या वे सर्वांगसम हैं तब आप हर बार उनमें से एक को काटकर दूसरे पर रखने (आरोपण) वाली विधि का प्रयोग नहीं कर सकते हैं। इसके बदले यदि हम सर्वांगसमता को सटीक मापों द्वारा निश्चित कर सकें तो यह अधिक उपयोगी होगा। चलिए ऐसा करने का प्रयत्न करें।



आकृति 7.8
अप्पू द्वारा निर्मित त्रिभुज

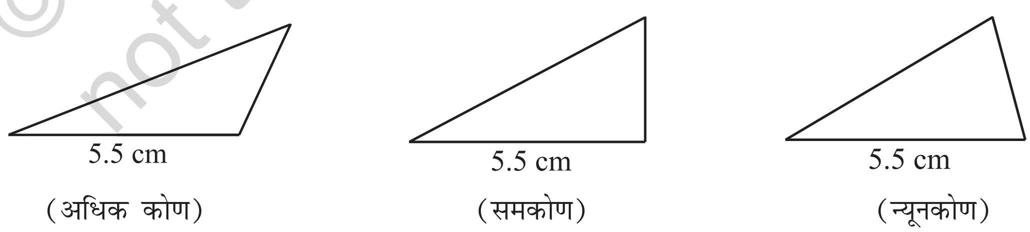
एक खेल

अप्पू और टिप्पू एक खेल खेलते हैं। अप्पू ने एक त्रिभुज ABC (आकृति 7.8) बनाया। उसने प्रत्येक भुजा की लंबाई और इसके प्रत्येक कोण की माप को ध्यान में रख लिया। टिप्पू ने यह सब ध्यान से नहीं देखा। अप्पू, टिप्पू को चुनौती देता है कि क्या वह कुछ दी सूचनाओं के आधार पर उसके ΔABC की प्रतिलिपि बना सकता है? अप्पू द्वारा दी गई सूचनाओं का प्रयोग करके टिप्पू ΔABC के सर्वांगसम एक त्रिभुज बनाने का प्रयास करता है। खेल आरंभ होता है। सावधानी से उनके वार्तालाप और उनके खेल का अवलोकन कीजिए।

SSS खेल

अप्पू : ΔABC की एक भुजा 5.5 cm है।

टिप्पू : इस सूचना से, मैं अनेक त्रिभुजों को बना सकता हूँ (आकृति 7.9)। लेकिन यह आवश्यक नहीं कि वे ΔABC की प्रतिलिपि हों। मैं जो त्रिभुज बनाता हूँ वह त्रिभुज अधिक कोण (obtuse angled) या समकोण (Right angled) या न्यून कोण (acute angled) हो सकता है। यहाँ पर कुछ उदाहरण दिए गए हैं :



आकृति 7.9

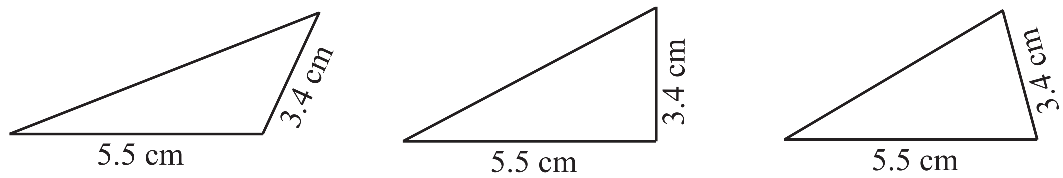
मैंने अन्य भुजाओं के लिए स्वेच्छा से लंबाइयों का प्रयोग किया। इससे मुझे 5.5 cm लंबाई के आधार वाले कई त्रिभुज मिलते हैं।

अत: दी गई केवल एक ही भुजा की लंबाई से ΔABC की प्रतिलिपि बनाना, मेरे लिए संभव नहीं।

अप्पू : अच्छा। मैं तुम्हें एक और भुजा की लंबाई दूँगा। ΔABC की दो भुजाओं की लंबाइयाँ 5.5 cm और 3.4 cm हैं।

टिप्पू : यह सूचना भी त्रिभुज बनाने के लिए पर्याप्त नहीं है। मैं इस दी गई सूचना से बहुत से त्रिभुज बना सकता हूँ जो ΔABC की प्रतिलिपि नहीं होंगे।

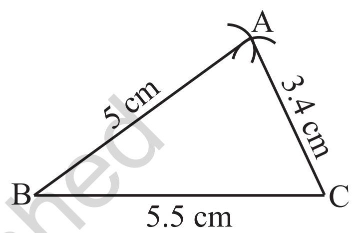
यहाँ पर कुछ त्रिभुज दिए गए हैं जो मेरी बात का समर्थन करते हैं,



आकृति 7.10

आपके त्रिभुज जैसी प्रतिलिपि कोई भी नहीं बना सकता यदि केवल दो भुजाओं की लंबाइयाँ दी गई हों।

अप्पू : ठीक है! मैं तुम्हें त्रिभुज की तीनों भुजाओं की माप देता हूँ। ΔABC में, मेरे पास $AB = 5$ cm, $BC = 5.5$ cm और $AC = 3.4$ cm है।



आकृति 7.11

टिप्पू : मैं सोचता हूँ कि त्रिभुज बनाना अब संभव होना चाहिए। मैं अब कोशिश करता हूँ। सबसे पहले मैं एक खाका (कच्ची) आकृति बनाता हूँ जिससे मैं आसानी से लंबाइयाँ याद रख सकूँ। मैं 5.5 cm $\overline{BC}$ खींचता हूँ।

'B' को केंद्र लेकर, मैं 5 cm त्रिज्या वाली एक चाप खींचता हूँ। बिंदु 'A' इस चाप पर कहीं स्थित होना चाहिए। 'C' को केंद्र लेकर 3.4 cm त्रिज्या वाली एक चाप खींचता हूँ। बिंदु 'A' इस चाप पर भी होना चाहिए। अर्थात्, 'A' बिंदु खींची गई दोनों चापों पर स्थित है। अर्थात् 'A' दोनों चापों का प्रतिच्छेदी बिंदु है।

मैं अब बिंदुओं A, B और C की स्थिति जानता हूँ। अहा! मैं इन्हें मिलाकर ΔABC प्राप्त कर सकता हूँ। (आकृति 7.11)

अप्पू : बहुत अच्छा! अत: एक दिए हुए ΔABC की प्रतिलिपि बनाने के लिए (अर्थात् ΔABC के सर्वांगसम) हमें तीनों भुजाओं की लंबाइयों की आवश्यकता होती है। क्या हम इस स्थिति को भुजा-भुजा-भुजा (side-side-side) प्रतिबंध कह सकेंगे?

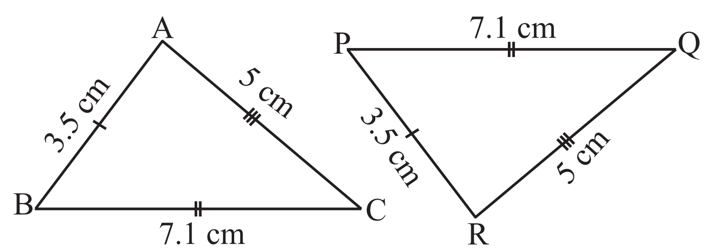
टिप्पू : क्यों न हम इसे संक्षेप में, SSS प्रतिबंध कहें।

SSS सर्वांगसमता प्रतिबंध

यदि दिए गए सुमेलन के अंतर्गत, एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ क्रमश: किसी दूसरे त्रिभुज की संगत भुजाओं के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

उदाहरण 2 त्रिभुज ABC और PQR में $AB = 3.5$ cm, $BC = 7.1$ cm, $AC = 5$ cm, $PQ = 7.1$ cm, $QR = 5$ cm, और $PR = 3.5$ cm है (आकृति 7.1)। जाँचिए कि क्या दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं या नहीं? यदि हाँ, तो सुमेलन संबंध को सांकेतिक रूप में लिखिए।

हल यहाँ, $AB = RP$ (= 3.5 cm),
$BC = PQ$ (= 7.1 cm)
$AC = QR$ (= 5 cm)



आकृति 7.12

यह दर्शाता है कि पहले त्रिभुज की तीनों भुजाएँ, दूसरे त्रिभुज की तीनों भुजाओं के बराबर हैं। अत: SSS सर्वांगसमता प्रतिबंध के अंतर्गत, दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं। ऊपर दी गई तीनों समानता वाले संबंधों से, यह आसानी से देखा जा सकता है कि $A \leftrightarrow R$, $B \leftrightarrow P$ और $C \leftrightarrow Q$.

अत: $\Delta ABC \cong \Delta RPQ$

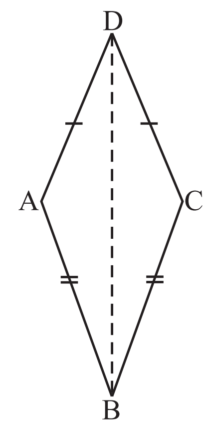
महत्त्वपूर्ण जानकारी : सर्वांगसम त्रिभुजों के नामों में अक्षरों का क्रम संगत संबंधों को दर्शाता है। इस प्रकार, जब आप $\Delta ABC \cong \Delta RPQ$, लिखते हैं, आपको ज्ञात हो जाता है कि A, R पर; B, P पर; C, Q पर; $\overline{AB}$, $\overline{RP}$ की दिशा में; $\overline{BC}$, $\overline{PQ}$ की दिशा में तथा $\overline{AC}$, $\overline{RQ}$ की दिशा में है।

उदाहरण 3 आकृति 7.13 में, AD = CD और AB = CB है।

(i) ΔABD और ΔCBD में बराबर भागों के तीन युग्म बताइए।

(ii) क्या $\Delta ABD \cong \Delta CBD$? क्यों या क्यों नहीं?

(iii) क्या BD, $\angle ABC$ को समद्विभाजित करता है? कारण बताइए।



आकृति 7.13

हल

(i) ΔABD और ΔCBD में, बराबर भागों के तीन युग्म निम्नलिखित हैं :

AB = CB (दिया गया है)

AD = CD (दिया गया है)

और BD = BD (दोनों में उभयनिष्ठ)

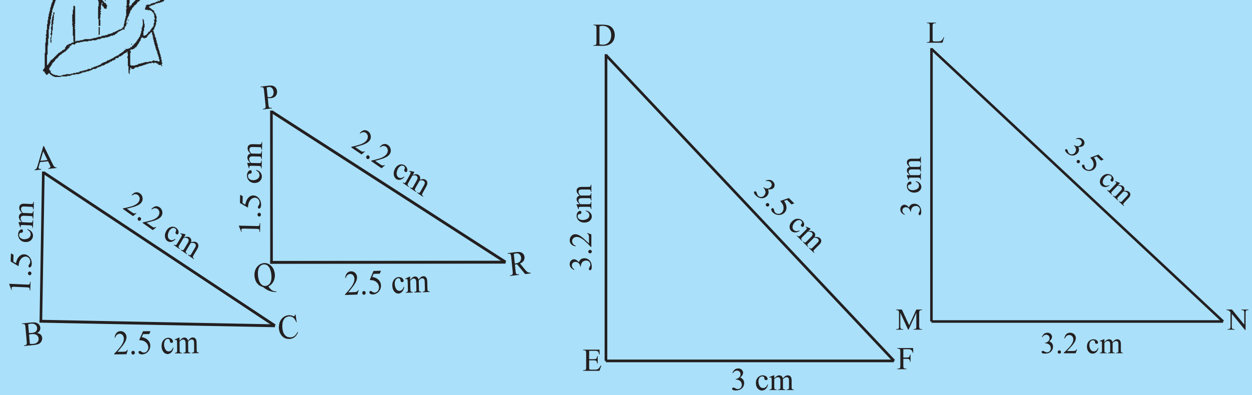
(ii) ऊपर दिए गए (i) से, $\Delta ABD \cong \Delta CBD$ (SSS सर्वांगसमता प्रतिबंध)

(iii) $\angle ABD = \angle CBD$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग)

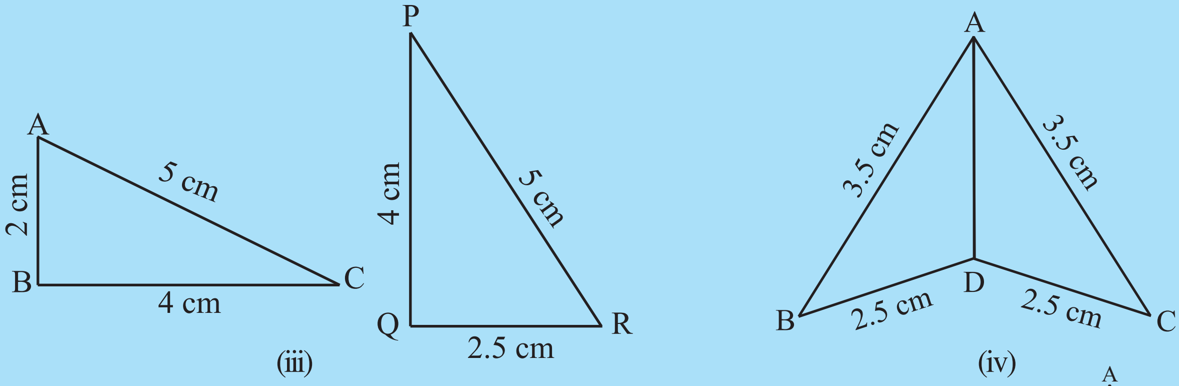
अत: BD, $\angle ABC$ को समद्विभाजित करता है।

प्रयास कीजिए

1. आकृति 7.14 में, त्रिभुजों की भुजाओं की लंबाइयाँ दर्शाई गई हैं। SSS सर्वांगसमता प्रतिबंध का प्रयोग करके बताइए कि कौन-कौन से त्रिभुज-युग्म सर्वांगसम हैं। सर्वांगसमता की स्थिति में, उत्तर को सांकेतिक रूप में लिखिए :



(i) (ii)



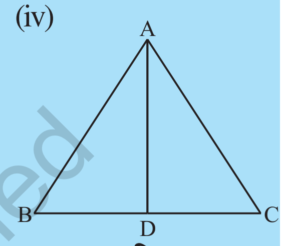
आकृति 7.14

2. आकृति 7.15 में $AB = AC$ और D, $\overline{BC}$ का मध्य बिंदु है।

(i) ΔADB और ΔADC में बराबर भागों के तीन युग्म बताइए।

(ii) क्या $\Delta ADB \cong \Delta ADC$ है? कारण दीजिए ।

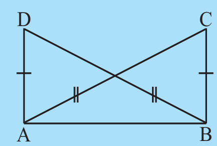
(iii) क्या $\angle B = \angle C$ है? क्यों?



आकृति 7.15

3. आकृति 7.16 में, $AC = BD$ और $AD = BC$ है। निम्नलिखित कथनों में कौन-सा कथन सत्य है?

(i) $\Delta ABC \cong \Delta ABD$ (ii) $\Delta ABC \cong \Delta BAD$



आकृति 7.16

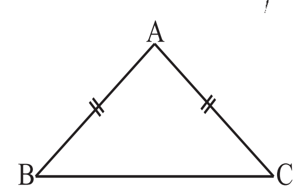
सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $AB = AC$ (आकृति 7.17) है। ΔABC की एक अक्स प्रतिलिपि लीजिए और इसे भी ΔABC का नाम दीजिए

(i) ΔABC और ΔACB में बराबर भागों के तीन युग्म बताइए ।

(ii) क्या $\Delta ABC \cong \Delta ACB$ है ? क्यों अथवा क्यों नहीं ?

(iii) क्या $\angle B = \angle C$ है ? क्यों अथवा क्यों नहीं ?



आकृति 7.17

अप्पू और टिप्पू अब पिछले खेल में कुछ परिवर्तन करके पुनः खेलते हैं।

SAS खेल

अप्पू : अब मैं त्रिभुजों की प्रतिलिपि बनाने वाले खेल के नियमों में परिवर्तन करता हूँ।

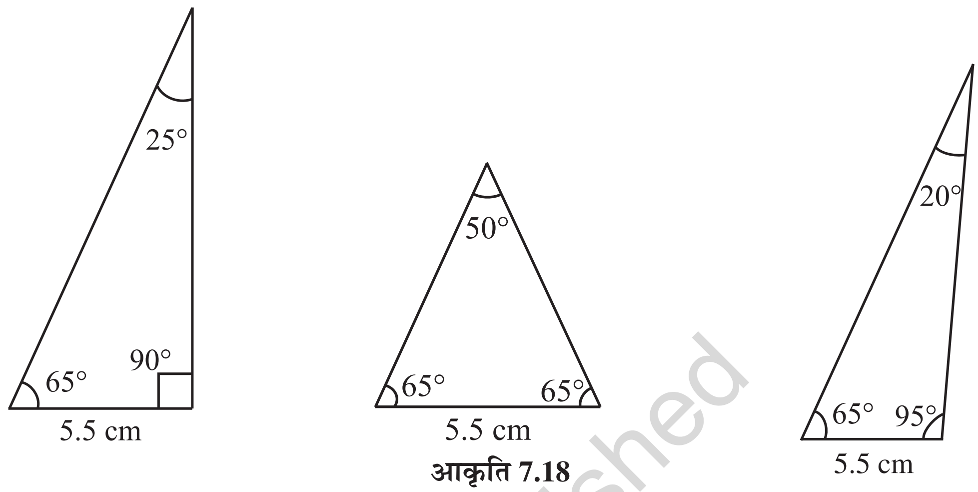
टिप्पू : ठीक है, करिए ।

अप्पू : आप पहले से जान चुके हैं कि त्रिभुज की केवल एक भुजा की लंबाई का दिया जाना ही पर्याप्त नहीं होता है।

टिप्पू : हाँ ।

अप्पू : उस स्थिति में, मैं कहता हूँ कि ΔABC में एक भुजा 5.5 cm और एक कोण 65° का है।

टिप्पू : यह, फिर त्रिभुज बनाने के लिए पर्याप्त नहीं है। मैं ऐसे बहुत सारे त्रिभुजों को बना सकता हूँ जो आपकी सूचना को संतुष्ट करते हों, परंतु वे ΔABC की प्रतिलिपि न हों। उदाहरण के लिए, मैंने कुछ त्रिभुजों को यहाँ पर दिया है (आकृति 7.18)।



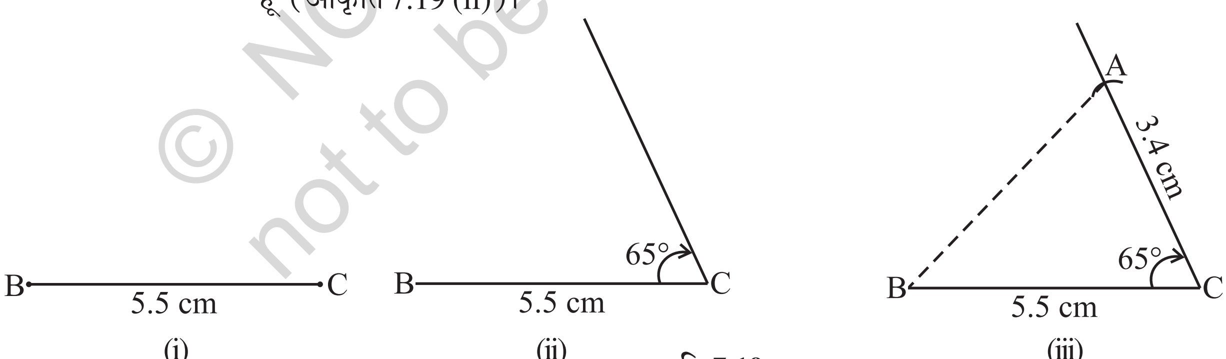
आकृति 7.18

अप्पू : अतः, हम क्या करें ?

टिप्पू : हमें और सूचना की आवश्यकता है।

अप्पू : तब, मैं अपने पहले वाले कथन में परिवर्तन करता हूँ। ΔABC में, दो भुजाओं की लंबाई 5.5 cm और 3.4 cm है, तथा इन भुजाओं के अंतर्गत 65° का कोण है।

टिप्पू : यह सूचना मेरी सहायता करेगी। मैं कोशिश करता हूँ। मैं पहले 5.5 cm लंबाई वाला रेखाखंड BC खींचता हूँ (आकृति 7.19 (i))। अब मैं 'C' पर 65° का कोण बनाता हूँ (आकृति 7.19 (ii))।



आकृति 7.19

हाँ, मुझे बिंदु A प्राप्त हो गया। यह C से खींची गई इस कोणीय भुजा की दिशा में, C से 3.4 cm की दूरी पर स्थित होना चाहिए। C को केंद्र लेकर, मैं 3.4 cm की एक चाप खींचता हूँ। यह कोण की भुजा को A पर काटता है। अब मैं AB को मिलाता हूँ और ΔABC को प्राप्त करता हूँ (आकृति 7.19 (ii))।

अप्पू : आपने यहाँ भुजा-कोण-भुजा का उपयोग किया है जहाँ कोण भुजाओं के बीच में स्थित है।

टिप्पू : हाँ। हम इस प्रतिबंध को क्या नाम देंगे ?

अप्पू : यह SAS प्रतिबंध है, क्या आप समझ गए हैं ?

टिप्पू : हाँ। अवश्य।

SAS सर्वांगसमता प्रतिबंध

यदि एक सुमेलन के अंतर्गत, एक त्रिभुज की दो भुजाएँ और उनके अंतर्गत कोण दूसरे त्रिभुज की संगत दो भुजाओं और उनके अंतर्गत कोण के बराबर हों, तो ये त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

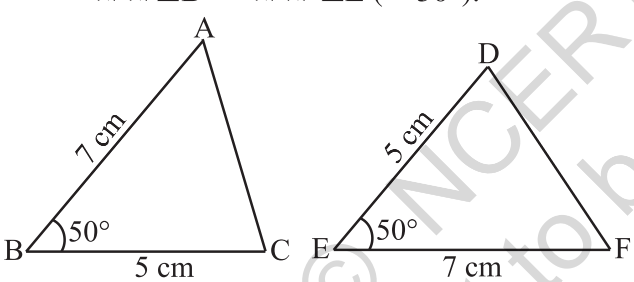
उदाहरण 4 दो त्रिभुजों के कुछ भागों की निम्न माप दी गई है। SAS सर्वांगसमता प्रतिबंध का उपयोग करके जाँच कीजिए कि दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं अथवा नहीं ? यदि त्रिभुज सर्वांगसम हैं तो उन्हें सांकेतिक रूप में लिखिए ।

	ΔABC	ΔDEF
(a)	$AB = 7$ cm, $BC = 5$ cm, $\angle B = 50°$	$DE = 5$ cm, $EF = 7$ cm, $\angle E = 50°$
(b)	$AB = 4.5$ cm, $AC = 4$ cm, $\angle A = 60°$	$DE = 4$ cm, $FD = 4.5$ cm, $\angle D = 55°$
(c)	$BC = 6$ cm, $AC = 4$ cm, $\angle B = 35°$	$DF = 4$ cm, $EF = 6$ cm, $\angle E = 35°$

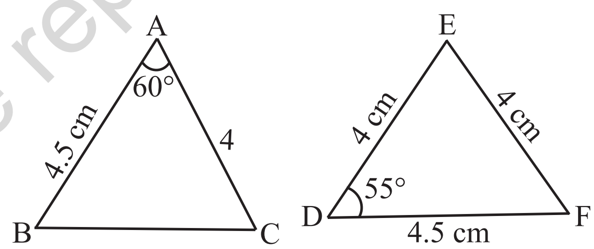
(यह हमेशा बहुत उपयोगी होगा कि पहले एक खाका (कच्ची) आकृति को बनाकर उनकी मापों को अंकित कर दिया जाए और उसके बाद प्रश्न को देखा जाए)।

हल

(a) यहाँ, $AB = EF$ (= 7 cm), $BC = DE$ (= 5 cm) और अंतर्गत $\angle B$ = अंतर्गत $\angle E$ (= 50°).



आकृति 7.20



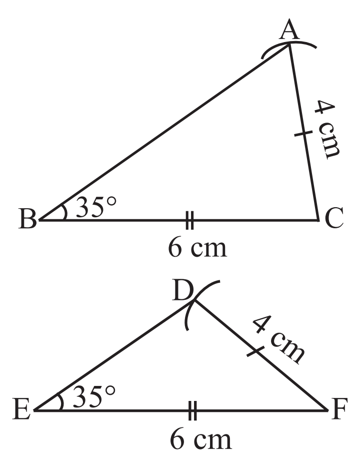
आकृति 7.21

इस प्रकार , $A \leftrightarrow F$ $B \leftrightarrow E$ और $C \leftrightarrow D$.

अत:, $\Delta ABC \cong \Delta FED$ (SAS सर्वांगसमता प्रतिबंध के अंतर्गत) (आकृति 7.20)

(b) यहाँ, $AB = FD$ और $AC = DE$ है (आकृति 7.21)।
परंतु अंतर्गत $\angle A \neq$ अंतर्गत $\angle D$; अत: हम नहीं कह सकते हैं कि त्रिभुज सर्वांगसम हैं।

(c) यहाँ, $BC = EF$, $AC = DF$ और $\angle B = \angle E$.
परंतु $\angle B$ भुजाओं AC और BC का अंतर्गत कोण नहीं है।
इसी प्रकार, $\angle E$ भुजाओं EF और DF का अंतर्गत कोण नहीं है।
अत: यहाँ पर SAS सर्वांगसमता प्रतिबंध का उपयोग नहीं कर सकते हैं और हम यह निष्कर्ष नहीं निकाल सकते हैं कि दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं अथवा नहीं।



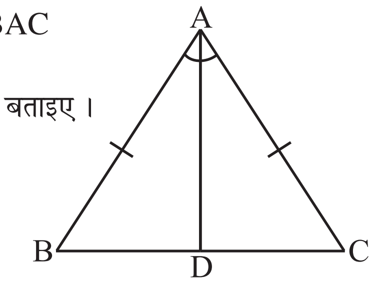
आकृति 7.22

उदाहरण 5 आकृति 7.23 में, AB = AC है और AD, $\angle BAC$ का समद्विभाजक है।

(i) त्रिभुज ADB और ADC में बराबर भागों के तीन युग्म बताइए।

(ii) क्या $\Delta ADB \cong \Delta ADC$? कारण दीजिए।

(iii) क्या $\angle B = \angle C$? कारण दीजिए।



आकृति 7.23

हल

(i) बराबर भागों के तीन युग्म निम्न हैं :

AB = AC (दिया गया है)

$\angle BAD = \angle CAD$ (AD, $\angle BAC$ को समद्विभाजित करता है) और AD = AD (उभयनिष्ठ)

(ii) हाँ, $\Delta ADB \cong \Delta ADC$ (SAS सर्वांगसमता प्रतिबंध के अंतर्गत)

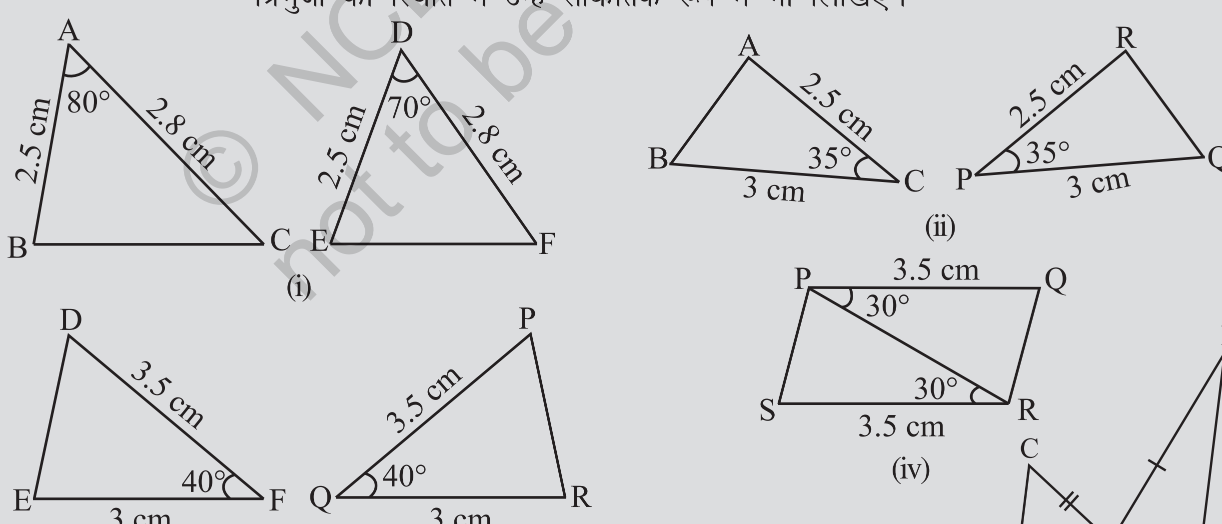
(iii) $\angle B = \angle C$ (सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत भाग)

इन्हें कीजिए

1. ΔDEF की भुजाओं $\overline{DE}$ और $\overline{EF}$ का अंतर्गत कोण कौन-सा है ?

2. SAS सर्वांगसमता प्रतिबंध का उपयोग करके आप $\Delta PQR \cong \Delta FED$ स्थापित करना चाहते हैं। यह दिया गया है कि PQ = FE और RP = DF है। सर्वांगसमता को स्थापित करने के लिए अन्य किस तथ्य या सूचना की आवश्यकता होगी ?

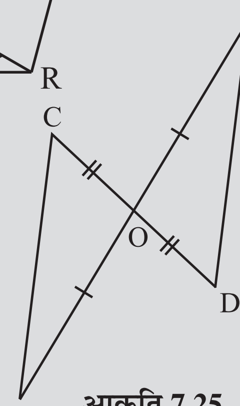
3. आकृति 7.24 में, त्रिभुजों के युग्मों में कुछ भागों की माप अंकित की गई है। SAS सर्वांगसमता प्रतिबंध का उपयोग करके, इनमें वे युग्म छाँटिए जो सर्वांगसम हैं। सर्वांगसम त्रिभुजों की स्थिति में उन्हें सांकेतिक रूप में भी लिखिए।



आकृति 7.24

4. आकृति 7.25 में, $\overline{AB}$ और $\overline{CD}$ एक दूसरे को O पर समद्विभाजित करते हैं।

(i) दोनों त्रिभुजों AOC और BOD में बराबर भागों के तीन युग्मों को बताइए।



आकृति 7.25

(ii) निम्न कथनों में से कौन-से कथन सत्य हैं ?
(a) $\Delta AOC \cong \Delta DOB$
(b) $\Delta AOC \cong \Delta BOD$

ASA खेल

क्या आप अप्पू के त्रिभुज को बना सकते हैं, यदि आप जानते हैं :
(i) इसके केवल एक कोण को ?
(ii) इसके केवल दो कोणों को ?
(iii) दो कोणों और कोई एक भुजा को ?
(iv) दो कोण ओर उनके बीच की भुजा को ?

उपरोक्त प्रश्नों के हल निकालने के प्रयास हमें निम्न प्रतिबंध से अवगत कराते हैं ।

ASA सर्वांगसमता प्रतिबंध :
यदि एक सुमेलन में, एक त्रिभुज के दो कोण और उनके अंतर्गत भुजा, किसी दूसरे त्रिभुज के दो संगत कोणों और अंतर्गत भुजा के बराबर हो, तो वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

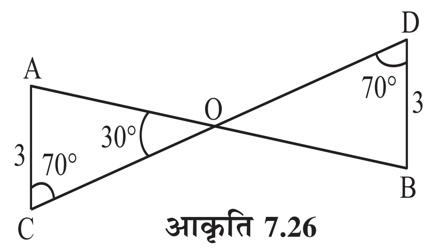
उदाहरण 6 ASA सर्वांगसमता प्रतिबंध का उपयोग करके $\Delta ABC \cong \Delta QRP$ स्थापित करना है यदि यह दिया गया है कि $BC = RP$ । इस सर्वांगसमता को स्थापित करने के लिए अन्य किन तथ्यों की आवश्यकता है ?

हल ASA सर्वांगसमता प्रतिबंध के लिए हमें दो दिए कोणों के साथ अंतर्गत भुजाओं BC और RP की आवश्यकता है। अतः अन्य आवश्यक तथ्य निम्न हैं :

$\angle B = \angle R$

और $\angle C = \angle P$

उदाहरण 7 आकृति 7.26 में, क्या आप ASA सर्वांगसमता प्रतिबंध का उपयोग करके यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि $\Delta AOC \cong \Delta BOD$ है ?



आकृति 7.26

हल दो त्रिभुजों AOC और BOD में, $\angle C = \angle D$ (प्रत्येक $70°$)

और $\angle AOC = \angle BOD = 30°$ (शीर्षाभिमुख कोण)

अतः $\angle A = 180° - (70° + 30°) = 80°$

(त्रिभुज के कोणों का योग गुणधर्म का प्रयोग)

इसी प्रकार $\angle B = 180° - (70° + 30°) = 80°$

अतः हमारे पास, $\angle A = \angle B$, $AC = BD$ और $\angle C = \angle D$ है।

अब, $\angle A$ और $\angle C$ के अंतर्गत भुजा AC तथा $\angle B$ और $\angle D$ के अंतर्गत भुजा BD है ।

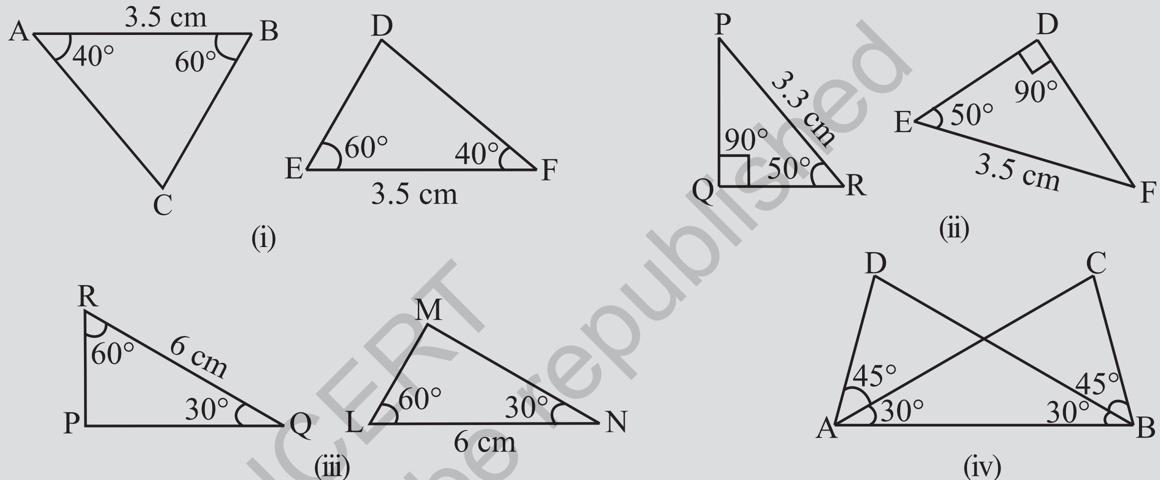
अतः ASA सर्वांगसमता प्रतिबंध से, $\Delta AOC \cong \Delta BOD$.

टिप्पणी

यदि एक त्रिभुज के दो कोण दिए हुए हों तो आप त्रिभुज के तीसरे कोण को हमेशा ज्ञात कर सकते हैं। अतः जब एक त्रिभुज के दो कोण और एक भुजा किसी दूसरे त्रिभुज के दो संगत कोणों और एक भुजा के बराबर हो, तब आप इसे 'दो कोणों और अंतर्गत भुजा' वाली सर्वांगसमता में रूपांतरित कर सकते हैं और तब सर्वांगसमता प्रतिबंध का उपयोग कर सकते हैं।

इन्हें कीजिए

1. ΔMNP में कोणों, M तथा N के अंतर्गत भुजा क्या है ?
2. ASA सर्वांगसमता प्रतिबंध का उपयोग करके आप $\Delta DEF \cong \Delta MNP$ स्थापित करना चाहते हैं। आपको दिया गया है कि $\angle D = \angle M$ और $\angle F = \angle P$। इस सर्वांगसमता को स्थापित करने के लिए और कौन-से तथ्य की आवश्यकता है ? (खाका आकृति बनाकर कोशिश कीजिए)।
3. आकृति 7.27 में, त्रिभुजों के कुछ भागों की माप अंकित की गई है। ASA सर्वांगसमता प्रतिबंध का उपयोग करके बताइए कौन-से त्रिभुजों के युग्म सर्वांगसम हैं । सर्वांगसमता की स्थिति में, उत्तर को सांकेतिक रूप में लिखिए।

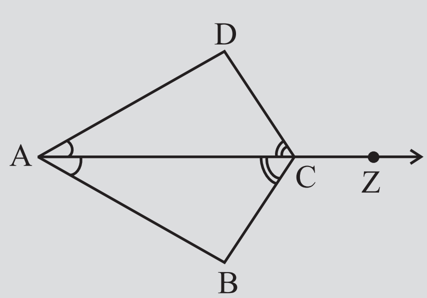


आकृति 7.27

4. दो त्रिभुजों के कुछ भागों की निम्न माप दी गई है। ASA सर्वांगसमता प्रतिबंध का उपयोग करके जाँचिए कि क्या ये दो त्रिभुज सर्वांगसम हैं या नहीं। सर्वांगसमता की स्थिति में उत्तर को सांकेतिक रूप में भी लिखिए।

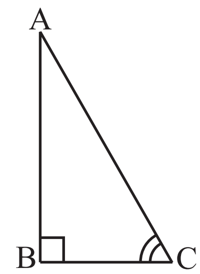
	ΔDEF	ΔPQR
(i)	$\angle D = 60^o$, $\angle F = 80^o$, DF = 5 cm	$\angle Q = 60^o$, $\angle R = 80^o$, QR = 5 cm
(ii)	$\angle D = 60^o$, $\angle F = 80^o$, DF = 6 cm	$\angle Q = 60^o$, $\angle R = 80^o$, QP = 6 cm
(iii)	$\angle E = 80^o$, $\angle F = 30^o$, EF = 5 cm	$\angle P = 80^o$, PQ = 5 cm, $\angle R = 30^o$

5. आकृति 7.28 में, किरण AZ, $\angle DAB$ तथा $\angle DCB$ को समद्विभाजित करती है।
   (i) त्रिभुजों BAC और DAC में बराबर भागों के तीन युग्म बताइए ।
   (ii) क्या $\Delta BAC \cong \Delta DAC$ हैं ? कारण दीजिए।
   (iii) क्या AB = AD है ? अपने उत्तर का उचित कारण दीजिए।
   (iv) क्या CD = CB है ? कारण दीजिए ।



आकृति 7.28

7.7 समकोण त्रिभुजों में सर्वांगसमता



आकृति 7.29

दो समकोण त्रिभुजों की स्थिति में सर्वांगसमता को यथायोग्य विशेष ध्यान देना होता है। ऐसे त्रिभुजों में, दो समकोण पहले ही बराबर होते हैं। अतः सर्वांगसमता प्रतिबंध आसान हो जाता है।

क्या आप एक ΔABC बना सकते हैं जिसमें $\angle B = 90°$ हो (आकृति 7.29 में दिखाया गया) यदि :

(i) केवल भुजा BC ज्ञात हो ? (ii) केवल $\angle C$ का पता हो ?

(iii) $\angle A$ और $\angle C$ की जानकारी हो ? (iv) भुजा AB और BC की जानकारी हो ?

(v) कर्ण AC और AB या BC में से एक भुजा की जानकारी हो ?

इनकी खाका आकृतियाँ बनाने का प्रयास कीजिए। आप देखेंगे कि (iv) और (v) त्रिभुज बनाने में आपकी सहायता करते हैं। परंतु स्थिति (iv) साधारणतया SAS प्रतिबंध ही है। स्थिति (v) कुछ नयी है। यह निम्न प्रतिबंध की ओर अग्रसर करता है।

RHS सर्वांगसमता प्रतिबंध
यदि एक सुमेलन के अंतर्गत, किसी समकोण त्रिभुज का कर्ण और एक भुजा क्रमशः किसी दूसरे समकोण त्रिभुज के कर्ण और एक भुजा के बराबर हो, तो वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

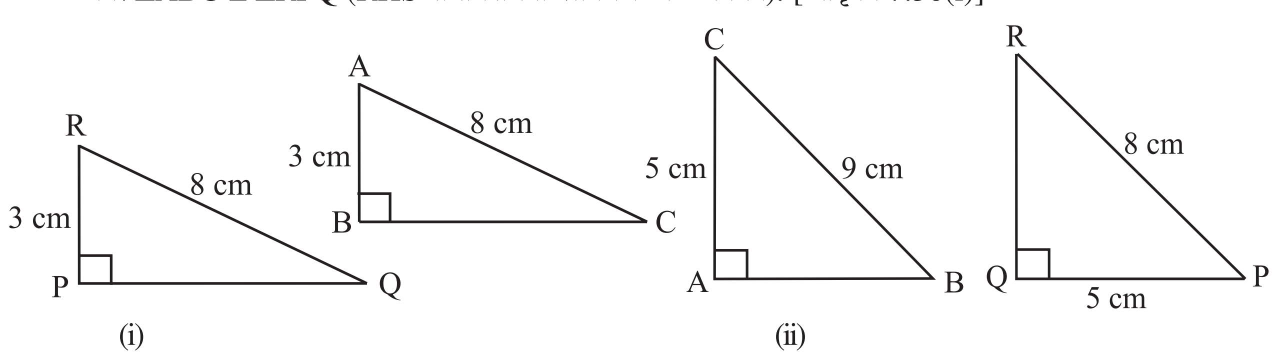
हम इसें RHS सर्वांगसमता क्यों कहते हैं? इसके बारे में सोचिए।

उदाहरण 8 त्रिभुजों के युग्मों के कुछ भागों के निम्न माप दिए गए हैं। RHS सर्वांगसमता प्रतिबंध का प्रयोग करके बताइए कि क्या ये त्रिभुज युग्म सर्वांगसम हैं या नहीं। सर्वांगसम त्रिभुजों की स्थिति में, उत्तर को सांकेतिक रूप में भी लिखिए :

	ΔABC	ΔPQR
(i)	$\angle B = 90°$, AC = 8 cm, AB = 3 cm	$\angle P = 90°$, PR = 3 cm, QR = 8 cm
(ii)	$\angle A = 90°$, AC = 5 cm, BC = 9 cm	$\angle Q = 90°$, PR = 8 cm, PQ = 5 cm

हल

(i) यहाँ, $\angle B = \angle P = 90°$,
कर्ण AC = कर्ण RQ (= 8 cm) और
भुजा AB = भुजा RP (= 3 cm)
अतः $\Delta ABC \cong \Delta RPQ$ (RHS सर्वांगसमता प्रतिबंध के अंतर्गत). [आकृति 7.30(i)]



आकृति 7.30

(ii) यहाँ, $\angle A = \angle Q (= 90^\circ)$ और
भुजा AC = भुजा PQ (= 5 cm)
लेकिन कर्ण $BC \neq$ कर्ण PR [आकृति 7.30 (ii)]
अतः त्रिभुज सर्वांगसम नहीं हैं।

उदाहरण 9 आकृति 7.31 में, $DA \perp AB$, $CB \perp AB$ और $AC = BD$ है।

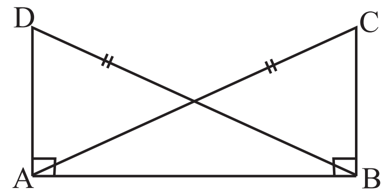


Fig 7.31

(a) ΔABC और ΔDAB में बराबर भागों के तीन युग्म बताइए।

(b) निम्न में कौन-सा कथन सत्य है?

(i) $\Delta ABC \cong \Delta BAD$ (ii) $\Delta ABC \cong \Delta ABD$

हल बराबर भागों के तीन युग्म ये हैं:

$\angle ABC = \angle BAD$ $(= 90^\circ)$
$AC = BD$ (दिया गया है)
$AB = BA$ (उभयनिष्ठ भुजा)

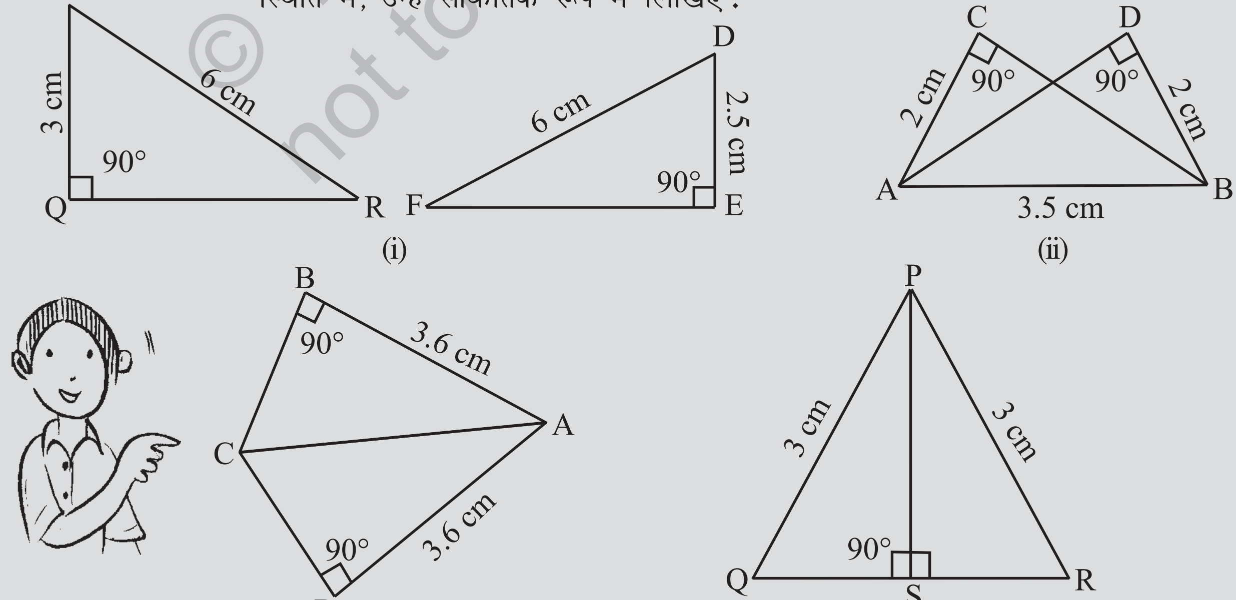
अतः $\Delta ABC \cong \Delta BAD$ (RHS सर्वांगसमता प्रतिबंध से)

इसलिए कथन (i) सत्य है।

कथन (ii) सत्य नहीं है क्योंकि शीर्षों में सुमेलन सही नहीं है।

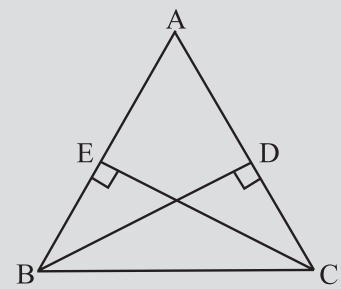
इन्हें कीजिए

1. आकृति 7.32 में, त्रिभुजों के कुछ भागों की माप दी गई है। RHS सर्वांगसमता प्रतिबंध का उपयोग करके बताइए कि कौन-कौन से त्रिभुज युग्म सर्वांगसम हैं। सर्वांगसम त्रिभुजों की स्थिति में, उन्हें सांकेतिक रूप में लिखिए:



आकृति 7.32

2. RHS सर्वांगसमता प्रतिबंध से $\Delta ABC \cong \Delta RPQ$ स्थापित करना है। यदि यह दिया गया हो कि $\angle B = \angle P = 90^\circ$ और $AB = RP$ है तो अन्य किस और सूचना की आवश्यकता है?



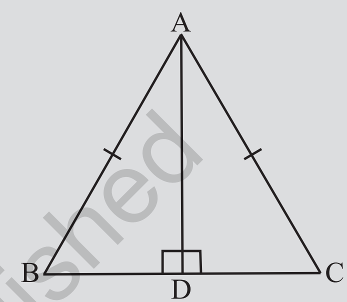
आकृति 7.33

3. आकृति 7.33 में, BD और CE, ΔABC के शीर्ष लंब हैं और $BD = CE$.

(i) ΔCBD और ΔBCE में, बराबर भागों के तीन युग्म बताइए।

(ii) क्या $\Delta CBD \cong \Delta BCE$ है? क्यों अथवा क्यों नहीं?

(iii) क्या $\angle DCB = \angle EBC$ है? क्यों या क्यों नहीं?



आकृति 7.34

4. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $AB = AC$ और AD इसका एक शीर्षलंब है (आकृति 7.34)।

(i) ΔADB और ΔADC में, बराबर भागों के तीन युग्म बताइए।

(ii) क्या $\Delta ADB \cong \Delta ADC$ है? क्यों अथवा क्यों नहीं?

(iii) क्या $\angle B = \angle C$ है? क्यों या क्यों नहीं?

(iv) क्या $BD = CD$ है? क्यों या क्यों नहीं?

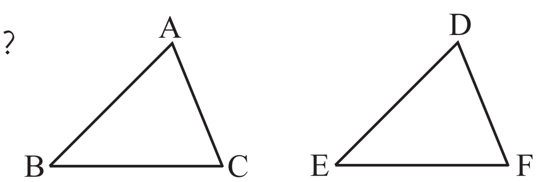
अब हम अभी तक देखे गए प्रतिबंधों पर आधारित कुछ उदाहरणों और प्रश्नों को देखेंगे।

प्रश्नावली 7.2

1. निम्न में आप कौन से सर्वांगसम प्रतिबंधों का प्रयोग करेंगे?

(a) **दिया है :** $AC = DF, AB = DE, BC = EF$

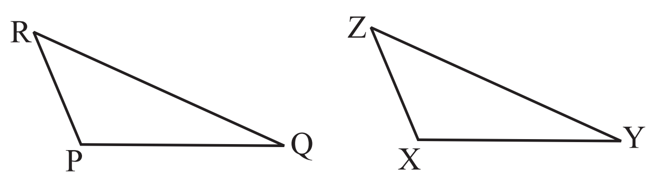
इसलिए, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$



(b) **दिया है :** $ZX = RP, RQ = ZY$

$\angle PRQ = \angle XZY$

इसलिए, $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$

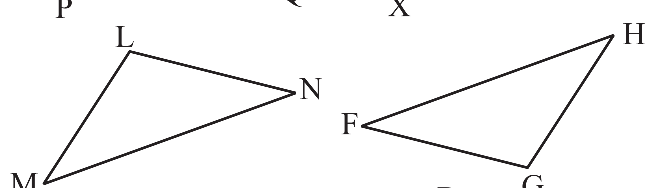


(c) **दिया है :** $\angle MLN = \angle FGH$

$\angle NML = \angle GFH$

$ML = FG$

इसलिए, $\Delta LMN \cong \Delta GFH$

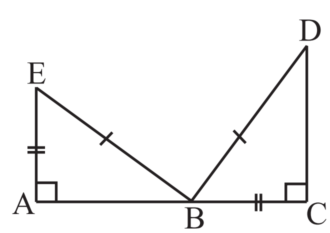


(d) **दिया है :** $EB = DB$

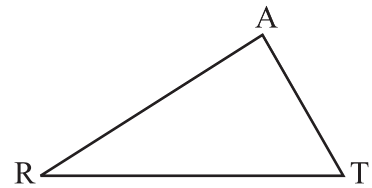
$AE = BC$

$\angle A = \angle C = 90^\circ$

इसलिए, $\Delta ABE \cong \Delta CDB$



2. आप $\Delta ART \cong \Delta PEN$ दर्शाना चाहते हैं,

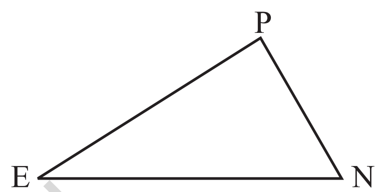


(a) यदि आप SSS सर्वांगसमता प्रतिबंध का प्रयोग करें तो आपको दर्शाने की आवश्यकता है :

(i) AR = (ii) RT = (iii) AT =

(b) यदि यह दिया गया है कि $\angle T = \angle N$ और आपको SAS प्रतिबंध का प्रयोग करना है, तो आपको आवश्यकता होगी :

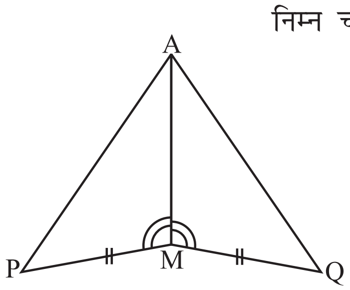
(i) RT = और (ii) PN =



(c) यदि यह दिया गया है कि AT = PN और आपको ASA प्रतिबंध का प्रयोग करना है तो आपको आवश्यकता होगी :

(i) ? = (ii) ? =

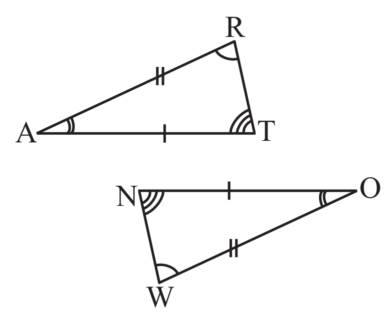
3. आपको $\Delta AMP \cong \Delta AMQ$ दर्शाना है।
निम्न चरणों में, रिक्त कारणों को भरिए।



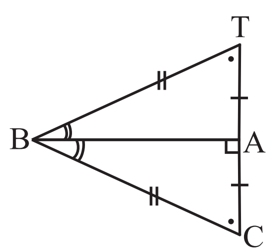
क्रम	कारण
(i) PM = QM	(i) ...
(ii) $\angle PMA = \angle QMA$	(ii) ...
(iii) AM = AM	(iii) ...
(iv) $\Delta AMP \cong \Delta AMQ$	(iv) ...

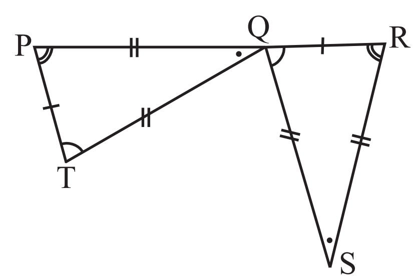
4. ΔABC में, $\angle A = 30°$, $\angle B = 40°$ और $\angle C = 110°$
ΔPQR में, $\angle P = 30°$, $\angle Q = 40°$ और $\angle R = 110°$
एक विद्यार्थी कहता है कि AAA सर्वांगसमता प्रतिबंध से $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ है। क्या यह कथन सत्य है ? क्यों या क्यों नहीं ?

5. आकृति में दो त्रिभुज ART तथा OWN सर्वांगसम हैं जिनके संगत भागों को अंकित किया गया है। हम लिख सकते हैं $\Delta RAT \cong$?



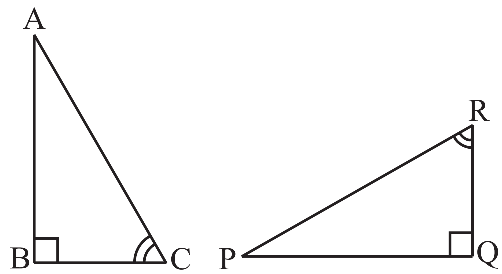
6. कथनों को पूरा कीजिए :





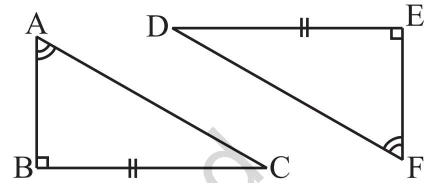
$\Delta BCA \cong$? $\Delta QRS \cong$?

7. एक वर्गांकित शीट पर, बराबर क्षेत्रफलों वाले दो त्रिभुजों को इस प्रकार बनाइए कि
   (i) त्रिभुज सर्वांगसम हो।
   (ii) त्रिभुज सर्वांगसम न हो।
   आप उनके परिमाप के बारे क्या कह सकते हैं ?



8. आकृति में एक सर्वांगसम भागों का एक अतिरिक्त युग्म बताइए जिससे ΔABC और ΔPQR सर्वांगसम हो जाएँ। आपने किस प्रतिबंध का प्रयोग किया ?

9. चर्चा कीजिए, क्यों ?
   $\Delta ABC \cong \Delta FED$.



ज्ञानवर्धक क्रियाकलाप (Enrichment Activity)

हमने देखा कि अध्यारोपण तल-आकृतियों की सर्वांगसमता को जाँचने की एक उपयोगी विधि है। हमने रेखाखंडों, कोणों और त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए प्रतिबंधों का वर्णन किया। अब आप इस संकल्पना को बढ़ाकर तल की दूसरी आकृतियों के लिए प्रयत्न कर सकते हैं।

1. अलग-अलग माप के वर्गों के कट-आउट (cutout) सोचिए। अध्यारोपण विधि का प्रयोग वर्गों की सर्वांगसमता के लिए प्रतिबंध ज्ञात करने के लिए कीजिए। कैसे "सर्वांगसम भागों" की संकल्पना सर्वांगसम के अंतर्गत उपयोग होती है ? क्या यहाँ संगत भुजाएँ हैं ? क्या यहाँ संगत विकर्ण हैं ?
2. यदि आप वृत्त लेते हैं तो क्या होता है ? दो वृत्तों की सर्वांगसमता के लिए प्रतिबंध क्या है ? क्या, आप फिर अध्यारोपण विधि का प्रयोग कर सकते हैं, पता लगाइए।
3. इस संकल्पना को बढ़ाकर तल की दूसरी आकृतियाँ, जैसे समषट्भुज इत्यादि के लिए प्रयत्न कीजिए।
4. एक त्रिभुज की दो सर्वांगसम प्रतिलिपियाँ लीजिए। कागज को मोड़कर पता लगाइए कि क्या उनके शीर्षलंब बराबर हैं। क्या उनकी माध्यिकाएँ समान हैं ? आप उनके परिमाप तथा क्षेत्रफलों के बारे में क्या कह सकते हैं ?

हमने क्या चर्चा की ?

1. सर्वांगसम वस्तुएँ एक दूसरे की प्रतिलिपियाँ होती हैं।

2. अध्यारोपण विधि तल-आकृतियों की सर्वांगसमता की जाँच करती है।

3. दो तल आकृतियाँ, माना, F_1 और F_2 सर्वांगसम होती हैं यदि F_1 की अक्स-प्रतिलिपि F_2. को पूर्णतया ढक लेती है। हम इसे $F_1 \cong F_2$ के रूप में लिखते हैं।

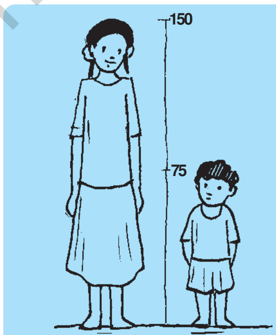
4. दो रेखाखंड, माना, $\overline{AB}$ और $\overline{CD}$, सर्वांगसम होते हैं यदि उनकी लंबाइयाँ बराबर हों। हम इसे $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ के रूप में लिखते हैं। यद्यपि, साधारणतया इसे $\overline{AB} = \overline{CD}$ लिखते हैं।

5. दो कोण, माना, $\angle ABC$ और $\angle PQR$, सर्वांगसम होते हैं यदि उनकी माप बराबर हो। हम इसे $\angle ABC \cong \angle PQR$ या $m\angle ABC = m\angle PQR$. के रूप में लिखते हैं। यद्यपि, अभ्यास में इसे साधारणतया $\angle ABC = \angle PQR$ के रूप में लिखते हैं।
6. दो त्रिभुजों की SSS सर्वांगसमता :
   एक दिए हुए सुमेलन के अंतर्गत, दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं यदि एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ किसी दूसरे त्रिभुज की तीनों संगत भुजाओं के बराबर हो।
7. दो त्रिभुजों की SAS सर्वांगसमता :
   एक दिए हुए सुमेलन के अंतर्गत, दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं यदि एक त्रिभुज की दो भुजाएँ और उनके अंतर्गत कोण, दूसरे त्रिभुज की दो संगत भुजाओं और उनके अंतर्गत कोण के बराबर हो।
8. दो त्रिभुजों की ASA सर्वांगसमता :
   एक दिए हुए सुमेलन के अंतर्गत, दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं यदि एक त्रिभुज के दो कोण और उनकी अंतर्गत भुजा किसी दूसरे त्रिभुज के दो संगत कोणों और अंतर्गत भुजा के बराबर हो।
9. दो त्रिभुजों की RHS सर्वांगसमता :
   एक दिए हुए सुमेलन के अंतर्गत, दो समकोण त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं यदि किसी समकोण त्रिभुज का कर्ण और एक भुजा किसी दूसरे समकोण त्रिभुज के कर्ण और संगत भुजा के बराबर हो।
10. दो त्रिभुजों में AAA सर्वांगसमता नहीं होती है।
    यह आवश्यक नहीं है कि बराबर संगत कोणों के दो त्रिभुज सर्वांगसम हों। ऐसे सुमेलनों में, इनमें से एक, दूसरे की बढ़ी हुई प्रतिलिपि हो सकती है। (वे सर्वांगसम होंगे यदि वे एक दूसरे की एक जैसी प्रतिलिपि हो)।

राशियों की तुलना

अध्याय 8

8.1 भूमिका



150 cm 75 cm
हीना आमिर

हमारे दैनिक जीवन में, अनेक ऐसे अवसर आते हैं जब हम दो राशियों की तुलना करते हैं। मान लीजिए हम हीना और आमिर की ऊँचाइयों की तुलना कर रहे हैं। हम पाते हैं कि

1. हीना, आमिर से दो गुनी ऊँची है।

अथवा

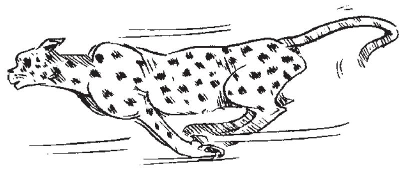
2. आमिर की ऊँचाई हीना की ऊँचाई की आधी है।

एक और उदाहरण पर विचार कीजिए, जब हम 20 कँचे, रीटा और अमित में इस प्रकार बाँटते हैं कि रीटा को 12 कँचे तथा अमित को 8 कँचे मिलते हैं। हम कह सकते हैं:

1. रीटा के पास, अमित से $\frac{3}{2}$ गुने कँचे हैं।

अथवा

2. अमित के पास रीटा के कंचों का $\frac{2}{3}$ भाग है।


चीते की चाल
120 km प्रति घंटा


आदमी की चाल
20 km प्रति घंटा

ऐसे ही एक और उदाहरण में हम चीते और एक आदमी की चालों की तुलना करते हैं।
यहाँ चीते की चाल आदमी की चाल की 6 गुनी है।

अथवा

आदमी की चाल, चीते की चाल का $\frac{1}{6}$ वाँ भाग है।

क्या आपको भी ऐसी कुछ अन्य तुलनाएँ याद हैं? कक्षा 6 में हम दो राशियों की तुलना करना सीख चुके हैं, जब हमने बताया कि एक राशि, दूसरी राशि की कितने गुनी है। अब हम यह देखते हैं कि किसी तुलना को भी उल्टा करके यह बताया जा सकता है कि दूसरी राशि पहली राशि का कौन-सा भाग है।

ऊपर के उदाहरणों में, हम राशियों को, जैसे ऊँचाइयों को, अनुपात के रूप में भी दर्शा सकते हैं। जैसे, हीना की ऊँचाई : आमिर की ऊँचाई = 150:75 अथवा 2:1 है।

क्या, अब आप अन्य तुलनाओं को भी अनुपातों के रूप में व्यक्त कर सकते हैं?

ये परस्पर तुलनाएँ हैं, जो दो विभिन्न स्थितियों में भी समान हो सकती हैं।

यदि हीना की ऊँचाई 150 cm तथा आमिर की ऊँचाई 100 cm होती, तब उनकी ऊँचाइयों में अनुपात होता :

हीना की ऊँचाई : आमिर की ऊँचाई $= 150:100 = \frac{150}{100} = \frac{3}{2}$ या 3:2 है।

यह वही अनुपात है जो रीता ओर अमित के कंचों में था।

इस प्रकार, हम देखते हैं कि दो विभिन्न स्थितियों में तुलना करने पर, एक ही अनुपात मिल सकता है।

ध्यान रखिए कि तुलना करने में दोनों राशियों की इकाइयाँ समान होनी चाहिए। अनुपात की कोई इकाई नहीं होती।

उदाहरण 1 3 km का 300 m के साथ अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल पहले दोनों दूरियों को एक ही इकाई में लिखते हैं।

अत:, $3 \text{ km} = 3 \times 1000 \text{ m} = 3000 \text{ m}$

इस प्रकार, अभीष्ट अनुपात 3 km:300 m, अर्थात् 3000 m:300 m या 10:1 है।

8.2 तुल्य अनुपात

विभिन्न अनुपातों की भी आपस में तुलना की जा सकती है, जिससे पता चल सके कि वे तुल्य हैं अथवा नहीं। ऐसा करने के लिए, हमें अनुपातों को पहले भिन्नों के रूप में लिखना पड़ता है और फिर उन्हें समान हर वाली भिन्नों में बदलकर उनकी तुलना करते हैं। यदि ये भिन्नें समान हैं तब हम कहते हैं कि दिए हुए अनुपात तुल्य हैं।

उदाहरण 2 क्या अनुपात 1:2 अनुपात 2:3 के तुल्य है?

हल जाँच करने के लिए, हमें देखना होगा कि क्या $\frac{1}{2} = \frac{2}{3}$ है?

हम पाते हैं $\frac{1}{2} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{3}{6}$ तथा $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 2}{3 \times 2} = \frac{4}{6}$

हम देखते हैं कि $\frac{3}{6} < \frac{4}{6}$ है। अर्थात् $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$ है।

अत:, अनुपात 1 : 2, अनुपात 2 : 3 के तुल्य नहीं है।

ऐसी तुलनाओं का उपयोग निम्न उदाहरण में देखा जा सकता है :

उदाहरण 3 एक क्रिकेट टीम द्वारा खेले गए कुछ मैचों में प्रदर्शन निम्न प्रकार हैं :

	जीत	हार
पिछले वर्ष	8	2
इस वर्ष	4	2

किस वर्ष में प्रदर्शन बेहतर था?
ऐसा आप किस आधार पर कह सकते हैं?

हल पिछले वर्ष, जीत : हार $= 8 : 2 = 4 : 1$
इस वर्ष, जीत : हार $= 4 : 2 = 2 : 1$

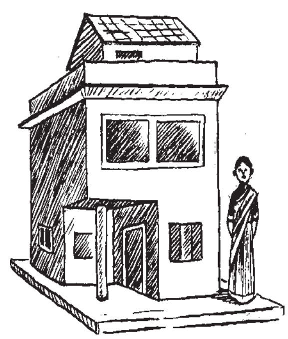
स्पष्ट है कि $4 : 1 > 2 : 1$ (भिन्न रूप में $\frac{4}{1} > \frac{2}{1}$)

अत:, हम कह सकते हैं कि पिछले वर्ष टीम का प्रदर्शन बेहतर अर्थात् अधिक अच्छा था।

कक्षा VI में, हमनें देखा था कि तुल्य अनुपात किस प्रकार महत्वपूर्ण हैं। दो अनुपात यदि तुल्य हों, तो वे एक समानुपात बनाते हैं। आइए समानुपात के बारे में स्मरण करें।

राशियों को समानुपात में रखना और हल प्राप्त करना

अरुणा ने अपने मकान की रूपरेखा देखकर उसका एक प्रतिरूप कागज़ पर बनाया और मकान के साथ ही अपनी माँ को भी खड़ा दिखाया।
देखकर मोना बोली "इस चित्रांकन में कुछ गलती नज़र आती है।"
क्या आप बता सकते हैं कि इसमें क्या गलती है ?
आप ऐसा कैसे कह सकते हैं ?



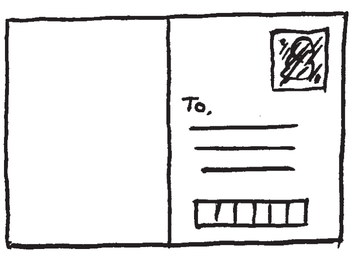
यहाँ चित्र में दर्शाई गई ऊँचाइयों का अनुपात और वास्तव ऊँचाइयों का अनुपात समान होने चाहिए।

$$\frac{\text{मकान की सही ऊँचाई}}{\text{माँ की सही ऊँचाई}} = \frac{\text{चित्र में मकान की ऊँचाई}}{\text{चित्र में माँ की ऊँचाई}}$$

ऐसा होने पर ही सही समानुपात बनेगा। प्राय: जब सही समानुपात में कोई चित्र बनाया जाता है, तब ही वह देखने में मोहक एवं आकर्षक लगता है।

एक अन्य उदाहरण राष्ट्रीय ध्वज का है, जहाँ ध्वज को बनाने में सही समानुपात का ध्यान रखा जाता है।

क्या आपको पता है कि राष्ट्रीय ध्वज सदैव, लंबाई व चौड़ाई के एक निश्चित अनुपात में ही बनाए जाते हैं, जो विभिन्न देशों के लिए विभिन्न हो सकते हैं? लेकिन प्राय: यह अनुपात 1.5:1 अथवा 1.7:1 होता है।



हम इस अनुपात का मान 3:2 के लगभग ले सकते हैं। लगभग यही मान भारत में प्रयोग में लाए जाने वाले पोस्ट कार्ड में भी होता है।

अब, क्या आप कह सकते हैं कि 4.5 cm लंबे तथा 3.0 cm चौड़े कार्ड में यही अनुपात है? इसके लिए आपको अनुपातों 4.5:3.0 तथा 3:2 की तुल्यता देखनी होगी।

हम देखते हैं कि $4.5 : 3.0 = \frac{4.5}{3.0} = \frac{45}{30} = \frac{3}{2}$

अत:, हम पाते हैं कि 4.5 : 3.0 तथा 3 : 2 तुल्य अनुपात हैं।

वास्तविक जीवन में समानुपातों के व्यापक उपयोग मिलते हैं। क्या आप ऐसी कुछ परिस्थितियों के बारे में सोच सकते हैं ?

हमने पिछली कक्षाओं में *ऐकिक विधि* से भी प्रश्न हल करना सीखा है । इस विधि में पहले हम अनेक से एक और फिर वांछित संख्या के लिए मान ज्ञात करते हैं ।

आइए, अब देखें कि इन दोनों विधियों से एक ही समस्या को कैसे हल किया जाता है।

उदाहरण 4 एक मानचित्र 1000 km को 2 cm से दर्शाते हुए बनाया गया है। यदि दो स्थानों के बीच की दूरी मानचित्र में 2.5 cm है, तब उनके बीच की वास्तविक दूरी कितनी होगी ?

हल

अरुण ने हल ऐसे किया :

माना की दूरी $= x$ km

तब $1000 : x = 2 : 2.5$

या $\dfrac{1000}{x} = \dfrac{2}{2.5}$

या $\dfrac{1000 \times x \times 2.5}{x} = \dfrac{2}{2.5} \times x \times 2.5$

या $1000 \times 2.5 = x \times 2$

या $x = 1250$

वास्तविक दूरी = 1250 km

मीरा ने हल ऐसे किया :

2 cm दर्शाता है 1000 km को

अतः, 1 cm दर्शाता है $\dfrac{1000}{2}$ km को

अतः, 2.5 cm दर्शाता है $\dfrac{1000}{2} \times 2.5$ km को

अर्थात् 1250 km को

अरुण ने पहले समानुपात बनाकर फिर एक समीकरण प्राप्त किया और हल निकाला । मीरा ने पहले 1 cm से प्रदर्शित दूरी ज्ञात की और फिर उससे 2.5 km से प्रदर्शित वास्तविक दूरी ज्ञात की । इस प्रकार, उसने ऐकिक विधि का प्रयोग किया ।

अब आइए ऐकिक विधि को उपयोग में लाते हुए कुछ और समस्याएँ हल करें ।

उदाहरण 5 यदि 6 कटोरियों का मूल्य ₹ 90 है, तब ऐसी ही 10 कटोरियों का मूल्य क्या होगा?

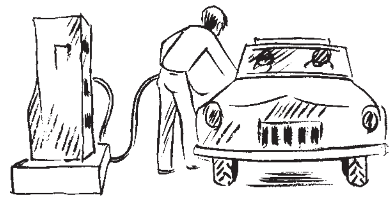
हल 6 कटोरियों का मूल्य = ₹ 90

अतः, 1 कटोरी का मूल्य = ₹ $\dfrac{90}{6}$

अतः, 10 कटोरियों का मूल्य = ₹ $\dfrac{90}{6} \times 10$ = ₹ 150

उदाहरण 6 मेरी कार 25 लीटर पैट्रोल में 150 km की दूरी तय कर लेती है । 30 लीटर पैट्रोल में यह कितनी दूरी तय करेगी ?

हल 25 लीटर पैट्रोल में तय की गई दूरी = 150 km



अत:, 1 लीटर पैट्रोल में दूरी चलेगी = $\frac{150}{25}$ km

अत:, 30 लीटर पैट्रोल में दूरी चलेगी = $\frac{150}{25} \times 30$ km = 180 km

इस विधि में, पहले हम एक वस्तु के लिए मान निकालते हैं, अर्थात् ऐकिक दर निकालते हैं। यह दो विभिन्न गुणों की तुलना करके किया जाता है। उदाहरण के लिए, वस्तुओं के मूल्य से तुलना करके एक वस्तु का मूल्य ज्ञात किया जाता है।
अथवा दूरी तथा समय दिए होने पर इकाई समय में तय होने वाली दूरी ज्ञात कर लेते हैं।
इस प्रकार आप देख सकते हैं कि प्रत्येक को दर्शाने के लिए हम प्राय: प्रति का प्रयोग करते हैं।

उदाहरण के लिए, किलोमीटर प्रति घंटा (km/h), विद्यार्थी प्रति अध्यापक, आदि, इकाई दर प्रदर्शित करते हैं।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

एक चींटी अपने भार से 50 गुना भार ढो सकती है। यदि यही तथ्य मानव पर भी लागू हो, तब ज्ञात कीजिए कि आप कितना भार ढो पाएँगे ?

प्रश्नावली 8.1

1. अनुपात ज्ञात कीजिए :
   (a) ₹ 5 का 50 पैसे से
   (b) 15 kg का 210 g से
   (c) 9 m का 27 cm से
   (d) 30 दिनों का 36 घंटों से
2. एक कंप्यूटर प्रयोगशाला में 6 विद्यार्थियों के लिए 3 कंप्यूटर होने चाहिए। ज्ञात कीजिए कि 24 विद्यार्थियों के लिए कितने कंप्यूटरों की आवश्यकता होगी ?
3. राजस्थान की जनसंख्या = 570 लाख और उत्तर प्रदेश की जनसंख्या = 1660 लाख राजस्थाान का क्षेत्रफल = 3 लाख km^2 और उत्तर प्रदेश का क्षेत्रफल = 2 लाख km^2, ज्ञात कीजिए
   (i) इन दोनों राज्यों में प्रति km^2 कितने व्यक्ति हैं ?
   (ii) किस राज्य की जनसंख्या कम घनी है ?

8.3 प्रतिशतता-राशियों के तुलना करने की एक और विधि

अनीता की रिपोर्ट
प्राप्तांक : 320/400
प्रतिशत : 80

रीता की रिपोर्ट
प्राप्तांक : 300/360
प्रतिशत : 83.3

अनीता कहती है कि उसका परीक्षाफल अधिक अच्छा है, क्योंकि उसने 320 अंक प्राप्त किए है जबकि रीता ने केवल 300 अंक। क्या आप उससे सहमत हैं? आपके विचार में किसका परीक्षाफल अधिक अच्छा है ?

मानसी कहती है कि केवल प्राप्तांकों की तुलना कर यह नहीं कहा जा सकता है कि किसका परीक्षाफल अधिक अच्छा है क्योंकि अधिकतम अंक जिनमें से दोनों को अंक प्राप्त हुए हैं वे समान नहीं हैं।

वह कहती है कि रिपोर्ट कार्डों में दिए गए प्रतिशत अंकों पर आप ध्यान क्यों नहीं देती। अनीता के प्रतिशत अंक 80 हैं जबकि रीता के प्रतिशत अंक 83.3 हैं। इससे पता चलता है कि रीता का परीक्षाफल अधिक अच्छा है।

क्या आप इससे सहमत हैं ?

प्रतिशत उन भिन्नों का अंश होता है जिनका हर 100 होता है, और यहाँ पर परीक्षाफलों की तुलना करने में इसे किया गया है।

इस प्रकार की भिन्नों को आइए अब विस्तार से समझने का प्रयत्न करें।

8.3.1 प्रतिशतता के अर्थ

प्रतिशत (percent) शब्द, लेटिन भाषा के एक शब्द 'percentum' से लिया गया है जिसका अर्थ है 'प्रति एक सौ'।

प्रतिशत को चिह्न % से प्रदर्शित किया जाता है जिसका अर्थ हैं सौवाँ। यानी एक सौवाँ अर्थात् 1% का अर्थ है सौ में से एक अथवा एक सौवाँ। इसे इस प्रकार लिखते हैं:

$1\% = \frac{1}{100} = 0.01$। इसे समझने के लिए निम्न उदाहरण पर विचार करते हैं।

रीना एक मेज़ के ऊपरी भाग (टॉप) को बनाने के लिए 100 भिन्न-भिन्न रंगों वाली टाइलें प्रयोग करती है। उसने पीले, हरे, लाल और नीले रंग वाली टाइलें अलग-अलग गिनी और एक तालिका में निम्न प्रकार लिखा। क्या आप इस तालिका को पूरी करने में उसकी सहायता करेंगे ?

रंग	टाइलों की संख्या	प्रतिशत दर	भिन्न	ऐसे लिखा जाता है	ऐसे पढ़ा जाता है
पीली	14	14	$\frac{14}{100}$	14%	14 प्रतिशत
हरी	26	26	$\frac{26}{100}$	26%	26 प्रतिशत
लाल	35	35	----	----	----
नीली	25	--------	----	----	----
योग	**100**				

प्रयास कीजिए

1. निम्न आँकड़ों के लिए विभिन्न ऊँचाई वाले बच्चों का प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

ऊँचाई	**बच्चों की संख्या**	**भिन्न रूप में**	**प्रतिशत में**
110 cm	22		
120 cm	25		
128 cm	32		
130 cm	21		
योग	**100**		

2. एक दुकान में विभिन्न मापों वाले जूतों की जोड़ियों की संख्या निम्न प्रकार है।

माप 2 : 20; माप 3 : 30; माप 4 : 28; माप 5 : 14; माप 6 : 8

इस सूचना को ऊपर की भाँति एक तालिका के रूप में लिखिए और दुकान में उपलब्ध जूते की हर माप को प्रतिशतता में भी ज्ञात कर लिखिए।

प्रतिशतता ज्ञात करना जब योग सौ न हो।

उक्त सभी उदाहरणों में वस्तुओं की संख्याओं का योग 100 हो जाता है। उदाहरण के लिए रीना के पास कुल 100 टाइलें थी; बच्चों की संख्या भी 100 तथा जूतों की संख्या भी 100 ही थी। यदि वस्तुओं की कुल संख्या 100 न हो तो प्रत्येक वस्तु का प्रतिशत रूप में कैसे आकलन किया जाता है? ऐसी स्थिति में हमें प्रत्येक भिन्न को उसकी ऐसी तुल्य भिन्न में बदलना पड़ेगा जिसका हर 100 हो। निम्न उदाहरण पर विचार कीजिए। आपके पास गले की ऐसी माला है जिसमें दो रंगों के बीस मनके (beads) पिरोए गए हैं।

रंग	**मनकों की संख्या**	**भिन्न**	**100 हर वाली तुल्य भिन्न**	**प्रतिशत**
लाल	8	$\frac{8}{20}$	$\frac{8}{20}\times\frac{100}{100}=\frac{40}{100}$	40%
नीले	12	$\frac{12}{20}$	$\frac{12}{20}\times\frac{100}{100}=\frac{60}{100}$	60%
योग	**20**			

हम देखते है कि जब वस्तुओं का कुल योग 100 नहीं हो तब प्रतिशत ज्ञात करने के लिए इन तीन विधियों को उपयोग किया जा सकता है। तालिका में दिखाई गई विधि में, हम भिन्न को $\frac{100}{100}$ से गुणा करते हैं। इस प्रकार भिन्न का मान भी नहीं बदलता और हमें ऐसी भिन्न प्राप्त हो जाती है जिसका हर 100 होता है।

अनवर, लाल मनकों का प्रतिशत इस प्रकार ज्ञात करता है: 20 मनकों में लाल की संख्या 8 है, अत: 100 मनकों में लाल की संख्या $= \frac{8}{20} \times 100$

$= 40$ (एक सौ में) $= 40\%$

आशा, लाल मनकों का प्रतिशत इस प्रकार ज्ञात करती है:

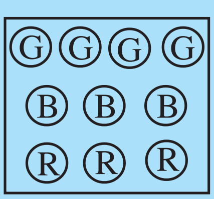
$$\frac{8}{20} = \frac{8 \times 5}{20 \times 5}$$

$$= \frac{40}{100} = 40\%$$

अनवर ने ऐकिक विधि प्रयोग की है। आशा ने हर में 100 प्राप्त करने के लिए उसे $\frac{5}{5}$ से गुणा किया। आपको जो विधि उपयुक्त लगे, उसे उपयोग में ला सकते हैं। हो सकता है आप अपनी कोई विधि भी सोच सकें।

अनवर ने जिस विधि का उपयोग किया वह सभी अनुपातों के लिए प्रयोग की जा सकती है। क्या, आशा ने जिस विधि का उपयोग किया; वह भी सब अनुपातों के लिए उपयुक्त है ? अनवर का कहना है कि आशा की विधि उन भिन्नों में ही उपयोग में लाई जा सकती है, जिनके हर में ऐसी संख्या हो जिसे किसी प्राकृत संख्या से गुणा करने पर 100 प्राप्त हो जाए। क्योंकि उसकी विधि में, हर में संख्या 20 थी जिसे उसने 5 से गुणा कर 100 प्राप्त कर लिया। यदि हर में संख्या 6 होती तब वह इस विधि को उपयोग नहीं कर सकती थी। क्या आप इससे सहमत हैं ?

प्रयास कीजिए



1. विभिन्न रंगों वाली 10 टुकड़ों (chips) का संग्रह इस प्रकार से है:

रंग	संख्या	भिन्न	हर सौ	प्रतिशत में
हरा (G)				
नीला (B)				
लाल (R)				
योग				

तालिका पूर्ण कीजिए तथा प्रत्येक रंग वाले टुकड़ों का प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

2. माला के पास चूड़ियों का एक संग्रह है जिनमें 20 सोने तथा 10 चाँदी की चूड़ियाँ हैं। प्रत्येक प्रकार की चूड़ियों का प्रतिशत क्या है ? क्या आप इसके लिए भी ऊपर की तरह तालिका बना सकते हैं ?

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

निम्न उदाहरणों को ध्यान से देखिए और चर्चा कीजिए कि उनमें प्रत्येक के लिए कौन-सी विधि अधिक उपयुक्त है।

1. वातावरण में, 1 gm वायु में उपस्थित हैं:

.78 ग्राम नाइट्रोजन
.21 ग्राम ऑक्सीजन
.01 ग्राम अन्य गैस

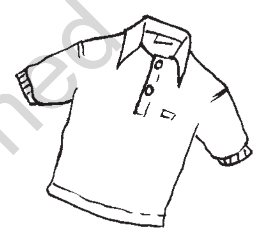
अथवा

78% नाइट्रोजन
21% ऑक्सीजन
1% अन्य गैस

2. एक कमीज़ के कपड़े में होते हैं:

$\frac{3}{5}$ सूती
$\frac{2}{5}$ पॉलिस्टर

60% सूती
40% पॉलिस्टर



8.3.2 भिन्न संख्याओं को प्रतिशत में बदलना

भिन्न संख्याओं में, हर विभिन्न संख्याएँ हो सकती हैं। उनकी तुलना करने के लिए हमें उनके हरों को समान करना पड़ता है और हम देख चुके हैं कि तब उनकी तुलना करना बहुत आसान हो जाता है यदि उनमें प्रत्येक का हर 100 हो। यानी हम भिन्नों को प्रतिशत में बदल रहे हैं। आइए अब कुछ भिन्नों को प्रतिशत में बदलने का प्रयत्न करें।

उदाहरण 7 $\frac{1}{3}$ को प्रतिशत रूप में लिखिए।

हल संख्या है, $\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\times\frac{100}{100}=\frac{1}{3}\times 100\%$

$$=\frac{100}{3}\% = 33\frac{1}{3}\%$$

उदाहरण 8 25 बच्चों की कक्षा में 15 लड़कियाँ हैं। लड़कियों का प्रतिशत क्या है ?

हल 25 बच्चों में 15 लड़कियाँ हैं

अत: लड़कियों का प्रतिशत $=\frac{15}{25}\times 100 = 60$। अर्थात् कक्षा में 60% लड़कियाँ हैं।

उदाहरण 9 $\frac{5}{4}$ को प्रतिशत में बदलिए।

हल संख्या में, $\frac{5}{4}=\frac{5}{4}\times 100\% = 125\%$

इन उदाहरणों में हम देखते हैं कि एक उचित भिन्न को प्रतिशत में बदलने पर 100 से कम प्रतिशत तथा मिश्र भिन्न को प्रतिशत में बदलने पर 100 से अधिक प्रतिशत प्राप्त होता है।

सोचिए और चर्चा कीजिए

(i) क्या आप किसी 'केक' (cake) का 50% खा सकते हैं ?

क्या आप किसी 'केक' (cake) का 100% खा सकते हैं ?

क्या आप किसी 'केक' (cake) का 150% खा सकते हैं ?

(ii) क्या किसी वस्तु का मूल्य 50% बढ़ सकता है ?

क्या किसी वस्तु का मूल्य 100% बढ़ सकता है ?

क्या किसी वस्तु का मूल्य 150% बढ़ सकता है ?

8.3.3 दशमलव भिन्न को प्रतिशत में बदलना

हमने देखा कि साधारण भिन्नों को प्रतिशत में किस प्रकार बदला जाता है। अब आइए देखें दशमलव भिन्नों को भी प्रतिशत में कैसे बदला जाता है।

उदाहरण 10 दिए गए दशमलवों को प्रतिशत में बदलिए :

(a) 0.75 (b) 0.09 (c) 0.2

हल

(a) $0.75 = 0.75 \times 100\ \%$

$= \frac{75}{100} \times 100\ \% = 75\%$

(b) $0.09 = \frac{9}{100} = 9\ \%$

(c) $0.2 = \frac{2}{10} \times 100\% = 20\ \%$

प्रयास कीजिए

1. निम्नलिखित भिन्नों को प्रतिशत में बदलिए।

(a) $\frac{12}{16}$ (b) 3.5 (c) $\frac{49}{50}$

(d) $\frac{2}{2}$ (e) 0.05

2. (i) 32 विद्यार्थियों में 8 अनुपस्थित हैं। विद्यार्थियों का क्या प्रतिशत अनुपस्थित है?

(ii) 25 रेडियो सैट में 16 खराब हैं। खराब रेडियो सैटों का प्रतिशत क्या है ?

(iii) एक दुकान में 500 पुर्जे हैं जिनमें 5 बेकार हैं। बेकार पुर्जों का प्रतिशत क्या है ?

(iv) 120 मतदाताओं में से 90 ने 'हाँ' में मत दिया। कितने प्रतिशत ने 'हाँ' में मत दिया?

8.3.4 प्रतिशत को साधारण भिन्न या दशमलव में बदलना

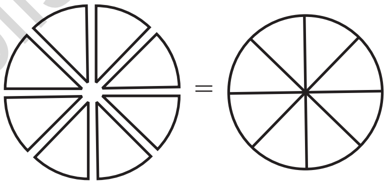
अभी तक हमने साधारण भिन्न या दशमलव भिन्न को प्रतिशत में बदला। हम इसका विपरीत भी कर सकते हैं। यानी, प्रतिशत दिए होने पर उसे साधारण या दशमलव भिन्न में भी बदल सकते हैं। निम्न तालिका को ध्यान से देखकर पूरा कीजिए:

प्रतिशत	1%	10%	25%	50%	90%	125%	250%
साधारण भिन्न	$\frac{1}{100}$	$\frac{10}{100}=\frac{1}{10}$					
दशमलव भिन्न	0.01	0.10					

ऐसे कुछ अन्य उदाहरण बनाइए और उन्हें हल भी कीजिए।

किसी वस्तु के सभी भाग मिलकर सदैव एक संपूर्ण वस्तु बनाते हैं।

रंगीन टाइलों, बच्चों की ऊँचाइयों तथा वातावरण में गैसों के उदाहरणों में हमने देखा कि जब हम उनके प्रतिशतों को जोड़ते हैं तब 100 ही प्राप्त होता है। वे सभी भाग मिलकर जो एक पूर्ण वस्तु बनाते हैं, जोड़ने पर एक या 100% देते हैं। अत: यदि दो भागों में एक भाग दिया हो तब हम दूसरा भाग ज्ञात कर सकते हैं। निम्न उदाहरण पर विचार कीजिए:



विद्यार्थियों की दी गई संख्या में 30% लड़के हैं।

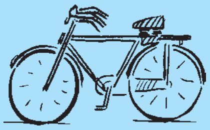
इसका अर्थ यह हुआ कि यदि 100 विद्यार्थी हैं तो उनमें 30 लड़के हैं तथा शेष लड़कियाँ होंगी।

स्पष्ट है कि लड़कियाँ होंगी (100–30)% = 70%.

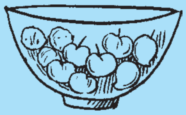
प्रयास कीजिए

1. 35% + _______% = 100%, 64% + 20% +_________ % = 100%

   45% = 100% – _________%, 70% = ______% – 30%



2. किसी कक्षा के विद्यार्थियों में 65% के पास साइकिलें हैं। कितने प्रतिशत विद्यार्थियों के पास साइकिलें नहीं हैं?



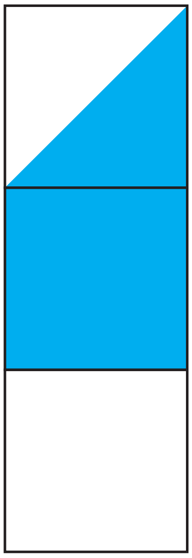
3. हमारे पास, सेब, संतरों तथा आमों से भरी एक टोकरी है। यदि उसमें 50% सेब तथा 30% संतरे हैं तब आमों का प्रतिशत कितना है ?

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

एक परिधान के बनाने पर हुए व्यय को देखिए। कढ़ाई पर 20%, कपड़े पर 50%, सिलाई पर 30% । क्या आप कुछ अन्य ऐसे ही उदाहरण दे सकते हैं।

8.3.5 अनुमान के साथ मनोरंजन

प्रतिशतता, एक दिए क्षेत्रफल के किसी भाग का अनुमान लगाने में सहायता करती है।



उदाहरण 11 निम्न आकृति में छायांकित भाग पूर्ण का कितने प्रतिशत है ?

हल पहले हम देखते हैं कि पूर्ण आकृति का कितना भाग छायांकित है। इस प्रकार प्राप्त भिन्न से छायांकित भाग की प्रतिशतता ज्ञात की जा सकती है।

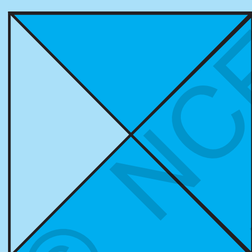
आप देख सकते हैं कि पूर्ण आकृति का आधा भाग छायांकित है।

तथा $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 100\,\% = 50\,\%$

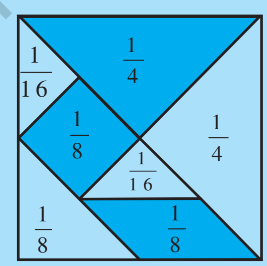
इस प्रकार, 50 % छायांकित है।

निम्न आकृतियों का कितने प्रतिशत छायांकित है ?

(i)



(ii)



टेनग्राम

आप इसी प्रकार कुछ अन्य आकृतियाँ बना सकते हैं और अपने साथियों से छायांकित भाग अनुमान करने को कहिए।

8.4 प्रतिशतता के उपयोग

8.4.1 प्रतिशतता की व्याख्या

आपने देखा कि तुलना करने के लिए प्रतिशतता कितनी उपयोगी है। हमने साधारण व दशमलव भिन्नों को प्रतिशत में बदलना भी सीखा। अब हम देखेंगे कि प्रतिशतता दैनिक जीवन में किस प्रकार प्रयोग में लाई जा सकती है। इसके लिए हम निम्नलिखित कथनों की व्याख्या से आरंभ करते हैं।

– रवि अपनी आय का 5% बचत करता है।
– रेखा को प्रत्येक पुस्तक बेचने पर 10% लाभ मिलता हैं।
– मीरा के 20% वस्त्र नीले रंग के हैं।

इन कथनों में प्रत्येक से आप क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं ?

5% से हमारा तात्पर्य है 100 में से 5 भाग तथा इसे हम लिखते हैं $\frac{5}{100}$। इसका अर्थ हैं कि रवि, अर्जित किए गए प्रत्येक ₹ 100 में से ₹ 5 बचाता है। इस प्रकार आप भी ऊपर दिए गए अन्य कथनों के अर्थ लगाइए।

8.4.2 प्रतिशतता से संख्या ज्ञात करना

निम्नलिखित उदाहरणों पर ध्यान दीजिए

उदाहरण 12 40 बच्चों के सर्वेक्षण से पता चला कि 25% फुटबॉल खेलना पसंद करते हैं। ज्ञात कीजिए कि इनमें कितने बच्चों को फुटबॉल खेलना पसंद था ।

हल यहाँ पर बच्चों की कुल संख्या 40 है। इनमें से 25% फुटबॉल खेलना पसंद करते हैं। मीना और अरुण ने ऐसे बच्चों की संख्या ज्ञात करने के लिए निम्न विधियाँ प्रयुक्त की। आप ऐसे प्रश्नों के हल करने के लिए इनमें से कोई भी विधि प्रयोग कर सकते हैं।

अरूण ने इस प्रकार हल किया

100 में से फुटबॉल खेलना पंसद करने वाले = 25

अत:, 40 में से फुटबॉल खेलना पसंद करने वाले

$= \frac{25}{100} \times 40 = 10$

मीना ने इस प्रकार हल किया

40 का $25\% = \frac{25}{100} \times 40$

$= 10$

इस प्रकार 40 बच्चों में 10 फुटबॉल खेलना पसंद करते हैं।

प्रयास कीजिए

1. ज्ञात कीजिए :

(a) 164 का 50% (b) 12 का 75% (c) 64 का $12\frac{1}{2}\%$

2. 25 बच्चों की कक्षा में 8% बच्चे वर्षा में भीगना पसंद करते हैं। वर्षा में भीगने वाले बच्चों की संख्या ज्ञात कीजिए।

उदाहरण 13 जब 25% छूट दी जा रही थी तब राहुल ने एक स्वेटर खरीदा और ₹ 200 बचाए। छूट से पहले स्वेटर का क्या मूल्य था ?

हल राहुल ने ₹ 200 बचाए जब 25% छूट मिली। यानी मूल्य में 25% कम होने के कारण राहुल को ₹ 200 की बचत हुई। आइए देखें कि मोहन और अब्दुल ने स्वेटर का प्रारंभिक मूल्य कैसे ज्ञात किया ?

मोहन का हल

वास्तविक मूल्य का 25% = ₹ 200

माना मूल्य है ₹ P

अत: P का $25\% = 200$

अर्थात् $\frac{25}{100} \times P = 200$

अर्थात् $\frac{P}{4} = 200$ या $P = 200 \times 4$

अत: $P =$ ₹ 800

अब्दुल का हल

प्रत्येक ₹ 100 पर ₹ 25 की बचत होती है ।

तब ₹ 200 की बचत इस राशि पर होगी

$= \frac{100}{25} \times 200 =$ ₹ 800

दोनों ने ही स्वेटर का वास्तविक मूल्य ₹ 800 ज्ञात किया।

प्रयास कीजिए

1. 9 किस संख्या का 25% है ? **2.** 15 किस संख्या का 75% है ?

प्रश्नमाला 8.2

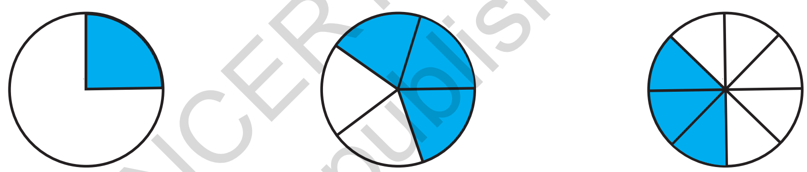
1. दी गई भिन्न संख्याओं को प्रतिशत में बदलो।

(a) $\frac{1}{8}$ (b) $\frac{5}{4}$ (c) $\frac{3}{40}$ (d) $\frac{2}{7}$

2. दी गई दशमलव भिन्नों को प्रतिशत में बदलो।

(a) 0.65 (b) 2.1 (c) 0.02 (d) 12.35

3. अनुमान लगाइए कि आकृति का कितना भाग रंग दिया गया है और इस प्रकार ज्ञात कीजिए कि कितने प्रतिशत रंगीन है।



(i) (ii) (iii)

4. ज्ञात कीजिए :

(a) 250 का 15% (b) 1 घंटे का 1%

(c) 2500 का 20% (d) 1 किग्रा का 75%

5. संपूर्ण राशि ज्ञात कीजिए यदि

(a) इसका 5%, 600 है। (b) इसका 12%, 1080 है। (c) इसका 40%, 500 km है।

(d) इसका 70% 14 मिनट है। (e) इसका 8%, 40 लीटर है।

6. दिए गए प्रतिशतों को साधारण व दशमलव भिन्नों में बदलो और अपने उत्तर को सरलतम रूप में लिखो।

(a) 25% (b) 150% (c) 20% (d) 5%

7. एक नगर में 30% महिलाएँ, 40% पुरुष तथा शेष बच्चे हैं। बच्चों का प्रतिशत कितना है ?

8. किसी क्षेत्र के 15,000 मतदाताओं में से 60% ने मतदान में भाग लिया। ज्ञात कीजिए कि कितने प्रतिशत ने मतदान में भाग नहीं लिया। क्या अब ज्ञात कर सकते हैं कि वास्तव में कितने मतदाताओं ने मतदान नहीं किया ?

9. मीता अपने वेतन में से ₹ 4000 बचाती है। यदि यह उसके वेतन का 10% है, तब उसका वेतन कितना है ?

10. एक स्थानीय क्रिकेट टीम ने, एक सत्र (season) में 20 मैच खेले। इनमें से उस टीम ने 25% मैच जीते। जीते गए मैचों की संख्या कितनी थी ?

8.4.3 अनुपातों से प्रतिशत

कभी–कभी किसी वस्तु या राशि के भाग अनुपात के रूप में दिए होते हैं और हमें उन्हें प्रतिशत में बदलना पड़ता है। निम्न उदाहरणों पर ध्यान दीजिए।

उदाहरण 14 रीना की माता जी ने बताया कि इडली बनाने के लिए 1 भाग उड़द की दाल तथा 2 भाग चावल की आवश्यकता होती है। इडली के ऐसे मिश्रण में, उड़द की दाल व चावल का प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

हल मिश्रण को अनुपात रूप में इस प्रकार लिखा जाएगा।

चावल : उड़द की दाल = 2 : 1

अब, कुल भाग है 2 + 1 = 3। अर्थात् मिश्रण में $\frac{2}{3}$ भाग चावल तथा $\frac{1}{3}$ भाग उड़द की दाल है।

अतः, चावल का प्रतिशत होगा $\frac{2}{3}\times 100\,\% = \frac{200}{3} = 66\frac{2}{3}\,\%$

तथा उड़द की दाल का प्रतिशत होगा $\frac{1}{3}\times 100\,\% = \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3}\,\%$

उदाहरण 15 रवि, राजू तथा राय में ₹ 250 इस प्रकार बाँटे गए कि रवि को दो भाग, राजू को तीन भाग तथा राय को पाँच भाग मिले। इस बँटवारे में प्रत्येक को कितना धन मिला तथा उनका प्रतिशत कितना था ?

हल प्रत्येक के भाग को अनुपात रूप में इस प्रकार लिखा जाएगा 2 : 3 : 5
सभी भागों का योग हुआ 2 + 3 + 5 = 10.

कुल राशि में प्रत्येक का प्रतिशत

रवि को मिला $\frac{2}{10}\times 100\,\% = 20\,\%$

राजू को मिला $\frac{3}{10}\times 100\,\% = 30\,\%$

राय को मिला $\frac{5}{10}\times 100\,\% = 50\,\%$

प्रत्येक को मिली राशि

$\frac{2}{10}\times$ ₹ 250 = ₹50

$\frac{3}{10}\times$ ₹ 250 = ₹75

$\frac{5}{10}\times$ ₹ 250 = ₹125

प्रयास कीजिए

1. 15 मिठाइयों को मनु तथा सोनू में इस प्रकार बाँटिए कि उन्हें कुल का क्रमशः 20 % तथा 80 % मिले।
2. यदि किसी त्रिभुज के कोणों में अनुपात 2 : 3 : 4 है तब उसके प्रत्येक कोण की माप क्या होगी ?

8.4.4 बढ़त या घटत, प्रतिशत रूप में

अनेक अवसरों पर हमें किसी राशि में हुई बढ़त या घटत को प्रतिशत रूप में ज्ञात करने की आवश्यकता होती है। उदाहरण के लिए, यदि किसी प्रदेश की जनसंख्या 5,50,000 से बढ़कर 6,05,000 हो गई तब ऐसी स्थिति में जनसंख्या की वृद्धि को प्रतिशत के रूप में समझना अधिक आसान होता है, जैसे कहें कि प्रदेश की जनसंख्या 10 % बढ़ गई।

हम किसी राशि के बढ़ने या घटने को, कुल राशि के प्रतिशत के रूप में किस प्रकार प्रकट कर सकते हैं? आइए निम्न उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 16 एक विद्यालय की टीम ने इस वर्ष 6 खेलों में जीत प्राप्त की जबकि पिछले वर्ष 4 में ही की थी। पिछले वर्ष की तुलना में जीत कितने प्रतिशत बढ़ी ?

हल जीत की संख्या में वृद्धि $= 6 - 4 = 2$.

$$\text{प्रतिशत वृद्धि} = \frac{\text{वृद्धि}}{\text{आधार वर्ष में जीत}} \times 100$$

$$= \frac{\text{जीत की संख्या में वृद्धि}}{\text{पिछले वर्ष में जीत की संख्या}} \times 100 = \frac{2}{4} \times 100 = 50$$

अर्थात् जीत में 50 प्रतिशत की वृद्धि हुई।

उदाहरण 17 किसी देश में, पिछले 10 वर्षों में अशिक्षितों की संख्या 150 लाख से घटकर 100 लाख रह गई। घटने का प्रतिशत कितना रहा ?

हल प्रारंभिक राशि = प्रारंभ में अशिक्षितों की संख्या = 150 लाख

प्रारंभिक राशि में परिवर्तन = अशिक्षितों की संख्या में घटत = 150 – 100 = 50 लाख

अत: प्रतिशत घटत

$$= \frac{\text{राशि में परिवर्तन}}{\text{प्रारंभिक राशि}} \times 100 = \frac{50}{150} \times 100 = 33\frac{1}{3}\,\%$$

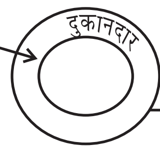
अत: घटने का प्रतिशत $33\frac{1}{3}\%$ है।

प्रयास कीजिए

1. बढ़ने या घटने का प्रतिशत ज्ञात कीजिए।
   – कमीज़ का मूल्य ₹280 से घटकर ₹210 हो गया।
   – किसी परीक्षा में प्राप्तांक बढ़कर 20 से 30 हो गए।
2. मेरी माता जी कहती हैं कि उनके बचपन के समय पैट्रोल की दर ₹ 1 प्रति लीटर थी और आजकल यह ₹ 52 प्रति लीटर है। पैट्रोल की दर में कितने प्रतिशत की वृद्धि हुई ?

8.5 किसी वस्तु से संबंधित मूल्य, अर्थात् क्रय तथा विक्रय

मैंने इसे ₹ 600 में खरीदा



और मैं इसे ₹ 610 में बेचूँगा।

जिस मूल्य पर कोई वस्तु खरीदी जाती है वह उसका **क्रय मूल्य (cost price)** कहलाता है इसे संक्षिप्त में क्र.मू. (C.P.) लिखा जाता है। जिस मूल्य पर कोई वस्तु बेची जाती है वह उसका **विक्रय मूल्य (selling price)** कहलाता है और इसे संक्षिप्त में वि. मू. (S.P.) लिखा जाता है।

आप किसे अधिक अच्छा कहेंगे, यदि किसी वस्तु को क्रय मूल्य पर ही या उससे कम मूल्य पर या उससे अधिक मूल्य पर बेचा जाए?

क्रय मूल्य तथा विक्रय मूल्य के आधार पर आप तय कर सकते है कि कोई वस्तु बेचकर आपको लाभ हुआ या नहीं।

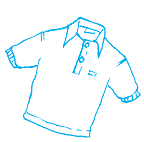
यदि क्रय मूल्य (CP) < विक्रय मूल्य (SP)। तब लाभ = SP – CP.

यदि क्रय मूल्य (CP) = विक्रय मूल्य (SP)। तब ना लाभ तथा ना हानि

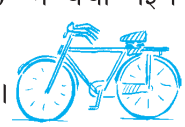
यदि क्रय मूल्य (CP) > विक्रय मूल्य (SP)। तब हानि = CP – SP (क्रय मूल्य–विक्रय मूल्य)।

आइए कुछ वस्तुओं के क्रय तथा विक्रय मूल्य देखकर, कथनों को समझने का प्रयत्न करें।

- एक खिलौना ₹ 72 में खरीदा गया और ₹ 80 में बेचा गया।



- एक टी-शर्ट ₹ 120 में खरीदी गई और ₹ 100 में बेची गई।
- एक साइकिल ₹ 800 में खरीदी गई और ₹ 940 में बेची गई।



अब पहले कथन पर विचार करते हैं। यहाँ क्रय मूल्य ₹ 72 है तथा विक्रय मूल्य ₹ 80 है।
अत: विक्रय मूल्य अधिक है, क्रय मूल्य से।
अत: लाभ = SP – CP = ₹ 80 – ₹ 72 = ₹ 8
अब आप अन्य दो कथनों की इसी प्रकार सोचकर व्याख्या करें।

8.5.1 लाभ या हानि, प्रतिशत में

लाभ या हानि को प्रतिशत रूप में ज्ञात किया जा सकता है। ध्यान में रखिए कि इसे सदैव क्रय मूल्य पर ही परिकलित करते हैं। उपरोक्त उदाहरणों में हम प्रतिशत लाभ या प्रतिशत हानि भी ज्ञात कर सकते हैं।

आइए खिलौने वाला उदाहरण ही लेते हैं। यहाँ है: CP = ₹ 72, SP = ₹ 80, तथा लाभ = ₹ 8। लाभ प्रतिशत ज्ञात करने के लिए नेहा तथा शेखर ने निम्न विधियाँ प्रयुक्त कीं।

नेहा ने हल इस प्रकार किया	शेखर ने इस प्रकार किया
लाभ प्रतिशत $= \dfrac{\text{लाभ}}{\text{क्र. मू.}} \times 100 = \dfrac{8}{72}\times 100$	₹ 72 पर ₹ 8 लाभ प्राप्त होता है
$= \dfrac{1}{9}\times 100 = 11\dfrac{1}{9}$	अत: ₹ 100 पर लाभ $= \dfrac{8}{72}\times 100$
अत: लाभ % $= 11\dfrac{1}{9}$	अत: लाभ % $= 11\dfrac{1}{9}$

इसी प्रकार आप दूसरे प्रश्न में भी हानि प्रतिशत ज्ञात कर सकते हैं।

यहाँ $\quad$ CP = ₹ 120, SP = ₹ 100 है।

अत: $\quad$ हानि = ₹ 120 – ₹ 100 = ₹ 20

हानि प्रतिशत $= \dfrac{\text{हानि}}{\text{क्र. मू.}}\times 100$	120 पर हानि = ₹ 20
$= \dfrac{20}{120}\times 100$	अत: ₹ 100 पर हानि
$= \dfrac{50}{3} = 16\dfrac{2}{3}$ प्रतिशत	$= \dfrac{20}{120}\times 100 = \dfrac{50}{3} = 16\dfrac{2}{3}$
अत: हानि $= 16\dfrac{2}{3}\%$	अत: हानि प्रतिशत $16\dfrac{2}{3}$ है

अब आप साईकिल वाला उदाहरण हल करके देखिए।

हम यहाँ यह भी देखते हैं कि किसी वस्तु से संबंधित क्रय मूल्य, विक्रय मूल्य तथा लाभ या हानि में तीन राशियों में से कोई भी दो राशियाँ ज्ञात हों तो तीसरी राशि ज्ञात की जा सकती है।

उदाहरण 18 $\quad$ एक फूलदान का लागत मूल्य ₹ 120 है। यदि दुकानदार इसे 10% हानि पर बेचता है तब उसका विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल $\quad$ पहले, दी हुई राशियों को पहचानते हैं। दिया है, क्रय मूल्य = ₹ 120 तथा हानि प्रतिशत = 10, हमें ज्ञात करना है विक्रय मूल्य।

सोहन ने इस प्रकार हल निकाला	आनंदी ने इस प्रकार हल किया
10% हानि का अर्थ है यदि क्र.मू. = ₹ 100	हानि = क्रय मूल्य का 10 %
तब हानि = ₹ 10	= ₹ 120 का 10 %
अत: विक्रय मूल्य = ₹ (100 – 10) = ₹ 90	$= \dfrac{10}{100}\times 120$ = ₹ 12

जब क्र.मू. = ₹ 100, तब विक्रय मूल्य = ₹ 90

अत: जब क्र.मू. = ₹ 120 है, तब

विक्रय मूल्य = $\frac{90}{100} \times 120$ = ₹ 108

अत:

विक्रय मूल्य = क्रय मूल्य – हानि = ₹ 120 – ₹ 12 = ₹ 108

दोनों ही विधियों से विक्रय मूल्य ₹ 108 प्राप्त होता है।

उदाहरण 19 एक खिलौना कार का विक्रय मूल्य ₹ 540 था। एक दुकानदार ने उसे 20% लाभ पर बेचा। खिलौने का क्रय मूल्य क्या था?

हल हमें पता है कि विक्रय मूल्य = ₹ 540 तथा लाभ = 20%, हमें ज्ञात करना है क्रय मूल्य

अमीना ने इस प्रकार हल किया :

20% लाभ का अर्थ है कि यदि क्रय मूल्य ₹ 100 हो तो लाभ ₹ 20 तथा विक्रय मूल्य 100 + 20 = ₹ 120 होगा।

अर्थात् ₹ 120 विक्रय मूल्य होने पर क्रय मूल्य = ₹ 100

अत: ₹ 540 विक्रय मूल्य होने पर क्रय मूल्य = $\frac{100}{120} \times$ ₹ 540 = ₹ 450

अरुण ने प्रश्न इस प्रकार हल किया:

लाभ = क्रय मूल्य का 20% तथा विक्रय मूल्य = क्रय मूल्य + लाभ

अत: 540 = क्रय मूल्य + क्रय मूल्य का 20%

या 540 = क्रय मूल्य + $\frac{20}{100}$ × क्रय मूल्य = $\left[1+\frac{1}{5}\right]$ क्रय मूल्य

= $\frac{6}{5}$ क्रय मूल्य इसलिए, $540 \times \frac{5}{6}$ = क्रय मूल्य

या ₹ 450 = क्रय मूल्य।

इस प्रकार दोनों विधियों से क्रय मूल्य ₹ 450 है।

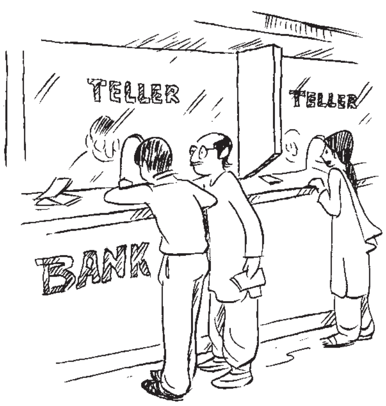
प्रयास कीजिए

1. एक दुकानदार ने एक कुर्सी 375 में खरीदी तथा ₹ 400 में बेच दी। उसका लाभ प्रतिशत ज्ञात कीजिए।
2. एक वस्तु ₹ 50 में क्रय की गई तथा 12 प्रतिशत लाभ पर बेच दी गई। उसका विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।
3. एक वस्तु ₹ 250 में बेचने पर 5 प्रतिशत लाभ प्राप्त हुआ। उसका क्रय मूल्य क्या था?
4. एक वस्तु 5 प्रतिशत हानि उठा कर ₹ 540 में बेची गई। उसका क्रय मूल्य क्या था?

8.6 उधार लिए गए धन पर शुल्क अर्थात् साधारण ब्याज

सोहनी ने बताया कि वे एक नया स्कूटर खरीदने जा रहे हैं। मोहन ने पूछा कि क्या उनके पास इसके लिए पर्याप्त धन है ? सोहनी ने उत्तर दिया कि उसके पिताजी इसके लिए बैंक से उधार धन (ऋण) लेंगे। उधार लिए गए धन को **मूलधन** कहते है।

यह धन, वापस करने से पहले, ऋण प्राप्त करने वाले व्यक्ति द्वारा कुछ समय तक इसका उपयोग किया जाता है; अतः उसे उतने समय का, धन उपयोग में लाने के बदले, कुछ अतिरिक्त धन बैंक को देना होता है। यह अतिरिक्त धन **ब्याज** कहलाता है।



एक निश्चित अवधि के बाद आपको मूलधन तथा ब्याज, दोनों को मिलाकर पूरा धन वापस करना होता है जिसे **मिश्रधन** कहते हैं।

अर्थात्, **मिश्रधन** = **मूलधन** + **ब्याज**

ब्याज एक निश्चित दर पर परिकलित किया जाता है जो प्रायः प्रत्येक ₹ 100 के लिए एक वर्ष के लिए निर्धारित होता है।

इसे इस प्रकार लिखा जा सकता है, 10 प्रतिशत प्रति वर्ष या 10 प्रतिशत वार्षिक।

10 प्रतिशत वार्षिक का अर्थ है कि उधार लिए गए प्रत्येक ₹ 100 के लिए, प्रत्येक वर्ष के बाद ₹ 10 ब्याज के रूप में अतिरिक्त देने होंगे।

एक उदाहरण लेकर देखें कि ब्याज कैसे परिकलित किया जाता है।

उदाहरण 20 अनीता ₹ 5000 का एक ऋण 15 प्रतिशत वार्षिक की दर से ब्याज पर लेती है। ज्ञात कीजिए कि एक वर्ष के बाद उसे कुल कितना धन वापस करना होगा।

हल उधार ली गई राशि = ₹ 5000

ब्याज की दर = 15 प्रतिशत प्रति वर्ष

इसका अर्थ है कि यदि वह ₹ 100 उधार लेती है तब उसे एक वर्ष बाद ₹ 15 ब्याज के रूप में भी देने होंगे।

अतः ₹ 5000 के उधार पर उसे 1 वर्ष बाद देने होंगे : $\frac{15}{100} \times$ ₹ 5000 = ₹ 750

अर्थात् एक वर्ष बाद उसे ब्याज मिलाकर मिश्रधन देना होगा ₹ 5000 + ₹ 750 = ₹ 5750

एक वर्ष का ब्याज ज्ञात करने के लिए हम एक संबंध या सूत्र भी प्राप्त कर सकते हैं।

हम मूलधन को P से तथा दर $R\,\%$ वार्षिक को R से प्रदर्शित करते हैं।

तो हमें प्रत्येक ₹ 100 के लिए एक वर्ष का ₹ R ब्याज देना होगा।

अतः ₹ P उधार लेने पर एक वर्ष का ब्याज I होगा।

$$I = \frac{R \times P}{100} = \frac{P \times R}{100}$$

8.6.1 अनेक वर्षों के लिए ब्याज

अगर धन एक वर्ष से अधिक समय के लिए उधार लिया जाता है तब ब्याज भी उस पूरे समय के लिए परिकलित किया जाता है जितने समय के लिए धन रखा गया है। उदाहरण के लिए यदि अनीता वही धन उसी दर पर दो वर्ष बाद वापस करती तब उसे ब्याज भी दुगना देना पड़ता; अर्थात् ₹ 750 पहले वर्ष के लिए तथा ₹ 750 दूसरे वर्ष के लिए। मूलधन वही रहता है, बदलता नहीं और ब्याज भी प्रत्येक वर्ष के लिए समान ही रहता है। इस प्रकार के ब्याज को **साधारण ब्याज** कहते हैं। जिस प्रकार वर्षों की संख्या बढ़ती जाती है उसी प्रकार ब्याज की राशि भी। 3 वर्ष के लिए ₹100, 18% वार्षिक दर से उधार लेने पर 3 वर्षों बाद ब्याज देना होगा, $18 + 18 + 18 = 3 \times 18 =$ ₹ 54

हम एक वर्ष से अधिक समय के लिए भी साधारण ब्याज ज्ञात करने के लिए सूत्र प्राप्त कर सकते हैं।

हम देख चुके हैं कि ₹ P के लिए $R\,\%$ वार्षिक की दर से 1 वर्ष बाद ब्याज देना होता है $\frac{R \times P}{100}$। अतः T वर्षों के लिए दिया गया ब्याज (I) होगा:

$$I = \frac{T \times R \times P}{100} = \frac{P \times R \times T}{100} \text{ या } \frac{PRT}{100}$$

और T वर्षों बाद मिश्रधन A होगा : $A = P + I$

प्रयास कीजिए

1. ₹ 10,000, 5 प्रतिशत वार्षिक दर से जमा किए जाते हैं। एक वर्ष बाद कितना ब्याज प्राप्त होगा ?
2. ₹ 3500, 7 प्रतिशत वार्षिक दर से उधार दिए जाते हैं। दो वर्ष बाद कितना साधारण ब्याज देय होगा ?
3. ₹ 6050, 6.5 प्रतिशत वार्षिक दर से उधार लिए जाते हैं। 3 वर्ष बाद कितना ब्याज तथा कितना मिश्रधन देय होगा ?
4. ₹ 7000, 3.5 प्रतिशत वार्षिक दर से दो वर्ष के लिए उधार लिए जाते हैं। दो वर्ष बाद कितना मिश्रधन देय होगा ?

जैसा आपने क्रय-विक्रय मूल्यों की समस्याओं में देखा था उसी प्रकार सूत्र $I = \frac{P \times T \times R}{100}$ द्वारा, चार राशियों में से कोई भी तीन ज्ञात होने पर चौथी ज्ञात की जा सकती है।

उदाहरण 21 ₹ 4500 के ऋण पर 2 वर्ष बाद, मनोहर ₹ 750 साधारण ब्याज देता है। ब्याज की दर प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

हल 1

$$I = \frac{P \times T \times R}{100}$$

अतः $750 = \dfrac{4500 \times 2 \times R}{100}$

या $\dfrac{750}{45 \times 2} = R$

अतः ब्याज की दर

$= 8\frac{1}{3}\%$ वार्षिक

हल 2

2 वर्ष का ब्याज है = ₹ 750

अतः 1वर्ष का ब्याज होगा $= \dfrac{750}{2} =$ ₹ 375

अब ₹ 4500 पर ब्याज = ₹ 375

अतः ₹ 100 पर ब्याज

$= \dfrac{375 \times 100}{4500} = 8\frac{1}{3}\%$

अतः ब्याज की दर $= 8\frac{1}{3}\%$ वार्षिक

प्रयास कीजिए

1. आपके बैंक खाते में ₹ 2400 जमा हैं तथा ब्याज की दर 5 प्रतिशत वार्षिक है। कितने वर्षों बाद ब्याज की राशि ₹ 240 होगी ?
2. किसी धन का 5 प्रतिशत वार्षिक दर से 3 वर्ष का ब्याज ₹ 450 होता है। वह धन ज्ञात कीजिए।

प्रश्नवली 8.3

1. क्रय-विक्रय के निम्न सौदों में हानि या लाभ ज्ञात कीजिए। प्रत्येक दशा में प्रतिशत हानि या प्रतिशत लाभ भी ज्ञात कीजिए।
   (a) बग़ीचे में काम आने वाली कैंची ₹ 250 में खरीदी गई तथा ₹ 325 में बेची गई।
   (b) एक रेफ्रीज़रेटर ₹12000 में खरीदा गया और ₹13500 में बेचा गया।
   (c) एक अलमारी ₹2500 में खरीदी गई और ₹3000 में बेची गई।
   (d) एक स्कर्ट ₹250 में खरीद कर ₹150 में बेची गई।
2. दिए गए प्रत्येक अनुपात के दोनों पदों को प्रतिशत में बदलिए।
   (a) 3:1 (b) 2 : 3 : 5 (c) 1:4 (d) 1 : 2 : 5

3. एक नगर की जनसंख्या 25000 से घटकर 24500 रह गई। घटने का प्रतिशत ज्ञात कीजिए।
4. अरुण ने एक कार ₹ 3,50,000 में खरीदी। अगले वर्ष उसका मूल्य बढ़कर ₹ 3,70,000 हो गया। कार के मूल्य की प्रतिशत वृद्धि ज्ञात कीजिए ।
5. मैने एक टी.वी. ₹ 10,000 में खरीद कर 20 प्रतिशत लाभ पर बेच दिया। मुझे बेचने पर कितना धन प्राप्त हुआ ?
6. जूही एक वाशिंग मशीन ₹ 13,500 में बेचने पर 20 प्रतिशत की हानि उठाती है। उसने वह मशीन कितने में खरीदी थी ?
7. (i) चाक-पाउडर में कैल्शियम, कार्बन तथा ऑक्सीजन का अनुपात 10:3:12 होता है। इसमे कार्बन की प्रतिशत मात्रा ज्ञात कीजिए।
   (ii) चाक की एक छड़ी में यदि कार्बन की मात्रा 3 gm है तब उसका कुल भार कितना होगा ?
8. अमीना एक पुस्तक ₹ 275 में खरीद कर उसे 15 प्रतिशत हानि पर बेचती है। पुस्तक का विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।
9. प्रत्येक दशा में 3 वर्ष बाद कितना मिश्रधन देय होगा ?
   (a) मूलधन = ₹ 1200 दर 12% वार्षिक (b) मूलधन = ₹ 7500 दर 5% वार्षिक
10. ₹ 56000 पर, 2 वर्ष पश्चात किस दर से ₹ 280 साधारण ब्याज देय होगा ?
11. मीना ने 9 प्रतिशत वार्षिक दर से, 1 वर्ष पश्चात् ₹ 45 ब्याज के रूप में दिए। उसने कितना धन उधार लिया था ?

हमने क्या चर्चा की ?

1. अपने दैनिक जीवन में हमें प्राय: दो राशियों के बीच तुलना करनी पड़ती है। ये राशियाँ ऊँचाई, भार, वेतन, प्राप्तांक आदि हो सकती हैं
2. 150 cm तथा 75 cm ऊँचाई वाले दो व्यक्तियों की तुलना करने पर हम इसे अनुपात रूप में 150:75 या 2:1 लिखते हैं।
3. दो अनुपातों की तुलना, उन्हें समान हर वाली भिन्नों में बदल कर की जा सकती है। यदि दोनों समान हर वाली भिन्ने समान हैं तब हम कहते हैं कि दोनों अनुपात भी तुल्य अनुपात हैं ।
4. यदि दो अनुपात तुल्य हैं तब उनके चारों पद एक समानुपात बनाते हैं। उदाहरण के लिए दो अनुपात 8:2 तथा 16:4 तुल्य हैं; अत: 8, 2, 16 तथा 4 समानुपात में हैं।
5. तुलना करने की एक विधि प्रतिशत भी है। भिन्न, जिनके हर 100 होते हैं, उनके अंश, प्रतिशत प्रकट करते हैं। प्रतिशत का अर्थ होता है प्रत्येक सौ पर।

6. भिन्नों को प्रतिशत में बदला जा सकता है तथा प्रतिशत को भिन्नों में।

उदाहरण के लिए $\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times 100\,\% = 25\%$ तथा, $75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$

7. दशमलव भिन्न को भी प्रतिशत में बदला जा सकता है तथा प्रतिशत को दशमलव में।

उदाहरण के लिए, $0.25 = 0.25 \times 100\% = 25\%$

8. प्रतिशत के हमारे दैनिक जीवन में व्यापक उपयोग हैं:

(a) जब हमें किसी राशि का प्रतिशत ज्ञात हो तब हम वह संपूर्ण राशि ज्ञात कर सकते हैं।

(b) यदि हमें किसी राशि के भागों में अनुपात दिया हो तब हम उन्हें प्रतिशत में भी बदल सकते हैं।

(c) किसी राशि का घटना या बढ़ना भी प्रतिशत में दर्शाया जा सकता है।

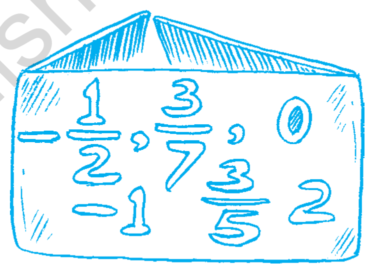
(d) किसी वस्तु के क्रय-विक्रय में हुए लाभ या हानि को भी प्रतिशत में दर्शाया जा सकता है।

(e) उधार लिए गए धन पर ब्याज परिकलन के लिए उसकी दर प्रतिशत में ही दी जाती है। उदाहरण के लिए ₹ 800, 3 वर्ष के लिए 12 प्रतिशत ब्याज की दर पर उधार लिया गया।

अध्याय 9

परिमेय संख्याएँ

0757CH09



9.1 भूमिका

आपने संख्याओं का अध्ययन अपने परिवेश की वस्तुओं के गिनने से प्रारंभ किया। इस कार्य में प्रयोग की गई संख्याओं को गणन संख्याएँ (counting numbers) या प्राकृत संख्याएँ (natural numbers) कहा गया था। ये हैं 1, 2, 3, 4, ...। प्राकृत संख्याओं में 0 को सम्मिलित करने पर हमें पूर्ण संख्याएँ (whole numbers), अर्थात् 0, 1, 2, 3, ... प्राप्त हुईं। इसके बाद, पूर्णांक (integers) प्राप्त करने के लिए, पूर्ण संख्याओं में प्राकृत संख्याओं के ऋणात्मकों (negatives) को सम्मिलित किया गया। ... –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3 ... पूर्णांक हैं। इस प्रकार, हमने संख्या पद्धति (number system) को प्राकृत संख्याओं से पूर्ण संख्याओं तक और पूर्ण संख्याओं से पूर्णांकों तक विस्तृत किया।

आपका भिन्नों (fractions) से भी परिचय कराया गया था। ये $\frac{\text{अंश}}{\text{हर}}\left(\frac{\text{numerator}}{\text{denominator}}\right)$, के प्रकार की संख्याएँ होती हैं, जहाँ अंश या तो 0 या एक धनात्मक पूर्णांक होता है तथा हर, एक धनात्मक पूर्णांक होता है। आपने दो भिन्नों की तुलना की, उनके समतुल्य (equivalent) रूप (भिन्नें) ज्ञात किए तथा उन पर सभी चारों आधारभूत संक्रियाओं योग, व्यवकलन (घटाना), गुणन और विभाजन का अध्ययन किया।

इस अध्याय में, हम संख्या पद्धति का और आगे विस्तार करेंगे। हम परिमेय संख्याओं (rational numbers) की अवधारणा का परिचय देकर उन पर योग, व्यवकलन, गुणन और विभाजन (भाग) की संक्रियाएँ करना सीखेंगे।

9.2 परिमेय संख्याओं की आवश्यकता

पहले हम देख चुके हैं कि किस प्रकार संख्याओं से संबद्ध विपरीत (opposite) स्थितियों को व्यक्त करने के लिए पूर्णांकों का प्रयोग किया जा सकता है। उदाहरणार्थ, यदि एक स्थान के दाईं ओर 3 km दूरी को 3 से व्यक्त किया जाए, तो उसी स्थान से बाईं ओर की 5 km दूरी को –5

से व्यक्त किया जा सकता है। यदि 150 रु के लाभ को 150 से व्यक्त किया जाए, तो 100 रु की हानि को –100 से व्यक्त किया जा सकता है।

इसी प्रकार की अनेक स्थितियाँ होती हैं, जिनमें भिन्नात्मक संख्याएँ (भिन्न) संबद्ध होती हैं। हम समुद्र तल से ऊपर 750 m की ऊँचाई को $\frac{3}{4}$ km से व्यक्त कर सकते हैं। क्या हम समुद्र तल से नीचे 750 m की गहराई को km में व्यक्त कर सकते हैं? क्या हम समुद्र तल से नीचे $\frac{3}{4}$ km की गहराई को $\frac{-3}{4}$ से व्यक्त कर सकते हैं? हम देख सकते हैं कि $\frac{-3}{4}$ न तो एक पूर्णांक है और न ही एक भिन्न। ऐसी संख्याओं को सम्मिलित करने के लिए, हमें संख्या पद्धति को विस्तृत करने की आवश्यकता है।

9.3 परिमेय संख्याएँ क्या हैं ?

शब्द 'परिमेय' (rational) की उत्पत्ति, पद 'अनुपात' (ratio) से हुई है। आप जानते हैं कि अनुपात 3 : 2 को $\frac{3}{2}$ भी लिखा जा सकता है। यहाँ 3 और 2 प्राकृत संख्याएँ हैं।

इसी प्रकार, दो पूर्णांकों p और q $(q \neq 0)$ के अनुपात $p:q$ को $\frac{p}{q}$ लिखा जा सकता है। यही वह रूप है जिसमें परिमेय संख्याएँ व्यक्त की जाती हैं।

एक परिमेय संख्या को ऐसी संख्या के रूप में परिभाषित किया जाता है, जिसे $\frac{p}{q}$, के रूप में व्यक्त किया जा सके, जहाँ p और q पूर्णांक हैं तथा $q \neq 0$ है।

इस प्रकार, $\frac{4}{5}$ एक परिमेय संख्या है। यहाँ $p = 4$ है और $q = 5$ है।

क्या $\frac{-3}{4}$ भी एक परिमेय संख्या है? हाँ, क्योंकि $p = -3$ और $q = 4$ पूर्णांक हैं।

- आपने $\frac{3}{8}, \frac{4}{8}, 1\frac{2}{3}$, इत्यादि जैसी अनेक भिन्न देखी हैं। सभी भिन्न परिमेय संख्याएँ होती हैं। क्या आप इसका कारण बता सकते हैं? दशमलव संख्याओं 0.5, 2.3, 0.333 इत्यादि के बारे में क्या कहा जा सकता है? इस प्रकार की प्रत्येक संख्या को एक सामान्य भिन्न के रूप में लिखा जा सकता है और इसीलिए ये परिमेय संख्याएँ हैं। उदाहरणार्थ, $0.5 = \frac{5}{10}$, $2.3 = \frac{23}{10}$, $0.333 = \frac{333}{1000}$ इत्यादि।

प्रयास कीजिए

1. क्या संख्या $\frac{2}{-3}$ परिमेय संख्या है? इसके बारे में सोचिए।

2. दस परिमेय संख्याओं की एक सूची बनाइए।

अंश और हर

$\frac{p}{q}$ में, पूर्णांक p अंश है तथा पूर्णांक $q\ (\neq 0)$ हर है।

इस प्रकार, $\frac{-3}{7}$ में, -3 अंश है और 7 हर है।

ऐसी पाँच परिमेय संख्याएँ लिखिए, जिनमें से प्रत्येक का

(a) अंश एक ऋणात्मक पूर्णांक हो और हर एक धनात्मक पूर्णांक हो।

(b) अंश एक धनात्मक पूर्णांक हो और हर एक ऋणात्मक पूर्णांक हो।

(c) अंश और हर दोनों ऋणात्मक पूर्णांक हों।

(d) अंश और हर दोनों धनात्मक पूर्णांक हों।

- क्या पूर्णांक भी परिमेय संख्याएँ हैं?

किसी भी पूर्णांक को एक परिमेय संख्या माना जा सकता है। उदाहरणार्थ, पूर्णांक -5 एक परिमेय संख्या है, क्योंकि आप इसे $\frac{-5}{1}$ के रूप में लिख सकते हैं। पूर्णांक 0 को भी $0=\frac{0}{2}$ या $\frac{0}{7}$ इत्यादि के रूप में लिखा जा सकता है। अत: यह भी एक परिमेय संख्या है।

इस प्रकार, परिमेय संख्याओं में पूर्णांक और भिन्न सम्मिलित होते हैं।

समतुल्य परिमेय संख्याएँ

एक परिमेय संख्या को अलग-अलग अंशों और हरों का प्रयोग करते हुए लिखा जा सकता है। उदाहरणार्थ, परिमेय संख्या $\frac{-2}{3}$ पर विचार कीजिए।

$\frac{-2}{3}=\frac{-2\times 2}{3\times 2}=\frac{-4}{6}$। हम देखते हैं कि $\frac{-2}{3}$ वही है जो $\frac{-4}{6}$ है।

साथ ही, $\frac{-2}{3}=\frac{(-2)\times(-5)}{3\times(-5)}=\frac{10}{-15}$ है। अत:, $\frac{-2}{3}$ वही है जो $\frac{10}{-15}$ है।

इस प्रकार, $\frac{-2}{3}=\frac{-4}{6}=\frac{10}{-15}$ है। ऐसी परिमेय संख्याएँ जो परस्पर बराबर हों एक दूसरे के **समतुल्य (equivalent)** या **तुल्य** कही जाती हैं।

पुनः, $\frac{10}{-15} = \frac{-10}{15}$ (कैसे?)

एक परिमेय संख्या के अंश और हर को एक ही शून्येतर (non-zero) पूर्णांक से गुणा करने पर, हमें दी हुई परिमेय संख्या के समतुल्य (या तुल्य) एक अन्य परिमेय संख्या प्राप्त होती है। यह ठीक समतुल्य भिन्न प्राप्त करने जैसा ही है।

गुणा की तरह, एक ही शून्येतर पूर्णांक से अंश और हर को भाग देने पर भी समतुल्य परिमेय संख्याएँ प्राप्त होती हैं। उदाहरणार्थ,

$$\frac{10}{-15} = \frac{10 \div (-5)}{-15 \div (-5)} = \frac{-2}{3} \quad , \quad \frac{-12}{24} = \frac{-12 \div 12}{24 \div 12} = \frac{-1}{2}$$

हम $\frac{-2}{3}$ को $-\frac{2}{3}$, $\frac{-10}{15}$ को $-\frac{10}{15}$ इत्यादि, लिखते हैं।

प्रयास कीजिए

रिक्त स्थानों को भरिए :

(i) $\frac{5}{4} = \frac{\square}{16} = \frac{25}{\square} = \frac{-15}{\square}$

(ii) $\frac{-3}{7} = \frac{\square}{14} = \frac{9}{\square} = \frac{-6}{\square}$

9.4 धनात्मक और ऋणात्मक परिमेय संख्याएँ

परिमेय संख्या $\frac{2}{3}$ पर विचार कीजिए। इस संख्या के अंश और हर दोनों ही धनात्मक पूर्णांक हैं। ऐसी परिमेय संख्या को एक **धनात्मक परिमेय संख्या** कहते हैं। अतः, $\frac{3}{8}, \frac{5}{7}, \frac{2}{9}$ इत्यादि धनात्मक परिमेय संख्याएँ हैं।

प्रयास कीजिए

1. क्या 5 एक धनात्मक परिमेय संख्या है?
2. पाँच और धनात्मक परिमेय संख्याएँ लिखिए।

$\frac{-3}{5}$ का अंश एक ऋणात्मक पूर्णांक है, जबकि इसका हर एक धनात्मक पूर्णांक है। ऐसी परिमेय संख्या को **ऋणात्मक परिमेय संख्या** कहते हैं। अतः $\frac{-5}{7}, \frac{-3}{8}, \frac{-9}{5}$ इत्यादि ऋणात्मक परिमेय संख्याएँ हैं।

प्रयास कीजिए

1. क्या –8 एक ऋणात्मक परिमेय संख्या है।
2. पाँच और ऋणात्मक परिमेय संख्याएँ लिखिए।

- क्या $\frac{8}{-3}$ एक ऋणात्मक संख्या है? हम जानते हैं कि $\frac{8}{-3} = \frac{8 \times (-1)}{-3 \times (-1)} = \frac{-8}{3}$ है, तथा $\frac{-8}{3}$ एक ऋणात्मक परिमेय संख्या है। अतः, $\frac{8}{-3}$ एक ऋणात्मक परिमेय संख्या है।

  इसी प्रकार, $\frac{5}{-7}, \frac{6}{-5}, \frac{2}{-9}$ इत्यादि सभी ऋणात्मक परिमेय संख्याएँ हैं। ध्यान दीजिए कि इनके अंश धनात्मक हैं तथा हर ऋणात्मक हैं।
- संख्या 0 न तो एक धनात्मक परिमेय संख्या है और न ही एक ऋणात्मक परिमेय संख्या।
- $\frac{-3}{-5}$ के बारे में क्या कहा जा सकता है?

आप देखेंगे कि $\frac{-3}{-5}=\frac{-3\times(-1)}{-5\times(-1)}=\frac{3}{5}$ है। अतः, $\frac{-3}{-5}$ एक धनात्मक परिमेय संख्या है। इस प्रकार, $\frac{-2}{-5}, \frac{-5}{-3}$, इत्यादि धनात्मक परिमेय संख्याएँ हैं।

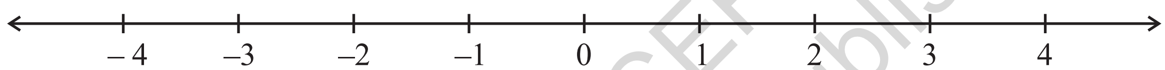
प्रयास कीजिए

निम्नलिखित में से कौन-सी संख्याएँ ऋणात्मक परिमेय संख्याएँ हैं?

(i) $\frac{-2}{3}$ (ii) $\frac{5}{7}$ (iii) $\frac{3}{-5}$ (iv) 0 (v) $\frac{6}{11}$ (vi) $\frac{-2}{-9}$

9.5 एक संख्या रेखा पर परिमेय संख्याएँ

आप यह जानते हैं कि एक संख्या रेखा पर पूर्णांकों को किस प्रकार निरूपित किया जाता है। आइए ऐसी ही एक संख्या रेखा खींचें।



0 के दाईं ओर के बिंदुओं को + चिह्न से व्यक्त करते हैं और ये धनात्मक पूर्णांक दर्शाते हैं। 0 से बाईं ओर के बिंदुओं को – चिह्न से व्यक्त करते हैं और ये ऋणात्मक पूर्णांक दर्शाते हैं। संख्या रेखा पर भिन्नों के निरूपण से भी आप परिचित हैं।

आइए अब देखें कि परिमेय संख्याएँ संख्या रेखा पर किस प्रकार निरूपित की जा सकती हैं?

आइए संख्या रेखा पर संख्या $-\frac{1}{2}$ को निरूपित करें।

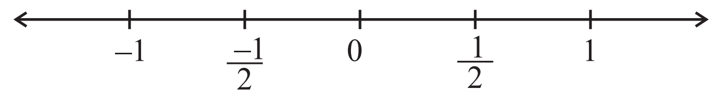
जैसा कि धनात्मक पूर्णांकों की स्थिति में किया गया था, धनात्मक परिमेय संख्याओं को 0 के दाईं ओर अंकित किया जाएगा तथा ऋणात्मक परिमेय संख्याओं को 0 के बाईं ओर अंकित किया जाएगा।

0 के किस ओर आप $-\frac{1}{2}$ को अंकित करेंगे? ऋणात्मक परिमेय संख्या होने के कारण इसे 0 के बाईं ओर अंकित किया जाएगा।

आप जानते हैं कि संख्या रेखा पर पूर्णांकों को अंकित करते समय, उत्तरोत्तर पूर्णांकों को समान अंतरालों पर अंकित किया जाता है। साथ ही, संख्याओं 1 और –1 का युग्म संख्या 0 से समदूरस्थ हैं। इसी प्रकार, 2 और –2 तथा 3 और –3 भी समदूरस्थ हैं।

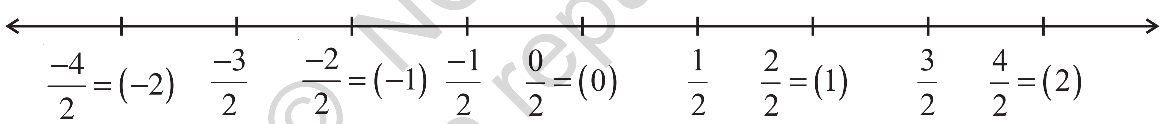
इसी प्रकार, परिमेय संख्याएँ $\frac{1}{2}$ और $-\frac{1}{2}$ भी 0 से समदूरस्थ होंगी। हम जानते हैं कि परिमेय संख्या $\frac{1}{2}$ को किस प्रकार संख्या रेखा पर अंकित किया जाता है। यह उस बिंदु पर अंकित किया

जाता है, जो 0 और 1 से बराबर दूरी (ठीक बीच में) पर है। अर्थात् 0 और 1 की आधी दूरी पर है। इसलिए, $-\frac{1}{2}$ को 0 और –1 की आधी दूरी पर अंकित किया जाएगा।



हम जानते हैं कि $\frac{3}{2}$ को संख्या रेखा पर किस प्रकार अंकित किया जाता है। इसे 0 के दाईं ओर 1 और 2 के बीच में आधी दूरी पर अंकित किया जाता है। आइए अब संख्या रेखा पर $\frac{-3}{2}$ को अंकित करें। यह 0 के बाईं ओर उतनी ही दूरी पर अंकित होगा जितनी दूरी 0 और $\frac{3}{2}$ के बीच है।

घटते हुए क्रम में $\frac{-1}{2}, \frac{-2}{2} (= -1), \frac{-3}{2}, \frac{-4}{2} (= -2)$, इत्यादि प्राप्त हैं। इससे यह प्रदर्शित होता है कि $\frac{-3}{2}$ संख्याओं – 1 और – 2 के बीच में आधी दूरी पर स्थित (या अंकित) होगा।



इसी प्रकार, $\frac{-5}{2}$ और $\frac{-7}{2}$ को संख्या रेखा पर अंकित कीजिए।

इसी प्रकार, $-\frac{1}{3}$ संख्या रेखा पर 0 के बाईं ओर शून्य से उतनी ही दूरी पर होगी जितनी कि $\frac{1}{3}$ शून्य से दाईं ओर है।

अत: जैसा कि ऊपर किया गया है, $-\frac{1}{3}$ को संख्या रेखा पर निरूपित किया जा सकता है। एक बार, हमें $-\frac{1}{3}$ को संख्या रेखा पर निरूपित करना आ जाए तो, हम $-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}, \ldots$ इत्यादि को संख्या रेखा पर निरूपित कर सकते हैं। विभिन्न हरों वाली अन्य परिमेय संख्याओं को भी इसी प्रकार संख्या रेखा पर निरूपित किया जा सकता है।

9.6 मानक रूप में परिमेय संख्याएँ

निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को देखिए :

$$\frac{3}{5}, \frac{-5}{8}, \frac{2}{7}, \frac{-7}{11}$$

इन सभी परिमेय संख्याओं के हर धनात्मक पूर्णांक हैं तथा अंश और हरों के बीच में केवल 1 सार्व गुणनखंड (common factor) है। साथ ही, ऋणात्मक चिह्न (–) केवल अंश में ही स्थित है।

ऐसी परिमेय संख्याओं को **मानक रूप (standard form)** में व्यक्त की गई परिमेय संख्याएँ कहा जाता है।

एक परिमेय संख्या मानक रूप में व्यक्त की हुई कही जाती है, यदि उसका हर धनात्मक पूर्णांक हो तथा उसके अंश और हर में 1 के अतिरिक्त कोई सार्व गुणनखंड न हो।

यदि कोई परिमेय संख्या मानक रूप में नहीं है, तो उसे उसके मानक रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

स्मरण कीजिए कि भिन्नों को उनके न्यूनतम रूपों में व्यक्त करने के लिए, हमने उनके अंशों और हरों को एक ही शून्येतर पूर्णांक से भाग दिया था। हम इसी विधि का प्रयोग परिमेय संख्याओं को उनके मानक रूपों में व्यक्त करने में करेंगे।

उदाहरण 1 $\frac{-45}{30}$ को मानक रूप में व्यक्त कीजिए।

हल हमें प्राप्त है : $\frac{-45}{30} = \frac{-45 \div 3}{30 \div 3} = \frac{-15}{10} = \frac{-15 \div 5}{10 \div 5} = \frac{-3}{2}$

हमें दो बार भाग देना पड़ा। पहली बार 3 से और फिर 5 से। इसे निम्नलिखित प्रकार से भी किया जा सकता था :

$$\frac{-45}{30} = \frac{-45 \div 15}{30 \div 15} = \frac{-3}{2}$$

इस उदाहरण में देखिए कि 15, संख्याओं 45 और 30 का म.स. है।

इस प्रकार, एक परिमेय संख्या को मानक रूप में व्यक्त करने के लिए, हम उसके अंश और हर को उनके **म.स.** *से, ऋण चिह्न पर बिना कोई ध्यान दिए (यदि कोई हो), भाग देते हैं।* (ऋण चिह्न पर ध्यान ना देने का कारण हम अगली कक्षाओं में पढ़ेंगे)

यदि हर में ऋणात्मक चिह्न है, तो **'–म.स.'** से भाग दीजिए।

उदाहरण 2 मानक रूप में बदलिए :

(i) $\frac{36}{-24}$ (ii) $\frac{-3}{-15}$

हल

(i) 36 और 24 का म.स. 12 है।

अत:, मानक रूप अंश और हर को -12 से भाग देने पर प्राप्त होगा।

इस प्रकार, $\frac{36}{-24} = \frac{36 \div (-12)}{-24 \div (-12)} = \frac{-3}{2}$

(ii) 3 और 15 का म.स. 3 है।

इस प्रकार, $\frac{-3}{-15} = \frac{-3 \div (-3)}{-15 \div (-3)} = \frac{1}{5}$

प्रयास कीजिए

मानक रूप ज्ञात कीजिए (i) $\frac{-18}{45}$ (ii) $\frac{-12}{18}$

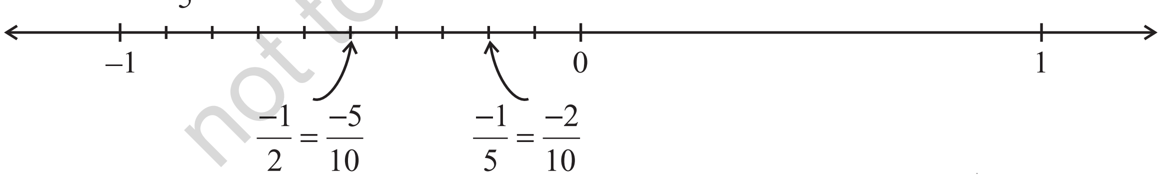
9.7 परिमेय संख्याओं की तुलना

हम यह जानते हैं कि दो पूर्णांकों या दो भिन्नों की तुलना किस प्रकार की जाती है तथा यह भी कि इनमें कौन बड़ा है और कौन छोटा। आइए अब देखें कि दो परिमेय संख्याओं की तुलना किस प्रकार की जा सकती है।

- $\frac{2}{3}$ और $\frac{5}{7}$ जैसी दो धनात्मक परिमेय संख्याओं की तुलना ठीक उसी प्रकार की जा सकती है, जैसा कि हम भिन्नों की स्थिति के लिए पहले पढ़ चुके हैं।
- मेरी ने दो ऋणात्मक परिमेय संख्याओं $-\frac{1}{2}$ और $-\frac{1}{5}$ की तुलना संख्या रेखा का प्रयोग करते हुए की। उसे ज्ञात था कि दो पूर्णांकों में वह पूर्णांक बड़ा था जो दूसरे पूर्णांक के दाईं ओर स्थित था।

  उदाहरणार्थ, संख्या रेखा पर पूर्णांक 5 पूर्णांक 2 के दाईं ओर स्थित है तथा $5 > 2$ है। संख्या रेखा पर पूर्णांक -2 पूर्णांक -5 के दाईं ओर स्थित है तथा $-2 > -5$ है।

  उसने इस विधि का प्रयोग परिमेय संख्याओं के लिए भी किया। उसे पता था कि संख्या रेखा पर परिमेय संख्याओं को किस प्रकार अंकित (निरूपित) किया जाता है। उसने $-\frac{1}{2}$ और $-\frac{1}{5}$ को नीचे दर्शाए अनुसार अंकित किया:



क्या उसने दोनों बिंदु सही प्रकार से अंकित किए हैं? उसने कैसे और क्यों $-\frac{1}{2}$ को $-\frac{5}{10}$ तथा $-\frac{1}{5}$ को $-\frac{2}{10}$ में बदला? उसे ज्ञात हुआ कि परिमेय संख्या $-\frac{1}{5}$ परिमेय संख्या $-\frac{1}{2}$ के दाईं ओर स्थित है। इस प्रकार, $-\frac{1}{5} > -\frac{1}{2}$ है या $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{5}$ है।

क्या आप $-\frac{3}{4}$ और $-\frac{2}{3}$ की तथा $-\frac{1}{3}$ और $-\frac{1}{5}$ की तुलना कर सकते हैं?

हम भिन्नों के अपने अध्ययन से यह जानते हैं कि $\frac{1}{5} < \frac{1}{2}$ है। साथ ही, मेरी ने $-\frac{1}{2}$ और $-\frac{1}{5}$ के लिए क्या प्राप्त किया? क्या यह इसका ठीक विपरीत नहीं था।

आप देखते हैं कि $\frac{1}{2} > \frac{1}{5}$ है, परंतु $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{5}$ है।

क्या आप $-\frac{3}{4}$ और $-\frac{2}{3}$ तथा $-\frac{1}{2}$ और $-\frac{1}{5}$ के लिए भी इसी प्रकार का परिणाम देखते हैं?

मेरी को याद आता है कि उसने पूर्णांकों में पढ़ा था कि $4 > 3$ है, परंतु $-4 < -3$ है; $5 > 2$ है, परंतु $-5 < -2$ इत्यादि।

- ऋणात्मक परिमेय संख्याओं के युग्मों की स्थिति भी ठीक इसी प्रकार है। *दो ऋणात्मक परिमेय संख्याओं की तुलना करने के लिए, हम उनकी तुलना उनके चिह्नों को छोड़ते हुए करते हैं और बाद में असमिका (inequality) के चिह्न को उल्टा कर (बदल) देते हैं।*

  उदाहरणार्थ, $-\frac{7}{5}$ और $-\frac{5}{3}$, की तुलना करने के लिए, पहले हम $\frac{7}{5}$ और $\frac{5}{3}$ की तुलना करते हैं।

  हमें $\frac{7}{5} < \frac{5}{3}$ प्राप्त होता है और इससे हम निष्कर्ष निकालते हैं कि $\frac{-7}{5} > \frac{-5}{3}$ है।

  ऐसे पाँच युग्म और लीजिए और फिर उनकी तुलना कीजिए।

  कौन बड़ा है : $-\frac{3}{8}$ या $-\frac{2}{7}$?; $-\frac{4}{3}$ या $-\frac{3}{2}$?

- एक ऋणात्मक और धनात्मक परिमेय संख्या की तुलना सुस्पष्ट है। संख्या रेखा पर, एक ऋणात्मक परिमेय संख्या शून्य के बाईं ओर स्थित होती है तथा एक धनात्मक परिमेय संख्या शून्य के दाईं ओर स्थित होती है। अतः, एक ऋणात्मक परिमेय संख्या सदैव एक धनात्मक परिमेय संख्या से छोटी होती है।

  इस प्रकार $-\frac{2}{7} < \frac{1}{2}$ है।

- परिमेय संख्याओं $\frac{-3}{-5}$ और $\frac{-2}{-7}$ की तुलना करने के लिए पहले उन्हें मानक रूप में बदलिए और फिर उनकी तुलना कीजिए।

उदाहरण 3 क्या $\frac{4}{-9}$ और $\frac{-16}{36}$ एक ही परिमेय संख्या को निरूपित करते हैं?

हल हाँ, क्योंकि $\frac{4}{-9} = \frac{4 \times (-4)}{-9 \times (-4)} = \frac{-16}{36}$ या $\frac{-16}{36} = \frac{-16 \div -4}{36 \div -4} = \frac{4}{-9}$ है।

9.8 दो परिमेय संख्याओं के बीच में परिमेय संख्याएँ

रेशमा 3 और 10 के बीच में पूर्ण संख्याएँ गिनना चाहती थी। उसको अपनी पिछली कक्षाओं से यह ज्ञात था कि 3 और 10 के बीच में ठीक 6 पूर्ण संख्याएँ होंगी। इसी प्रकार, वह -3 और 3 के बीच पूर्णांकों की संख्या भी ज्ञात करना चाहती थी। -3 और 3 के बीच में पूर्णांक -2, -1, 0, 1 और 2 हैं। इस प्रकार, -3 और 3 के बीच ठीक 5 पूर्णांक हैं।

क्या −3 और −2 के बीच कोई पूर्णांक हैं? नहीं, −3 और −2 के बीच कोई पूर्णांक नहीं है। दो क्रमागत पूर्णांकों के बीच पूर्णांकों की संख्या 0 होती है।

इस प्रकार, हम प्राप्त करते हैं कि दो पूर्णांकों के बीच में पूर्णांकों की संख्या सीमित परिमित या (finite) होती है।

क्या यह परिमेय संख्याओं की स्थिति में भी होगा?

रेशमा ने दो परिमेय संख्याएँ $\frac{-3}{5}$ और $\frac{-1}{3}$ लीं।

उसने इन्हें समान हर वाली परिमेय संख्याओं में बदल लिया।

अत:, $\frac{-3}{5}=\frac{-9}{15}$ और $\frac{-1}{3}=\frac{-5}{15}$ है।

हमें प्राप्त है कि $\frac{-9}{15}<\frac{-8}{15}<\frac{-7}{15}<\frac{-6}{15}<\frac{-5}{15}$ है, या $\frac{-3}{5}<\frac{-8}{15}<\frac{-7}{15}<\frac{-6}{15}<\frac{-1}{3}$ है।

इस प्रकार, वह $\frac{-3}{5}$ और $\frac{-1}{3}$ के बीच में परिमेय संख्याएँ $\frac{-8}{15},\frac{-7}{15},\frac{-6}{15}$ ज्ञात कर सकी।

क्या $\frac{-3}{5}$ और $\frac{-1}{3}$ के बीच में केवल परिमेय संख्याएँ $\frac{-8}{15},\frac{-7}{15},\frac{-6}{15}$ ही हैं?

हमें प्राप्त है कि $\frac{-3}{5}=\frac{-18}{30}$ और $\frac{-8}{15}=\frac{-16}{30}$ है।

साथ ही, $\frac{-18}{30}<\frac{-17}{30}<\frac{-16}{30}$ है। अर्थात् $\frac{-3}{5}<\frac{-17}{30}<\frac{-8}{15}$ है।

अत:, $\frac{-3}{5}<\frac{-17}{30}<\frac{-8}{15}<\frac{-7}{15}<\frac{-6}{15}<\frac{-1}{3}$ है।

इस प्रकार, $\frac{-1}{3}$ और $\frac{-3}{5}$ के बीच हम एक और परिमेय संख्या ज्ञात करने में सफल हो गए।

इस विधि का प्रयोग करके, आप दो भिन्न-भिन्न परिमेय संख्याओं के बीच में जितनी चाहें उतनी परिमेय संख्याएँ ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरणार्थ, $\frac{-3}{5}=\frac{-3\times30}{5\times30}=\frac{-90}{150}$ और $\frac{-1}{3}=\frac{-1\times50}{3\times50}=\frac{-50}{150}$ है।

हमें $\frac{-90}{150}$ और $\frac{-50}{150}$ के बीच में, अर्थात् $\frac{-3}{5}$ और $\frac{-1}{3}$ के बीच में 39 परिमेय संख्याएँ $\frac{-89}{150},\frac{-88}{150},\frac{-87}{150},\ldots,\frac{-51}{150}$ प्राप्त करते हैं।

आप यह ज्ञात करेंगे कि यह सूची कभी समाप्त नहीं होगी।

क्या आप $\frac{-5}{3}$ और $\frac{-8}{7}$ के बीच में पाँच परिमेय संख्याएँ लिख सकते हैं?

हम दो परिमेय संख्याओं के बीच में असीमित (या अपरिमित रूप से अनेक) परिमेय संख्याएँ ज्ञात कर सकते हैं।

प्रयास कीजिए

$\frac{-5}{7}$ और $\frac{-3}{8}$ के बीच में पाँच परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

उदाहरण 4 – 2 और – 1 के बीच में तीन परिमेय संख्याएँ लिखिए।

हल आइए –1 और –2 को हर 5 वाली परिमेय संख्याओं के रूप में लिखें।

हमें प्राप्त है कि $-1 = \frac{-5}{5}$ और $-2 = \frac{-10}{5}$ है।

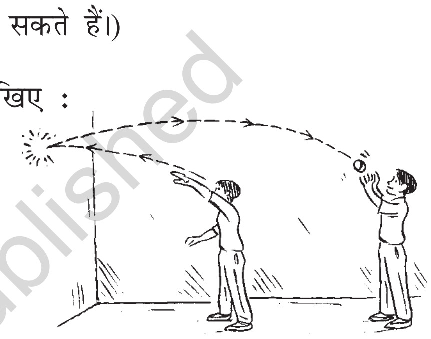
अतः, $\frac{-10}{5} < \frac{-9}{5} < \frac{-8}{5} < \frac{-7}{5} < \frac{-6}{5} < \frac{-5}{5}$ है, या $-2 < \frac{-9}{5} < \frac{-8}{5} < \frac{-7}{5} < \frac{-6}{5} < -1$ है।

–2 और –1 के बीच तीन परिमेय संख्याएँ $\frac{-9}{5}, \frac{-8}{5}, \frac{-7}{5}$ होंगी।

(आप $\frac{-9}{5}, \frac{-8}{5}, \frac{-7}{5}$ और $\frac{-6}{5}$ में से कोई सी भी तीन परिमेय संख्याएँ ले सकते हैं।)

उदाहरण 5 निम्नलिखित प्रतिरूप (Pattern) में, चार और संख्याएँ लिखिए :

$$\frac{-1}{3}, \frac{-2}{6}, \frac{-3}{9}, \frac{-4}{12}, \ldots$$



हल हमें प्राप्त है :

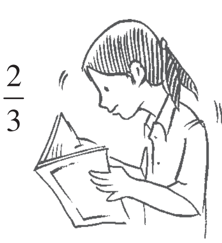
$$\frac{-2}{6} = \frac{-1 \times 2}{3 \times 2}, \frac{-3}{9} = \frac{-1 \times 3}{3 \times 3}, \frac{-4}{12} = \frac{-1 \times 4}{3 \times 4}$$

अथवा $\frac{-1 \times 1}{3 \times 1} = \frac{-1}{3}, \frac{-1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{-2}{6}, \frac{-1 \times 3}{3 \times 3} = \frac{-3}{9}, \frac{-1 \times 4}{3 \times 4} = \frac{-4}{12}$ है।

इस प्रकार, इन संख्याओं में हम एक प्रतिरूप देखते हैं।

अन्य संख्याएँ $\frac{-1 \times 5}{3 \times 5} = \frac{-5}{15}, \frac{-1 \times 6}{3 \times 6} = \frac{-6}{18}, \frac{-1 \times 7}{3 \times 7} = \frac{-7}{21}$ होंगी।

प्रश्नावली 9.1



1. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं के बीच में पाँच परिमेय संख्याएँ लिखिए :

(i) –1 और 0 (ii) –2 और –1 (iii) $\frac{-4}{5}$ और $\frac{-2}{3}$ (iv) $-\frac{1}{2}$ और $\frac{2}{3}$

2. निम्नलिखित प्रतिरूपों में से प्रत्येक में चार और परिमेय संख्याएँ लिखिए :

(i) $\frac{-3}{5}, \frac{-6}{10}, \frac{-9}{15}, \frac{-12}{20}, \ldots\ldots$ (ii) $\frac{-1}{4}, \frac{-2}{8}, \frac{-3}{12}, \ldots\ldots$

(iii) $\frac{-1}{6}, \frac{2}{-12}, \frac{3}{-18}, \frac{4}{-24}, \ldots\ldots$ (iv) $\frac{-2}{3}, \frac{2}{-3}, \frac{4}{-6}, \frac{6}{-9}, \ldots\ldots$

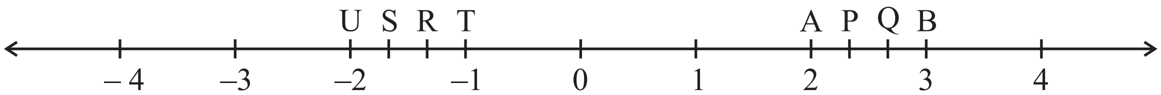
3. निम्नलिखित के समतुल्य चार परिमेय संख्याएँ लिखिए :

(i) $\frac{-2}{7}$ (ii) $\frac{5}{-3}$ (iii) $\frac{4}{9}$

4. एक संख्या रेखा खींचिए और उस पर निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को निरूपित कीजिए :

(i) $\frac{3}{4}$ (ii) $\frac{-5}{8}$ (iii) $\frac{-7}{4}$ (iv) $\frac{7}{8}$

5. एक संख्या रेखा पर बिंदु P, Q, R, S, T, U, A और B इस प्रकार हैं कि TR = RS = SU तथा AP = PQ = QB है। P, Q, R और S से निरूपित परिमेय संख्याओं को लिखिए।



6. निम्नलिखित में से कौन-से युग्म एक ही परिमेय संख्या को निरूपित करते हैं?

(i) $\frac{-7}{21}$ और $\frac{3}{9}$ (ii) $\frac{-16}{20}$ और $\frac{20}{-25}$ (iii) $\frac{-2}{-3}$ और $\frac{2}{3}$

(iv) $\frac{-3}{5}$ और $\frac{-12}{20}$ (v) $\frac{8}{-5}$ और $\frac{-24}{15}$ (vi) $\frac{1}{3}$ और $\frac{-1}{9}$

(vii) $\frac{-5}{-9}$ और $\frac{5}{-9}$

7. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को उनके सरलतम रूप में लिखिए :

(i) $\frac{-8}{6}$ (ii) $\frac{25}{45}$ (iii) $\frac{-44}{72}$ (iv) $\frac{-8}{10}$

8. संकेतों >, <, और = में से सही संकेत चुन कर रिक्त स्थानों को भरिए :

(i) $\frac{-5}{7} \boxed{} \frac{2}{3}$ (ii) $\frac{-4}{5} \boxed{} \frac{-5}{7}$ (iii) $\frac{-7}{8} \boxed{} \frac{14}{-16}$

(iv) $\frac{-8}{5} \boxed{} \frac{-7}{4}$ (v) $\frac{1}{-3} \boxed{} \frac{-1}{4}$ (vi) $\frac{5}{-11} \boxed{} \frac{-5}{11}$

(vii) $0 \boxed{} \frac{-7}{6}$

9. निम्नलिखित में प्रत्येक में से कौन-सी संख्या बड़ी है?

(i) $\frac{2}{3}, \frac{5}{2}$ (ii) $\frac{-5}{6}, \frac{-4}{3}$ (iii) $\frac{-3}{4}, \frac{2}{-3}$

(iv) $\frac{-1}{4}, \frac{1}{4}$ (v) $-3\frac{2}{7}, -3\frac{4}{5}$

10. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को आरोही क्रम में लिखिए :

(i) $\frac{-3}{5}, \frac{-2}{5}, \frac{-1}{5}$ (ii) $\frac{1}{3}, \frac{-2}{9}, \frac{-4}{3}$ (iii) $\frac{-3}{7}, \frac{-3}{2}, \frac{-3}{4}$

9.9 परिमेय संख्याओं पर संक्रियाएँ

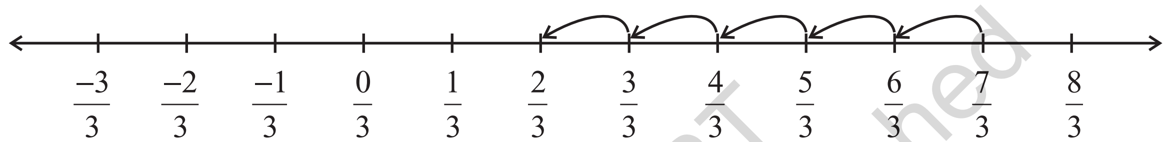
आप जानते हैं कि पूर्णांकों तथा भिन्नों को किस प्रकार जोड़ा, घटाया, गुणा और भाग किया जाता है। आइए इन आधारभूत संक्रियाओं का परिमेय संख्याओं पर अध्ययन करें।

9.9.1 योग

- आइए समान हर वाली दो परिमेय संख्याओं, मान लीजिए $\frac{7}{3}$ और $\frac{-5}{3}$, को जोड़ें।

  हम $\frac{7}{3}+\left(\frac{-5}{3}\right)$ ज्ञात करते हैं।

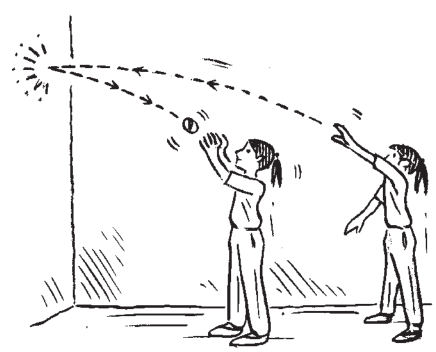
  संख्या रेखा पर, हमें प्राप्त होता है :



दो क्रमागत बिंदुओं के बीच की दूरी $\frac{1}{3}$ है। अत:, $\frac{7}{3}$ में $\frac{-5}{3}$ जोड़ने का अर्थ है कि $\frac{7}{3}$ के बाईं ओर 5 कदम चलें। हम कहाँ पहुँचते हैं? हम $\frac{2}{3}$ पर पहुँचते हैं। अत:, $\frac{7}{3}+\left(\frac{-5}{3}\right)=\frac{2}{3}$ है।

आइए इसको इस प्रकार करने का प्रयत्न करें :

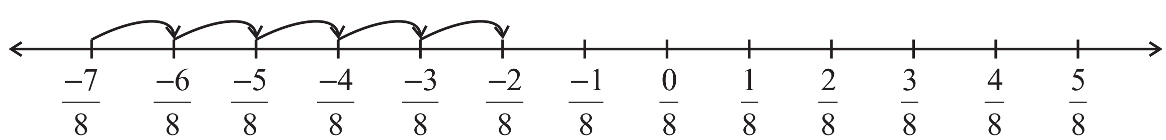
$$\frac{7}{3}+\frac{(-5)}{3}=\frac{7+(-5)}{3}=\frac{2}{3}$$



हमें वही उत्तर प्राप्त होता है।

$\frac{6}{5}+\frac{(-2)}{5}$, $\frac{3}{7}+\frac{(-5)}{7}$ को उपरोक्त दोनों विधियों से ज्ञात कीजिए और जाँच करें कि क्या दोनों उत्तर समान हैं।

इसी प्रकार, $\frac{-7}{8}+\frac{5}{8}$ निम्नलिखित होगा :



हमें क्या प्राप्त होता है?

साथ ही, $\frac{-7}{8}+\frac{5}{8}=\frac{-7+5}{8}=?$ क्या दोंनों मान समान हैं?

प्रयास कीजिए

$\frac{-13}{7}+\frac{6}{7}$ तथा $\frac{19}{5}+\left(\frac{-7}{5}\right)$ ज्ञात कीजिए:

इस प्रकार, हम देखते हैं कि समान हर वाली परिमेय संख्याओं को जोड़ते समय, हम, हर को वही रखते हुए, अंशों को जोड़ देते हैं।

इस प्रकार, $\frac{-11}{5}+\frac{7}{5}=\frac{-11+7}{5}=\frac{-4}{5}$ है।

- हम अलग-अलग हरों वाली दो परिमेय संख्याओं को किस प्रकार जोड़ें? भिन्नों की तरह, हम पहले इन हरों का ल.स. ज्ञात करते हैं। फिर हम ऐसी समतुल्य परिमेय संख्याएँ ज्ञात करते हैं, जिनके हर यह ल.स. हों। इसके बाद हम इन दोनों परिमेय संख्याओं को जोड़ते हैं।

उदाहरणार्थ, आइए $\frac{-7}{5}$ और $\frac{-2}{3}$ को जोड़ें। 5 और 3 का ल.स. 15 है।

अतः, $\frac{-7}{5}=\frac{-21}{15}$ और $\frac{-2}{3}=\frac{-10}{15}$ है।

इस प्रकार $\frac{-7}{5}+\left(\frac{-2}{3}\right)=\frac{-21}{15}+\left(\frac{-10}{15}\right)=\frac{-31}{15}$ हुआ।

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{-3}{7}+\frac{2}{3}$

(ii) $\frac{-5}{6}+\frac{-3}{11}$

योज्य प्रतिलोम :

$\frac{-4}{7}+\frac{4}{7}$ किसके बराबर होगा?

$\frac{-4}{7}+\frac{4}{7}=\frac{-4+4}{7}=0$ है। साथ ही, $\frac{4}{7}+\left(\frac{-4}{7}\right)=0$ है

इसी प्रकार, $\frac{-2}{3}+\frac{2}{3}=0=\frac{2}{3}+\left(\frac{-2}{3}\right)$ है।

आपको याद होगा कि पूर्णांकों में, – 2 का **योज्य प्रतिलोम (additive inverse)** 2 है, तथा 2, पूर्णांक – 2 का योज्य प्रतिलोम होता है।

परिमेय संख्याओं के लिए, हम कहते हैं कि $\frac{-4}{7}$ परिमेय संख्या $\frac{4}{7}$ का **योज्य प्रतिलोम** है तथा $\frac{4}{7}$ परिमेय संख्या $\frac{-4}{7}$ का योज्य प्रतिलोम है।

इसी प्रकार, $\frac{-2}{3}$ परिमेय संख्या $\frac{2}{3}$ का योज्य प्रतिलोम है तथा $\frac{2}{3}$ परिमेय संख्या $\frac{-2}{3}$ का योज्य प्रतिलोम है।

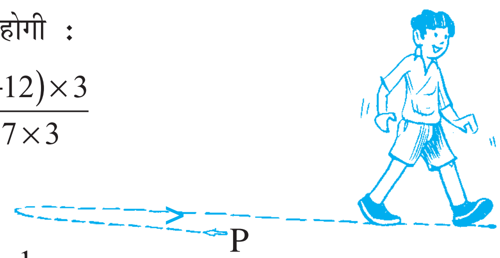
प्रयास कीजिए

$\frac{-3}{9}, \frac{-9}{11}$ और $\frac{5}{7}$ के योज्य प्रतिलोम क्या हैं?

उदाहरण 6 सतपाल किसी स्थान P से पूर्व दिशा में $\frac{2}{3}$ km चलता है और फिर वहाँ से पश्चिम दिशा में $1\frac{5}{7}$ km चलता है। अब वह P से कहाँ स्थित होगा?

हल आइए पूर्व दिशा में चली गई दूरी को धनात्मक चिह्न से व्यक्त करें। इसलिए, पश्चिम दिशा में चली गई दूरी को ऋणात्मक चिह्न से व्यक्त किया जाएगा।

इस प्रकार, बिंदु P से सतपाल की दूरी (km में) होगी :



$$\frac{2}{3}+\left(-1\frac{5}{7}\right)=\frac{2}{3}+\frac{(-12)}{7}=\frac{2\times 7}{3\times 7}+\frac{(-12)\times 3}{7\times 3}$$

$$=\frac{14-36}{21}=\frac{-22}{21}=-1\frac{1}{21}$$

क्योंकि यह ऋणात्मक है, इसलिए सतपाल P से पश्चिम की ओर $1\frac{1}{21}$ km की दूरी पर है।

9.9.2 व्यवकलन (घटाना)

सविता ने दो परिमेय संख्याओं $\frac{5}{7}$ और $\frac{3}{8}$ का अंतर इस विधि से प्राप्त किया :

$$\frac{5}{7}-\frac{3}{8}=\frac{40-21}{56}=\frac{19}{56}$$

फरीदा जानती थी कि दो पूर्णांकों a और b के लिए, $a - b = a + (-b)$ लिखा जा सकता है।

उसने ऐसा परिमेय संख्याओं के लिए भी किया और ज्ञात किया कि $\frac{5}{7}-\frac{3}{8}=\frac{5}{7}+\frac{(-3)}{8}=\frac{19}{56}$ है।

दोनों ने एक ही (समान) अंतर प्राप्त किया।

दोनों विधियों से, $\frac{7}{8}-\frac{5}{9}$, $\frac{3}{11}-\frac{8}{7}$ ज्ञात करने का प्रयत्न कीजिए। क्या आपको समान उत्तर प्राप्त होते हैं?

अत: हम कहते हैं कि *दो परिमेय संख्याओं को घटाते (व्यवकलन करते) समय, घटाए जाने वाली संख्या के योज्य प्रतिलोम को अन्य परिमेय संख्या में जोड़ देना चाहिए।*

इस प्रकार, $1\frac{2}{3}-2\frac{4}{5}=\frac{5}{3}-\frac{14}{5}=\frac{5}{3}+\frac{14}{5}$ का योज्य प्रतिलोम

$$=\frac{5}{3}+\frac{(-14)}{5}=\frac{-17}{15}=-1\frac{2}{15}$$ है।

$\frac{2}{7}-\left(\frac{-5}{6}\right)$ क्या होगा? $\frac{2}{7}-\left(\frac{-5}{6}\right)=\frac{2}{7}+\left(\frac{-5}{6}\right)$ का योज्य प्रतिलोम

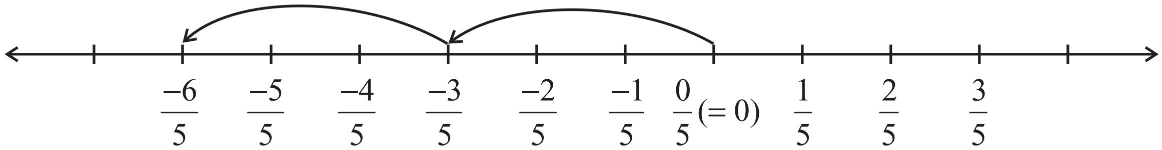
$$=\frac{2}{7}+\frac{5}{6}=\frac{47}{42}=1\frac{5}{42}$$

> **प्रयास कीजिए**
>
> ज्ञात कीजिए
>
> (i) $\frac{7}{9}-\frac{2}{5}$ (ii) $2\frac{1}{5}-\frac{(-1)}{3}$

9.9.3 गुणन

आइए परिमेय संख्या $\frac{-3}{5}$ को 2 से गुणा करें, अर्थात् हम $\frac{-3}{5}\times 2$ ज्ञात करें।

संख्या रेखा पर इसका अर्थ होगा $\frac{3}{5}$ कि बाईं ओर दो कदम चलना।



हम कहाँ पहुँचते हैं? हम $\frac{-6}{5}$ पर पहुँचते हैं। आइए हम इसको भिन्नों वाली विधि से ज्ञात करें।

$$\frac{-3}{5}\times 2=\frac{-3\times 2}{5}=\frac{-6}{5}$$

हम उसी परिमेय संख्या पर पहुँच जाते हैं।

दोनों विधियों का प्रयोग करते हुए, $\frac{-4}{7}\times 3$ और $\frac{-6}{5}\times 4$, को ज्ञात कीजिए। आप क्या देखते हैं?

अतः, *हम ज्ञात करते हैं कि एक परिमेय संख्या को एक धनात्मक पूर्णांक से गुणा करने पर, हम अंश को उस पूर्णांक से गुणा कर देते हैं तथा हर को वही रखते हैं।*

आइए अब एक परिमेय संख्या को एक ऋणात्मक पूर्णांक से गुणा करें।

$$\frac{-2}{9}\times(-5)=\frac{-2\times(-5)}{9}=\frac{10}{9}$$

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित गुणनफल क्या होंगे?

(i) $\frac{-3}{5}\times 7$ (ii) $\frac{-6}{5}\times(-2)$

याद रखिए कि -5 को $\frac{-5}{1}$ लिखा जा सकता है।

अतः, $\frac{-2}{9}\times\frac{-5}{1}=\frac{10}{9}=\frac{-2\times(-5)}{9\times 1}$ है।

इसी प्रकार, $\frac{3}{11}\times(-2)=\frac{3\times(-2)}{11\times 1}=\frac{-6}{11}$ है।

उपरोक्त प्रेक्षणों के आधार पर, हम ज्ञात करते हैं कि $\frac{-3}{8}\times\frac{5}{7}=\frac{-3\times 5}{8\times 7}=\frac{-15}{56}$ है।

अतः, जैसा कि हमने भिन्नों की स्थिति में किया था, हम दो परिमेय संख्याओं को निम्नलिखित विधि से गुणा करते हैं :

चरण 1 : दोनों परिमेय संख्याओं के अंशों का गुणा कीजिए।

चरण 2 : दोनों परिमेय संख्याओं के हरों का गुणा कीजिए।

चरण 3 : गुणनफल को $\frac{\text{चरण 1 में प्राप्त परिणाम}}{\text{चरण 2 में प्राप्त परिणाम}}$ के रूप में लिखिए।

इस प्रकार, $\frac{-3}{5}\times\frac{2}{7}=\frac{-3\times 2}{5\times 7}=\frac{-6}{35}$ है।

साथ ही $\frac{-5}{8}\times\left(\frac{-9}{7}\right)=\frac{(-5)\times(-9)}{8\times 7}=\frac{45}{56}$ है।

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{-3}{4}\times\frac{1}{7}$

(ii) $\frac{2}{3}\times\frac{-5}{9}$

9.9.4 विभाजन

भिन्नों के व्युत्क्रमों (reciprocals) के बारे में हम पहले पढ़ चुके हैं। $\frac{2}{7}$ का व्युत्क्रम क्या है? यह $\frac{7}{2}$ है। हम इस अवधारणा को शून्येतर परिमेय संख्याओं के व्युत्क्रमों के लिए भी लागू करते हैं।

इस प्रकार, $\frac{-2}{7}$ का व्युत्क्रम $\frac{7}{-2}$, अर्थात् $\frac{-7}{2}$ होगा तथा $\frac{-3}{5}$ का व्युत्क्रम $\frac{-5}{3}$ होगा।

परिमेय संख्या का उसके व्युत्क्रम से गुणनफल

किसी संख्या का उसके व्युत्क्रम से गुणनफल सदैव 1 होता है।

उदाहरणार्थ $\frac{-4}{9} \times (\frac{-4}{9}$ का व्युत्क्रम$)$

$= \frac{-4}{9} \times \left(\frac{-9}{4}\right) = 1$ है।

इसी प्रकार $\frac{-6}{13}\left(\frac{-13}{6}\right) = 1$ है।

कुछ और उदाहरण लेकर, इस प्रेक्षण की पुष्टि कीजिए।

प्रयास कीजिए

$\frac{-6}{11}, \frac{-8}{5}$ के व्युत्क्रम क्या होंगे?

सविता ने एक परिमेय संख्या $\frac{4}{9}$ को एक अन्य परिमेय संख्या $\frac{-5}{7}$ से इस प्रकार विभाजित किया (भाग दिया) :

$$\frac{4}{9} \div \left(\frac{-5}{7}\right) = \frac{4}{9} \times \frac{7}{-5} = \frac{-28}{45}$$

उसने भिन्नों की तरह ही व्युत्क्रम की अवधारणा का प्रयोग किया।

अर्पित ने पहले $\frac{4}{9}$ को $\frac{5}{7}$ से भाग दिया और $\frac{28}{45}$ प्राप्त किया।

अंत में, उसने कहा कि $\frac{4}{9} \div \left(\frac{-5}{7}\right) = \frac{-28}{45}$ है। उसने ऐसा किस प्रकार प्राप्त किया?

उसने ऋणात्मक चिह्न को छोड़ते हुए, उन्हें भिन्नों की तरह विभाजित किया और बाद में प्राप्त परिणाम के साथ ऋणात्मक चिह्न लगा दिया।

दोनों ने एक ही मान $\frac{-28}{45}$ प्राप्त किया। $\frac{2}{3}$ को $\frac{-5}{7}$ से दोनों विधियों द्वारा भाग देकर देखिए कि क्या आप एक ही (समान) उत्तर प्राप्त करते हैं।

उपरोक्त से यह प्रदर्शित होता है कि *एक परिमेय संख्या को किसी अन्य परिमेय संख्या से भाग देने के लिए, हम उस परिमेय संख्या को अन्य परिमेय संख्या के व्युत्क्रम से गुणा कर देते हैं।*

इस प्रकार, $\frac{6}{-5} \div \frac{-2}{3} = \frac{6}{-5} \times \left(\frac{-2}{3}\right)$ का व्युत्क्रम $= \frac{6}{-5} \times \frac{3}{-2} = \frac{18}{10}$ है।

प्रयास कीजिए

ज्ञात कीजिए: (i) $\frac{2}{3} \times \left(\frac{-7}{8}\right)$ (ii) $\frac{-6}{7} \times \frac{5}{7}$

प्रश्नावली 9.2

1. योग ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{5}{4}+\left(\frac{-11}{4}\right)$ (ii) $\frac{5}{3}+\frac{3}{5}$ (iii) $\frac{-9}{10}+\frac{22}{15}$

(iv) $\frac{-3}{-11}+\frac{5}{9}$ (v) $\frac{-8}{19}+\frac{(-2)}{57}$ (vi) $\frac{-2}{3}+0$

(vii) $-2\frac{1}{3}+4\frac{3}{5}$

2. ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{7}{24}-\frac{17}{36}$ (ii) $\frac{5}{63}-\left(\frac{-6}{21}\right)$ (iii) $\frac{-6}{13}-\left(\frac{-7}{15}\right)$

(iv) $\frac{-3}{8}-\frac{7}{11}$ (v) $-2\frac{1}{9}-6$

3. गुणनफल ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{9}{2}\times\left(\frac{-7}{4}\right)$ (ii) $\frac{3}{10}\times(-9)$ (iii) $\frac{-6}{5}\times\frac{9}{11}$

(iv) $\frac{3}{7}\times\left(\frac{-2}{5}\right)$ (v) $\frac{3}{11}\times\frac{2}{5}$ (vi) $\frac{3}{-5}\times\frac{-5}{3}$

4. निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए :

(i) $(-4)\div\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{-3}{5}\div 2$ (iii) $\frac{-4}{5}\div(-3)$

(iv) $\frac{-1}{8}\div\frac{3}{4}$ (v) $\frac{-2}{13}\div\frac{1}{7}$ (vi) $\frac{-7}{12}\div\left(\frac{-2}{13}\right)$

(vii) $\frac{3}{13}\div\left(\frac{-4}{65}\right)$

हमने क्या चर्चा की ?

1. एक संख्या जिसे $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त किया जा सके, जहाँ p और q पूर्णांक हैं तथा $q \neq 0$ है, परिमेय संख्या कहलाती है। संख्याएँ $\frac{-2}{7}, \frac{3}{8}, 3$ इत्यादि परिमेय संख्याएँ हैं।
2. सभी पूर्णांक और भिन्न परिमेय संख्याएँ हैं।
3. यदि किसी परिमेय संख्या के अंश और हर को एक ही शून्येतर पूर्णांक से गुणा किया जाए या भाग दिया जाए, तो हमें एक परिमेय संख्या प्राप्त होती है जो दी हुई परिमेय संख्या के समतुल्य परिमेय संख्या कही जाती है। उदाहरणार्थ, $\frac{-3}{7} = \frac{-3 \times 2}{7 \times 2} = \frac{-6}{14}$ है। अत:, हम कहते हैं कि $\frac{-6}{14}$ संख्या $\frac{-3}{7}$ का एक समतुल्य रूप है। साथ ही, ध्यान दीजिए कि $\frac{-6}{14} = \frac{-6 \div 2}{14 \div 2} = \frac{-3}{7}$ है।
4. परिमेय संख्याओं को धनात्मक और ऋणात्मक परिमेय संख्याओं के रूप में वर्गीकृत किया जाता है। जब अंश और हर दोनों ही या तो धनात्मक पूर्णांक हों या ऋणात्मक पूर्णांक हों, तो वह परिमेय संख्या धनात्मक परिमेय संख्या कहलाती है। जब अंश या हर में से एक ऋणात्मक पूर्णांक हो, तो वह परिमेय संख्या एक ऋणात्मक परिमेय संख्या कहलाती है। उदाहरणार्थ, $\frac{3}{8}$ एक धनात्मक परिमेय संख्या है तथा $\frac{-8}{9}$ एक ऋणात्मक परिमेय संख्या है।
5. संख्या 0 न तो एक धनात्मक परिमेय संख्या है और न ही ऋणात्मक परिमेय संख्या है।
6. एक परिमेय संख्या को अपने मानक रूप में तब माना जाता है, जब उसका हर धनात्मक पूर्णांक हो तथा अंश और हर में 1 के अतिरिक्त कोई सार्व गुणनखंड न हो। संख्याएँ $\frac{-1}{3}, \frac{2}{7}$, इत्यादि मानक रूप में हैं।
7. दो परिमेय संख्याओं के बीच असीमित परिमेय संख्याएँ होती हैं।
8. समान हर वाली दो परिमेय संख्याओं का योग ज्ञात करने के लिए, उनके अंशों को जोड़ा जा सकता है तथा हर वही रख कर योग ज्ञात किया जा सकता है। भिन्न-भिन्न हरों वाली दो परिमेय संख्याओं को जोड़ने के लिए, पहले दोनों हरों का ल.स. ज्ञात किया जाता है और फिर दोनों परिमेय संख्याओं को ल.स. के बराबर समान हर वाली दो समतुल्य परिमेय संख्याओं में बदल कर जोड़ लिया जाता है। उदाहरणार्थ, $\frac{-2}{3} + \frac{3}{8} = \frac{-16}{24} + \frac{9}{24} = \frac{-16+9}{24} = \frac{-7}{24}$ है। यहां 3 और 8 का ल. स. 24 है।

9. दो परिमेय संख्याओं का व्यवकलन करने के लिए हम घटाई जाने वाली परिमेय संख्या के योज्य प्रतिलोम को अन्य परिमेय संख्या में जोड़ते हैं।

इस प्रकार, $\frac{7}{8}-\frac{2}{3}=\frac{7}{8}+\frac{2}{3}$ का योज्य प्रतिलोम $=\frac{7}{8}+\frac{(-2)}{3}=\frac{21+(-16)}{24}=\frac{5}{24}$ है।

10. दो परिमेय संख्याओं का गुणा करने के लिए, हम इन संख्याओं के अंशों तथा हरों को अलग-अलग गुणा करते हैं और फिर गुणनफल को $\frac{\text{अंशों का गुणनफल}}{\text{हरों का गुणनफल}}$ के रूप में लिखते हैं।

11. एक परिमेय संख्या को एक अन्य शून्येतर परिमेय संख्या से भाग देने के लिए, हम पहली परिमेय संख्या को अन्य परिमेय संख्या के व्युत्क्रम से गुणा करते हैं। इस प्रकार $\frac{-7}{2}\div\frac{4}{3}=\frac{-7}{2}\times(\frac{4}{3}$ का व्युत्क्रम$)=\frac{-7}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{-21}{8}$ है।

अध्याय 10

प्रायोगिक ज्यामिति

10.1 भूमिका

आप अनेक प्रकार के आकारों से परिचित हैं। आप पिछली कक्षाओं में इनमें से कुछ आकारों की रचना करना सीख चुके हैं। उदाहरणतः अब आप एक दी हुई लंबाई का रेखाखंड, एक रेखाखंड पर एक लंब रेखा, एक कोण, कोण का समद्विभाजक, एक वृत्त, इत्यादि की रचना कर सकते हैं। अब आप समांतर रेखाएँ तथा कुछ प्रकार के त्रिभुजों को खींचना सीखेंगे।

10.2 एक दी हुई रेखा के समांतर उस बिंदु से होकर रेखा खींचना जो उस रेखा पर स्थित नहीं है

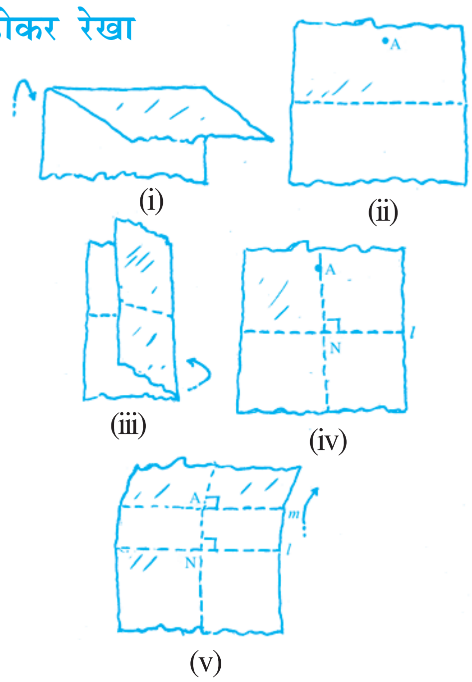
आइए एक क्रियाकलाप से प्रारंभ करें। (आकृति 10.1)

(i) एक कागज़ की शीट लीजिए और इसे मोड़कर एक निशान बनाइए। यह मोड़ का निशान एक रेखा l को निरूपित करता है।

(ii) कागज़ को खोल लीजिए। इस कागज़ पर l के बाहर एक बिंदु A अंकित कीजिए।

(iii) इस बिंदु A से होकर जाता हुआ और रेखा l पर लंब एक मोड़ का निशान बनाइए। इस लंब का नाम AN रखिए।

(iv) अब, बिंदु A से होकर इस लंब के लंबवत एक मोड़ का निशान बनाइए। इस नयी लंबवत रेखा का नाम m रखिए। अब, $l \parallel m$ है क्या आप देख सकते हैं कि ऐसा क्यों है?

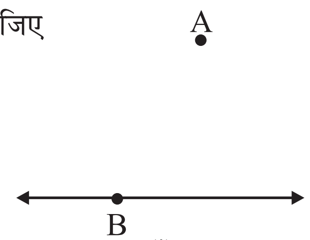


आकृति 10.1

यहाँ समांतर रेखाओं का कौन-सा गुण या कौन-से गुण यह कहने में सहायता कर सकता है या कर सकते हैं कि रेखाएँ l और m समांतर हैं?

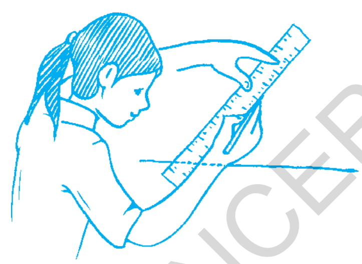
आप तिर्यक रेखा और समांतर रेखाओं से संबंधित गुणों में से किसी भी गुण का प्रयोग करके इस **रचना को केवल पैमाना (रूलर) और परकार का प्रयोग करके कर सकते हैं।**

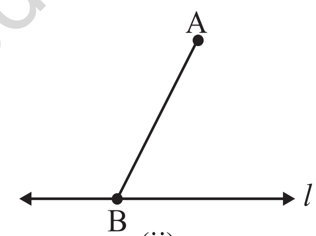
चरण 1 एक रेखा 'l' और उसके बाहर स्थित कोई बिंदु 'A' लीजिए [आकृति10.2 (i)]।



(i)

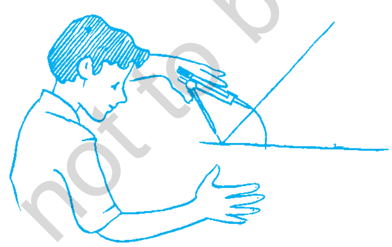
चरण 2 रेखा l और कोई बिंदु B लीजिए और A को B से मिलाइए [आकृति 10.2(ii)]।

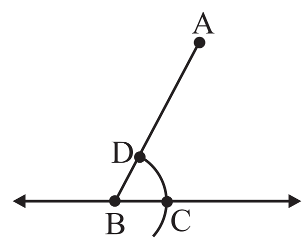




(ii)

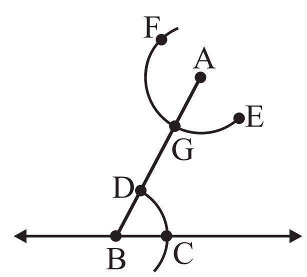
चरण 3 बिंदु B को केंद्र मान कर और कोई सुविधाजनक त्रिज्या लेकर, l को C पर और BA को D पर प्रतिच्छेद करता (काटता) हुआ एक चाप खींचिए [आकृति 10.2(iii)]।





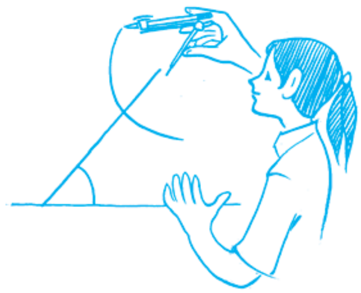
(iii)

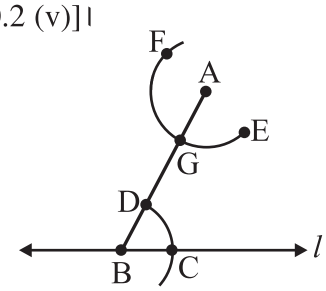
चरण 4 अब, A बिंदु को केंद्र मान कर और चरण 3 वाली ही त्रिज्या लेकर, AB को G पर काटता हुआ एक चाप EF खींचिए [आकृति 10.2 (iv)]।



(iv)

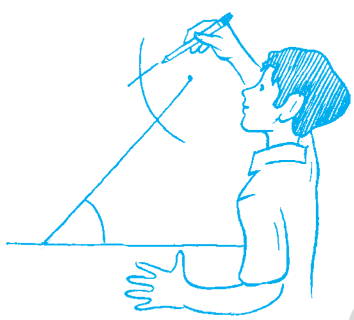
चरण 5 परकार के नुकीले सिरे को C पर रखिए और इसे खोल कर इस प्रकार समायोजित कीजिए कि पेंसिल की नोक D पर रहे [आकृति 10.2 (v)]।

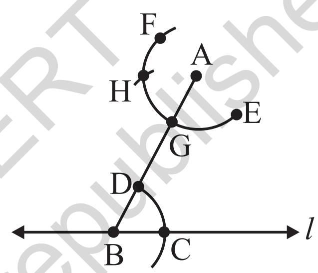




(v)

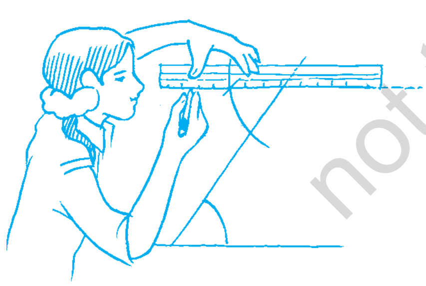
चरण 6 G को केंद्र मानकर और परकार का खुलाव (opening) चरण 5 वाला ही रखते हुए, एक चाप खींचिए जो चाप EF को H पर काटे [आकृति 10.2 (vi)] ।

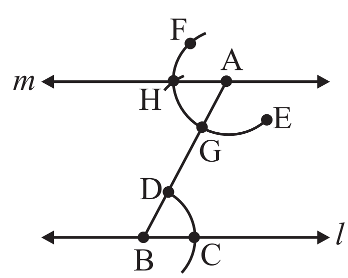




(vi)

चरण 7 अब AH को मिलाकर रेखा m खींचिए [आकृति 10.2 (vii)]।





(vii)

आकृति 10.2 (i)-(vii)

ध्यान दीजिए कि $\angle ABC$ और $\angle BAH$ एकांतर अंत:कोण हैं, जो परस्पर बराबर हैं। इसलिए $m \parallel l$ है।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

1. उपरोक्त रचना में, क्या आप A से होकर जाती हुई अन्य रेखा खींच सकते हैं जो l के समांतर हो?
2. क्या आप इस रचना में इस प्रकार का परिवर्तन कर सकते हैं कि बराबर एकांतर अंत:कोण बनाने के स्थान पर बराबर संगत कोण बनें?

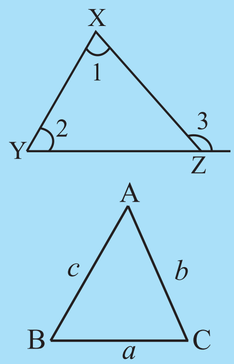
प्रश्नावली 10.1

1. एक रेखा, (मान लीजिए AB) खींचिए और इसके बाहर स्थित कोई बिंदु C लीजिए। केवल पैमाना (रूलर) और परकार का प्रयोग करते हुए, C से होकर AB के समांतर एक रेखा खींचिए।
2. एक रेखा l खींचिए और l पर स्थित किसी भी बिंदु पर l पर लंब खींचिए। इस लंब रेखा पर एक बिंदु X लीजिए जो l से 4 cm की दूरी पर हो। X से होकर l के समांतर एक रेखा m खींचिए।
3. मान लीजिए l एक रेखा है और P एक बिंदु है जो l पर स्थित नहीं है। P से होकर l के समांतर एक रेखा m खींचिए। अब P को l के किसी बिंदु Q से जोड़िए। m पर कोई अन्य बिंदु R चुनिए। R से होकर, PQ के समांतर एक रेखा खींचिए। मान लीजिए यह रेखा, रेखा l से बिंदु S पर मिलती है। समांतर रेखाओं के इन दोनों युग्मों से क्या आकृति बनती है?

10.3 त्रिभुजों की रचना

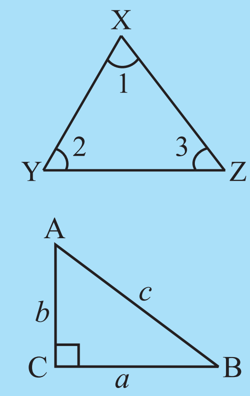
इस अनुच्छेद को पढ़ने से पहले, यह अच्छा होगा कि आप त्रिभुजों की अवधारणाओं, विशेष रूप से त्रिभुजों के गुणों और त्रिभुजों की सर्वांगसमता वाले अध्यायों को याद करें।

$\angle 3 = \angle 1 + \angle 2$



$a + b > c$

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$



$b^2 + a^2 = c^2$

आप भुजाओं और कोणों के आधारों पर त्रिभुजों को वर्गीकृत करना तथा त्रिभुजों से संबंधित निम्नलिखित महत्वपूर्ण गुणों के बारे में जानते हैं :

(i) एक त्रिभुज का बाह्यकोण उसके दोनों अभिमुख अंत:कोणों के योगफल के बराबर होता है।

(ii) त्रिभुज के तीनों अन्त: कोणों का योग 180° होता है।

(iii) त्रिभुज की किन्हीं भी दो भुजाओं की लंबाइयों का योग तीसरी भुजा की लंबाई से अधिक होता है।

(iv) एक समकोण त्रिभुज में कर्ण पर बना वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गों के योगफल के बराबर होता है।

'त्रिभुजों की सर्वांगसमता' वाले अध्याय में हमने देखा था कि एक त्रिभुज प्राप्त किया जा सकता है, यदि उसके निम्नलिखित माप समूहों में से कोई एक दिया हुआ है:

(i) तीन भुजाएँ

(ii) दो भुजाएँ और उनके बीच का कोण

(iii) दो कोण और उनके बीच की भुजा

(iv) समकोण त्रिभुज के लिए, कर्ण और एक पाद (leg)

अब, हम इन अवधारणाओं का त्रिभुजों की रचनाओं में प्रयोग करेंगे।

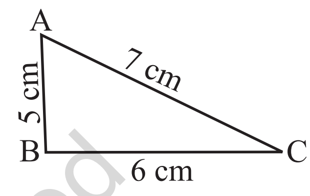
10.4 एक त्रिभुज की रचना जब उसकी तीनों भुजाओं की लंबाइयाँ दी हों (SSS कसौटी)

इस अनुच्छेद में, हम त्रिभुजों की रचना करेंगे जब उसकी तीनों भुजाएँ ज्ञात हों। पहले हम इसकी एक रफ़ (rough) आकृति खींचते हैं, जिससे उसकी भुजाओं का कुछ अनुमान लग जाए और फिर तीनों भुजाओं में से एक भुजा लेकर रचना प्रारंभ करते हैं। निम्नलिखित उदाहरण को समझिए :

उदाहरण 1 एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जबकि AB = 5 cm, BC = 6 cm और AC = 7 cm दिया है।

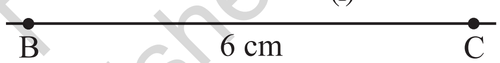
हल

चरण 1 पहले हम दी हुई मापों की एक रफ आकृति खींचते हैं (इससे हमें आगे बढ़ने में सहायता मिलेगी) [आकृति 10.3(i)]।



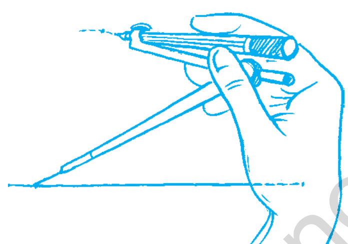
(i)

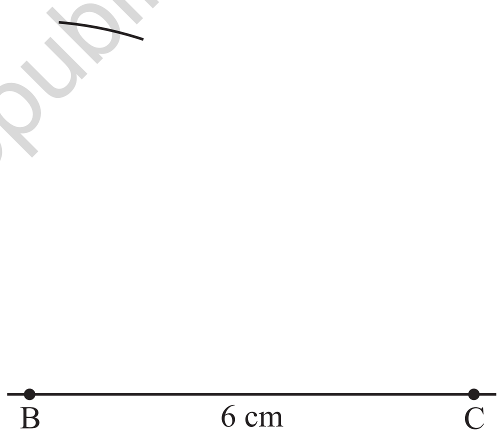
चरण 2 6 cm लंबाई का रेखा खंड BC खींचिए [आकृति 10.3(ii)]।



(ii)

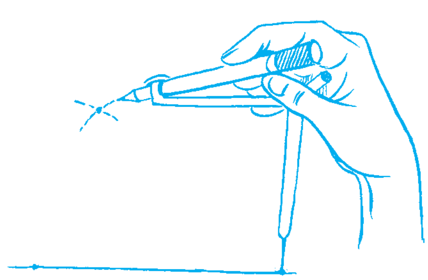
चरण 3 बिंदु B से, बिंदु A, 5 cm की दूरी पर है। अतः, B को केंद्र मान कर और 5 cm त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए। (अब A इस चाप पर कहीं स्थित एक बिंदु है। यह ज्ञात करना हमारा काम है कि A बिल्कुल ठीक इस चाप पर कहाँ है) [आकृति 10.3(iii)]।

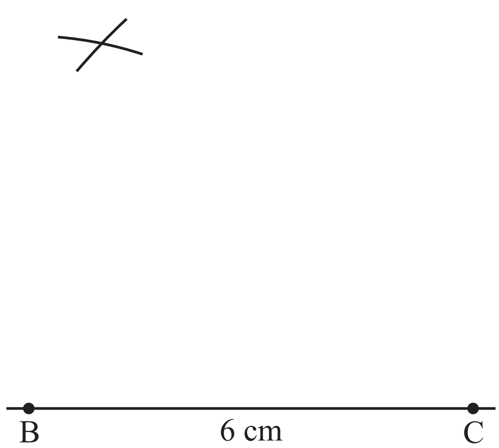




(iii)

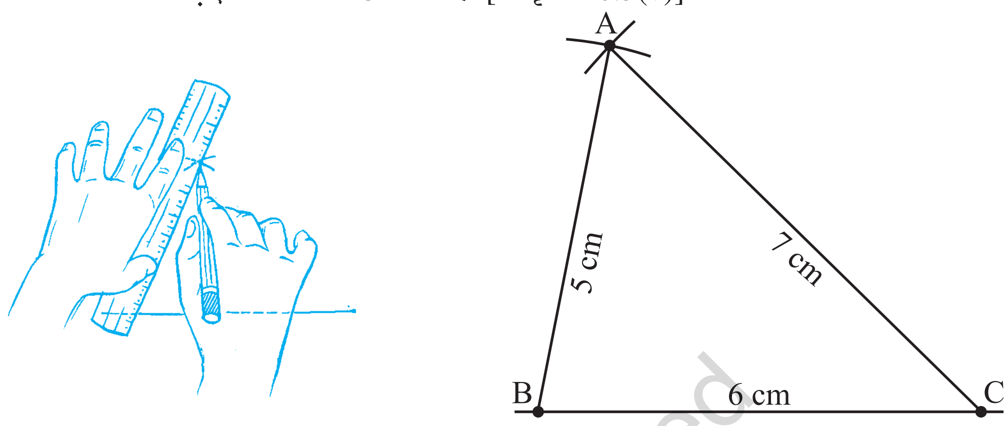
चरण 4 C से, बिंदु A, 7 cm की दूरी पर है। अतः, C को केंद्र मान कर और 7 cm त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए। (A इस चाप पर कहीं स्थित होगा। हमें इसका पता लगाना है) [आकृति 10.3(iv)]।





(iv)

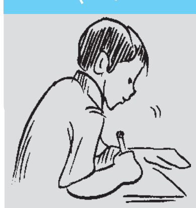
चरण 5 A को खींचे गए इन दोनों चापों पर स्थित होना चाहिए। अत:, यह इन दोनों चापों का प्रतिच्छेद बिंदु है। इन चापों के प्रतिच्छेद बिंदु को A से अंकित कीजिए। AB और AC को जोड़िए। अब ΔABC तैयार है [आकृति 10.3(v)]।



(v)

आकृति 10.3 (i) - (v)

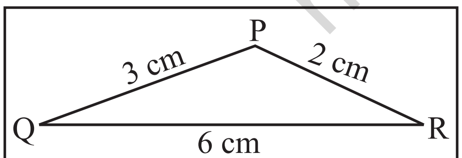
इन्हें कीजिए



आइए अब एक अन्य त्रिभुज DEF की रचना करें, जिसमें DE = 5 cm, EF = 6 cm और DF = 7 cm है। ΔDEF को काट कर उसे ΔABC पर रखिए।

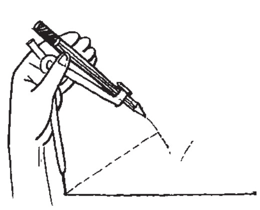
हम देखते हैं कि ΔDEF, ΔABC को पूर्णतया ढक लेता है, अर्थात् उसके साथ संपाती हो जाता है। (ध्यान दीजिए कि इन दोनों त्रिभुजों की रचना दी हुई तीन भुजाओं से की गई है।) इस प्रकार, यदि एक त्रिभुज की तीन भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की संगत तीन भुजाओं के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। यह SSS सर्वांगसमता नियम (या कसौटी) कहलाता है, जिसे आप पिछले अध्याय में पढ़ चुके हैं।

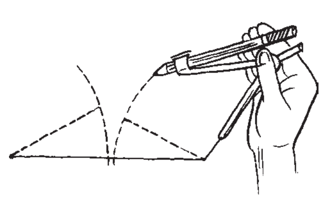
सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए



आकृति 10.4 : सोचिए, क्या यह सही है। सही है?

एक विद्यार्थी ने एक ऐसा त्रिभुज खींचने का प्रयत्न किया, जिसकी रफ़ आकृति यहाँ दी गई है। पहले उसने QR खींचा। फिर उसने Q को केंद्र मान कर और 3 cm त्रिज्या लेकर एक चाप खींची तथा R को केंद्र मान कर और 2 cm त्रिज्या लेकर एक अन्य चाप खींची। परंतु वह P नहीं प्राप्त कर सका। इसका क्या कारण है? इस प्रश्न से संबंधित त्रिभुज के किस गुण को आप जानते हैं? क्या ऐसे त्रिभुज का अस्तित्व है? (त्रिभुजों के इस गुण को याद कीजिए: किसी त्रिभुज की दो भुजाओं का योग सदैव तीसरी भुजा से बड़ा होता है)।





प्रश्नावली 10.2

1. ΔXYZ की रचना कीजिए, जिसमें $XY = 4.5$ cm, $YZ = 5$ cm और $ZX = 6$ cm है।
2. 5.5 cm भुजा वाले एक समबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए।
3. ΔPQR की रचना कीजिए, जिसमें $PQ = 4$ cm, $QR = 3.5$ cm और $PR = 4$ cm है। यह किस प्रकार का त्रिभुज है?
4. ABC की रचना कीजिए, ताकि $AB = 2.5$ cm, $BC = 6$ cm और $AC = 6.5$ cm हो। $\angle B$ को मापिए।

10.5 एक त्रिभुज की रचना जब दो भुजाओं की लंबाइयाँ और उनके बीच के कोण की माप दी हो (SAS कसौटी)

यहाँ, हमें दो भुजाएँ और उनके बीच का कोण दिया हुआ है। पहले हम एक रफ़ आकृति खींचते हैं और फिर दिए हुए रेखाखंडों में से एक रेखाखंड खींचते हैं। इसके बाद अन्य चरणों का अनुसरण किया जाता है। उदाहरण 2 देखिए।

उदाहरण 2 एक त्रिभुज PQR की रचना कीजिए, जब दिया है कि $PQ = 3$ cm, $QR = 5.5$ cm और $\angle PQR = 60°$ है।

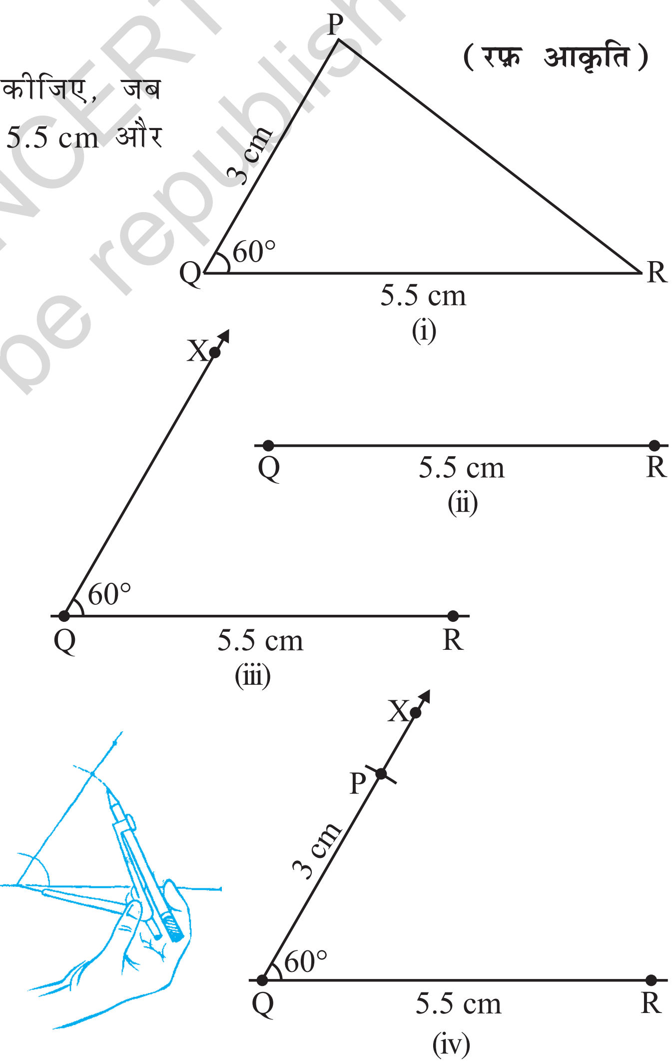
हल

चरण 1 पहले हम दी हुई मापों के अनुसार, एक रफ़ आकृति खींचते हैं। (इससे हमें रचना की प्रक्रिया निर्धारित करने में सहायता मिलेगी) [आकृति 10.5(i)]।

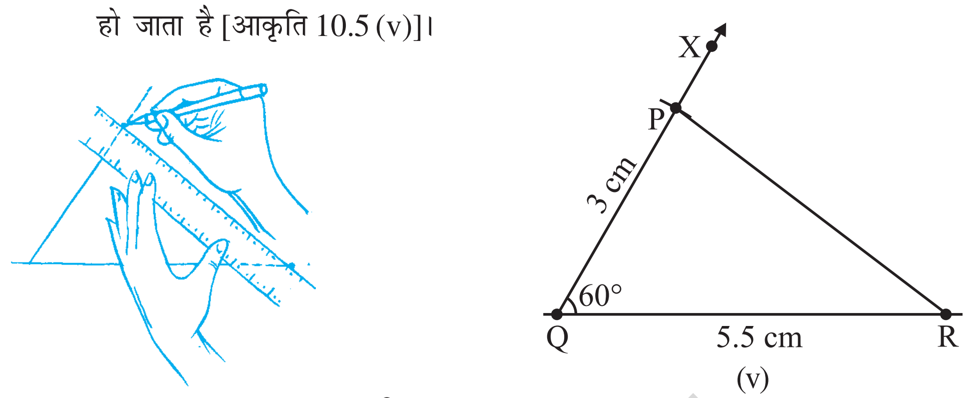
चरण 2 5.5 cm लंबाई का एक रेखाखंड QR खींचिए [आकृति 10.5(ii)]।

चरण 3 Q पर किरण QX खींचिए, जो QR के साथ $60°$ का कोण बनाए। (बिंदु P कोण की इसी किरण पर कहीं स्थित होगा) [आकृति 10.5(iii)]।

चरण 4 (P को निश्चित करने के लिए, दूरी QP दी हुई है।) Q को केंद्र मान कर 3 cm त्रिज्या वाली एक चाप खींचिए। यह QX को बिंदु P पर काटता है। [आकृति 10.5(iv)]।

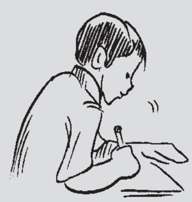


चरण 5 PR को जोड़िए। इस प्रकार, ΔPQR प्राप्त हो जाता है [आकृति 10.5 (v)]।



आकृति 10.5 (i)-(v)

इन्हें कीजिए



आईए अब एक अन्य त्रिभुज ABC की रचना करें ताकि $AB = 3$ cm, $BC = 6.5$ cm और $\angle ABC = 60°$ हो। इस ΔABC को काट कर ΔPQR पर रखिए। हम क्या देखते हैं? हम देखते हैं कि ΔABC पूर्णतया ΔPQR के साथ संपाती हो जाता है, अर्थात् उसे ढक लेता है। इस प्रकार, यदि एक त्रिभुज की दो भुजाएँ और उनके मध्य स्थित (बीच का) कोण एक अन्य त्रिभुज की संगत भुजाओं और उनके मध्य स्थित कोण के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। यह SAS सर्वांगसमता नियम या कसौटी है, जिसे हम पिछले अध्याय में पढ़ चुके हैं। (ध्यान दीजिए कि दोनों त्रिभुजों की रचना दी हुई दो भुजाओं और उनके मध्य स्थित (बीच के) कोण द्वारा की गई है।)

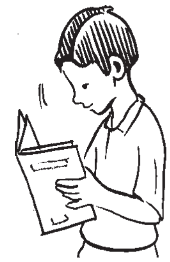
सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

उपरोक्त रचना में, दो भुजाओं की लंबाइयाँ और एक कोण का माप दिया हुआ था। अब, निम्नलिखित समस्या का अध्ययन कीजिए :

एक ΔABC में, यदि $AB = 3$ cm, $AC = 5$ cm और $\angle C = 30°$ है, तो क्या हम इस त्रिभुज की रचना कर सकते हैं? हम $AC = 5$ cm खींच कर, $\angle C = 30°$ खींच सकते हैं। $\angle C$ की एक भुजा CA है। बिंदु B को इस कोण C की दूसरी भुजा पर स्थित होना चाहिए। परंतु, ध्यान दीजिए कि बिंदु B को एक अद्वितीय रूप से निर्धारित नहीं किया जा सकता है। अत:, त्रिभुज ABC की रचना करने के लिए, दिए हुए आँकड़े पर्याप्त नहीं हैं।

अब ΔABC की रचना करने का प्रयत्न कीजिए, जब $AB = 3$ cm, $AC = 5$ cm और $\angle B = 30°$ है। हम क्या प्रेक्षित करते हैं? पुन:, ΔABC की रचना अद्वितीय रूप से नहीं की जा सकती है। इस प्रकार, हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि एक अद्वितीय त्रिभुज की रचना तभी की जा सकती है जब उसकी दो भुजाओं की लंबाइयाँ और उनके मध्य स्थित (बीच के) कोण का माप दिया हुआ हो।

प्रश्नावली 10.3



1. ΔDEF की रचना कीजिए, ताकि $DE = 5$ cm, $DF = 3$ cm और $m\angle EDF = 90°$ हो।
2. एक समद्विबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी प्रत्येक समान भुजा की लंबाई 6.5 cm हो और उनके बीच का कोण 110° का हो।
3. $BC = 7.5$ cm और $AC = 5$ cm और $m\angle C = 60°$ वाले ΔABC की रचना कीजिए।

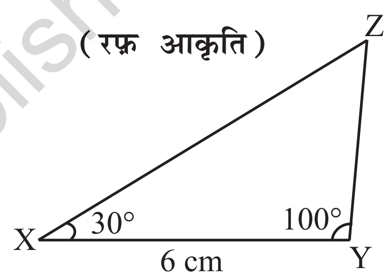
10.6 एक त्रिभुज की रचना जब उसके दो कोणों के माप और इन कोणों के बीच की भुजा की लंबाई दी हो (ASA कसौटी)

जैसा पहले किया था, एक रफ़ आकृति खींचिए। अब, दिया हुआ रेखाखंड खींचिए। दोनों अंत बिंदुओं पर कोण बनाइए। उदाहरण 3 देखिए।

उदाहरण 3 ΔXYZ की रचना कीजिए, यदि, $XY = 6$ cm, $m\angle ZXY = 30°$ और $m\angle XYZ = 100°$ है।

हल

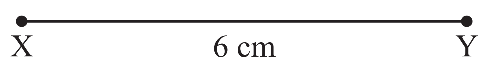
(रफ़ आकृति)



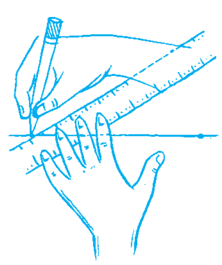
(i)

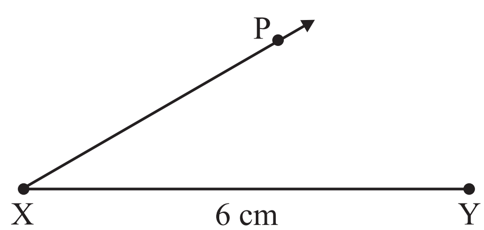
चरण 1 वास्तविक रचना से पहले, हम इस पर अंकित मापों के अनुसार एक रफ़ आकृति खींचते हैं। (इससे कुछ अनुमान लग जाता है कि कैसे रचना की जाए) [आकृति 10.6(i)]।

चरण 2 6 cm लंबाई का रेखाखंड XY खींचिए [आकृति 10.6(ii)]।



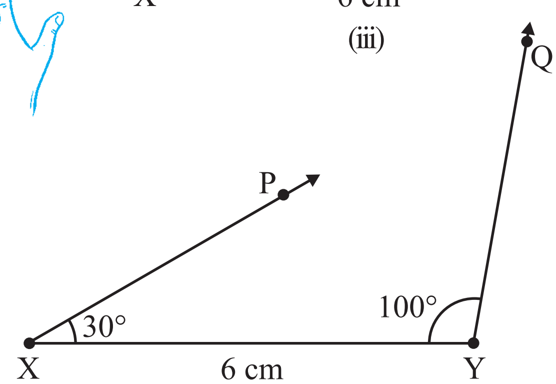
(ii)





(iii)

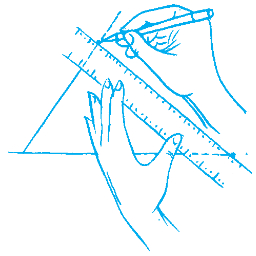
चरण 3 X पर एक किरण XP खींचिए जो XY से 30° का कोण बनाए। दिए हुए प्रतिबंध के अनुसार बिंदु Z किरण XP पर कहीं स्थित होना चाहिए [आकृति 10.6(iii)]।

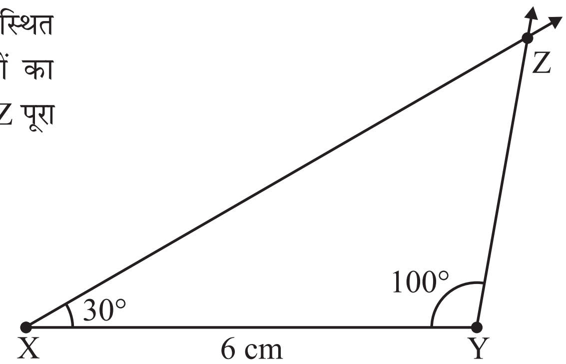


(iv)

चरण 4 Y पर एक किरण YQ खींचिए, जो YX से 100° का कोण बनाए। दिए हुए प्रतिबंध के अनुसार Z किरण YQ पर भी अवश्य स्थित होना चाहिए [आकृति 10.6(iv)]।

चरण 5 Z को दोनों किरणों XP और YQ पर स्थित होना चाहिए। अत:, इन दोनों किरणों का प्रतिच्छेद बिंदु ही Z है। अब ΔXYZ पूरा बन जाता है [आकृति 10.6(v)]।





(v)

आकृति 10.6 (i) - (v)

इन्हें कीजिए

अब एक अन्य त्रिभुज LMN खींचिए, जिसमें $m\angle NLM = 30°$, LM = 6 cm और $m\angle NML = 100°$ हो। इस त्रिभुज LMN को काटकर त्रिभुज XYZ पर रखिए। हम देखते हैं कि त्रिभुज LMN त्रिभुज XYZ के साथ पूर्णतया संपाती हो जाता है। इस प्रकार, यदि एक त्रिभुज के दो कोण और उनके मध्य स्थित भुजा दूसरे त्रिभुज के संगत दो कोणों और उनके मध्य स्थित भुजा के बराबर हो, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। यह ASA सर्वांगसमता नियम या कसौटी है, जिसे आप पिछले अध्याय में पढ़ चुके हैं। (ध्यान दीजिए कि यहाँ दो त्रिभुजों की रचना की गई है, जब दो कोण और उनके मध्य स्थित भुजा दी गई है।)

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

उपरोक्त उदाहरण में, एक भुजा की लंबाई और दो कोणों के माप दिए गए थे। अब निम्नलिखित समस्या का अध्ययन कीजिए :

ΔABC, में, यदि AC = 7 cm, $m\angle A = 60°$ और $m\angle B = 50°$ है, तो क्या आप त्रिभुज की रचना कर सकते हैं? (त्रिभुज का कोण योग गुण आपकी सहायता कर सकता है!)

प्रश्नावली 10.4

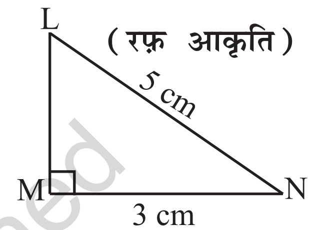
1. ΔABC, की रचना कीजिए, जब $m\angle A = 60°$, $m\angle B = 30°$ और AB = 5.8 cm दिया है।
2. ΔPQR की रचना कीजिए, यदि PQ = 5 cm, $m\angle PQR = 105°$ और $m\angle QRP = 40°$ दिया है।

   (संकेत : त्रिभुज के कोण योग गुण को याद कीजिए)।
3. जाँच कीजिए कि आप ΔDEF की रचना कर सकते हैं या नहीं, यदि EF = 7.2 cm, $m\angle E = 110°$ और $m\angle F = 80°$ है। अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

10.7 एक समकोण त्रिभुज की रचना, जब उसके एक पाद (भुजा) और कर्ण की लंबाईयाँ दी हुई हों। (RHS कसौटी)

यहाँ, रफ़ आकृति बनाना सरल है। अब दी हुई भुजा के अनुसार, एक रेखाखंड खींचिए। इसके एक अंत: बिंदु पर एक समकोण बनाइए। त्रिभुज की दी हुई लंबाइयों की भुजा और कर्ण खींचने के लिए परकार का प्रयोग कीजिए। त्रिभुज को पूरा कीजिए। निम्नलिखित उदाहरण पर विचार कीजिए :

उदाहरण 4 ΔLMN की रचना कीजिए, जिसका $\angle LMN$ समकोण है तथा दिया है कि $LN = 5$ cm और $MN = 3$ cm ।

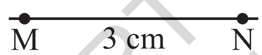


(i)

हल

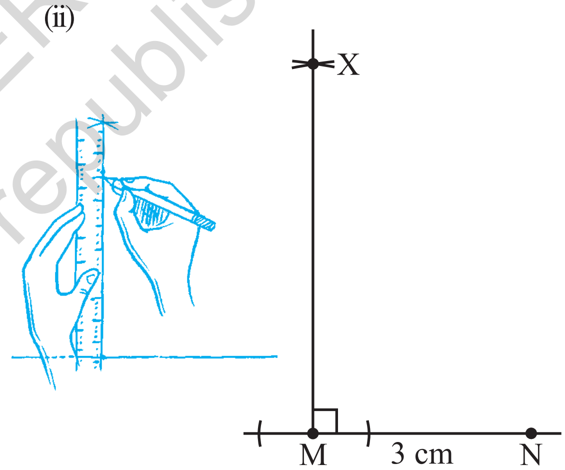
चरण 1 एक रफ़ आकृति खींचिए और उस पर दिए हुए माप को अंकित कीजिए। समकोण अंकित करना याद रखिए (आकृति 10.7(i))।

चरण 2 3 cm लंबाई का रेखाखंड MN खींचिए। [आकृति 10.7(ii)]



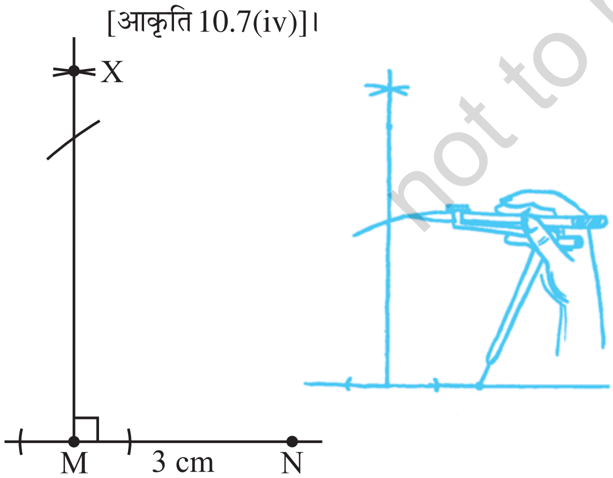
(ii)

चरण 3 M पर $MX \perp MN$ खींचिए। (L इसी लंब पर कहीं स्थित होना चाहिए) [आकृति 10.7(iii)]।



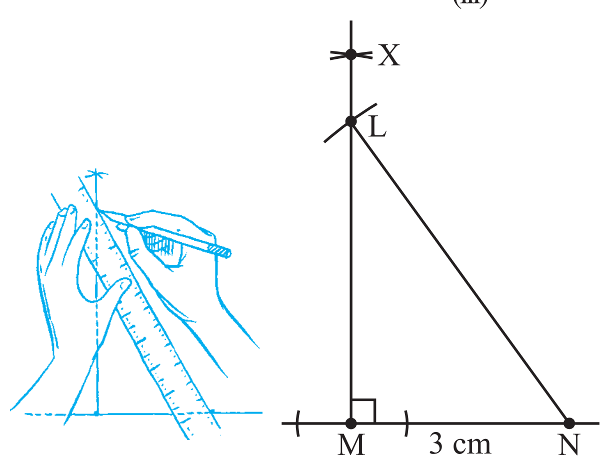
(iii)

चरण 4 N को केंद्र मानकर, 5 cm त्रिज्या का एक चाप खींचिए।(L इसी चाप पर स्थित होना चाहिए, क्योंकि यह N से 5 cm की दूरी पर है) [आकृति 10.7(iv)]।



(iv)

चरण 5 L को लंब रेखा MX पर और केंद्र N वाले चाप पर स्थित होना चाहिए। अत:, L इन दोनों का प्रतिच्छेद बिंदु होगा। LN को जोड़िए। अब ΔLMN प्राप्त हो जाता है। [आकृति 10.7(v)]।



आकृति 10.7 (i)-(v) (v)

प्रश्नावली 10.5

1. समकोण ΔPQR की रचना कीजिए, जहाँ $m\angle Q = 90°$, $QR = 8$ cm और $PR = 10$ cm है।
2. एक समकोण त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसका कर्ण 6 cm लंबा है और एक पाद 4 cm लंबा है।
3. एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जहाँ $m\angle ACB = 90°$ है और $AC = 6$ cm है।

विविध प्रश्न

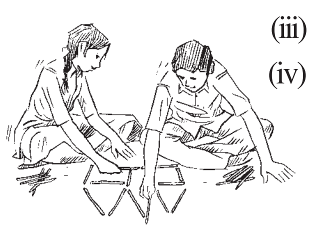
नीचे कुछ त्रिभुजों की भुजाओं और कोणों के माप दिए गए हैं। इनमें से उनकी पहचान कीजिए, जिनकी रचना नहीं की जा सकती तथा यह भी बताइए कि आप इनकी रचना क्यों नहीं कर सकते। शेष त्रिभुजों की रचना कीजिए।

	त्रिभुज	दिए हुए माप		
1.	ΔABC	$m\angle A = 85°$,	$m\angle B = 115°$,	$AB = 5$ cm
2.	ΔPQR	$m\angle Q = 30°$,	$m\angle R = 60°$,	$QR = 4.7$ cm
3.	ΔABC	$m\angle A = 70°$,	$m\angle B = 50°$,	$AC = 3$ cm
4.	ΔLMN	$m\angle L = 60°$,	$m\angle N = 120°$]	$LM = 5$ cm
5.	ΔABC	$BC = 2$ cm,	$AB = 4$ cm,	$AC = 2$ cm
6.	ΔPQR	$PQ = 3.5$ cm,	$QR = 4$ cm,	$PR = 3.5$ cm
7.	ΔXYZ	$XY = 3$ cm,	$YZ = 4$ cm,	$XZ = 5$ cm
8.	ΔDEF	$DE = 4.5$ cm,	$EF = 5.5$ cm,	$DF = 4$ cm

हमने क्या चर्चा की?

इस अध्याय में हमने पैमाना (रूलर) और परकार की कुछ रचनाओं की विधियों का अध्ययन किया है।

1. एक दी हुई रेखा और ऐसे बिंदु के लिए जो इस रेखा पर स्थित नहीं है, हमने तिर्यक छेदी रेखा आकृति में, रेखा के समांतर एक रेखा खींचने के लिए समान एकांतर कोणों की अवधारणा का उपयोग किया है।
   इस रचना के लिए हम समान संगत कोणों की अवधारणा का उपयोग भी कर सकते हैं।
2. त्रिभुजों की सर्वांगसमता की संकल्पना का अप्रत्यक्ष रूप से उपयोग करते हुए हमने त्रिभुज की रचना की विधि का अध्ययन किया है।
   इस अध्याय में निम्नलिखित उदाहरणों की चर्चा की गई है।
   (i) SSS: त्रिभुज की तीन भुजाओं की लंबाई दी हुई है।
   (ii) SAS: किन्हीं दो भुजाओं की लंबाई और इन भुजाओं के मध्य स्थित कोण का माप दिया हुआ है।
   (iii) ASA: दो कोणों के माप और इनके मध्य स्थित भुजा की लंबाई दी हुई है।
   (iv) RHS: समकोण त्रिभुज के कर्ण एवं एक पाद की लंबाई दी हुई है।



अध्याय 11

परिमाप और क्षेत्रफल

11.1 भूमिका

आप तल में बनी आकृतियों का परिमाप तथा वर्ग और आयत के क्षेत्रफलों के बारे में कक्षा VI में पढ़ चुके हैं। परिमाप एक बंद आकृति के चारों ओर की दूरी है जबकि क्षेत्रफल एक बंद आकृति द्वारा घेरे गए तल के भाग या क्षेत्र को दर्शाता है। इस कक्षा में आप कुछ और तल की आकृतियों के परिमाप और क्षेत्रफल के बारे में सीखेंगे।

11.2 वर्ग और आयत

आयुष और दीक्षा दोनों चित्र बनाते हैं। आयुष ने एक चित्र 60 cm लंबाई तथा 20 cm चौड़ाई वाली एक आयताकार शीट पर बनाया जबकि दीक्षा ने एक चित्र 40 cm लंबाई तथा 35 cm चौड़ाई वाली एक आयताकार शीट पर बनाया। इन दोनों चित्रों को अलग-अलग फ्रेम तथा लेमिनेट कराना है।

यदि फ्रेम कराने का खर्च ₹ 3.00 प्रति cm हो तो कौन-से चित्र को फ्रेम कराने के लिए अधिक रुपये खर्च करने पड़ेंगे?

यदि लेमिनेशन पर खर्च की दर ₹ 2.00 प्रति cm^2 हो तो किसके चित्र के लेमिनेशन पर अधिक खर्च करना पड़ेगा?

फ्रेम पर कुल व्यय ज्ञात करने के लिए हमें उनका परिमाप ज्ञात करके, फ्रेम कराने की दर से गुणा करने की आवश्यकता होगी। इसी प्रकार, लेमिनेशन पर कुल व्यय ज्ञात करने के लिए हमें उसका क्षेत्रफल ज्ञात करके उसे लेमिनेशन कराने की दर से गुणा करने की आवश्यकता होगी।

इन्हें कीजिए

नीचे दिए गए प्रश्नों के उत्तर देने के लिए आपको क्षेत्रफल या परिमाप में से किसको ज्ञात करने की आवश्यकता होगी।

1. एक श्यामपट कितनी जगह घेरता है?

2. एक आयताकार फूलों की क्यारी के चारों ओर बाड़ लगाने के लिए आवश्यक तार की लंबाई क्या है?

3. एक तिकोने पार्क के चारों ओर दो बार चक्कर लगाने पर आप कितनी दूरी तय करेंगे?
4. एक आयताकार स्वीमिंग पूल को ढकने के लिए आपको कितनी प्लास्टिक शीट की आवश्यकता होगी?

क्या आप जानते हैं,

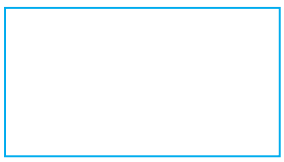
समबहुभुज का परिमाप = भुजाओं की संख्या $\times$ एक भुजा की लंबाई

वर्ग का परिमाप = $4 \times$ भुजा

आयत का परिमाप = $2 \times (l + b)$

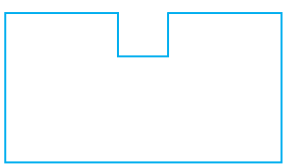
आयत का क्षेत्रफल = $l \times b$

वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा $\times$ भुजा



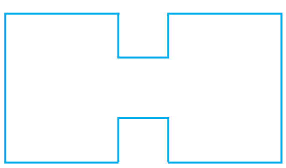
आकृति 11.1

तान्या को एक कोलाज़ (collage) को पूरा करने के लिए एक 4 cm भुजा वाले वर्ग की आवश्यकता थी। उसके पास 28 cm लंबाई तथा 21 cm चौड़ाई वाली एक आयताकार शीट थी (आकृति 11.1)। उसने इस आयताकार शीट में से एक 4 cm भुजा वाले एक वर्ग को काटा। उसकी सहेली ने शीट के शेष भाग को देखा (आकृति 11.2) और तान्या से पूछा, 'क्या शीट का परिमाप अब बढ़ गया है या कम हो गया है'?



आकृति 11.2

क्या भुजा AD की कुल लंबाई, वर्ग काटने के उपरांत बढ़ गई है?
क्या क्षेत्रफल बढ़ गया है या कम हो गया है?
तान्या सम्मुख भुजा में से एक और वर्ग काटती है (आकृति 11.3)।
क्या शीट के शेष भाग का परिमाप पहले से और अधिक हो जाएगा?
क्या क्षेत्रफल पहले से और अधिक बढ़ेगा या कम होगा?
अत:, यहाँ से हम क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?



आकृति 11.3

इससे यह स्पष्ट है कि परिमाप के बढ़ाए जाने पर क्षेत्रफल का बढ़ना आवश्यक नहीं है।

इन्हें कीजिए

1. ऐसी बहुत सारी आकृतियों और काटी गई आकृतियों पर प्रयोग कीजिए।
   आप इनका उपयोग इन आकृतियों को वर्गांकित शीटों पर बनाकर क्षेत्रफल और परिमाप ज्ञात करने के लिए कर सकेंगे। आप यह जान चुके हैं कि परिमाप में बढ़त का यह अर्थ नहीं है कि उसका क्षेत्रफल भी बढ़ेगा।
2. दो ऐसे उदाहरण दीजिए जहाँ परिमाप के बढ़ने पर उसका क्षेत्रफल भी बढ़ जाए।
3. ऐसे दो उदाहरण दीजिए जहाँ परिमाप के बढ़ने पर उसके क्षेत्रफल में बढ़ोतरी न हो।

उदाहरण 1 $10\text{ m} \times 10\text{ m}$ माप वाली एक दीवार में $3\text{ m} \times 2\text{ m}$ माप वाले एक दरवाज़े का फ्रेम (चौखट) लगाया जाना है। यदि 1 m^2 दीवार पर पेंट कराने की मज़दूरी ₹ 2.50 हो तो पूरी दीवार पर पेंट कराने का कुल मज़दूरी खर्च ज्ञात कीजिए।

हल दीवार पर पेंट, दरवाज़े के क्षेत्रफल को छोड़कर होगा।

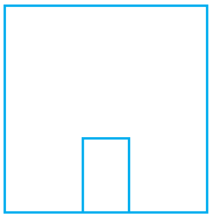
दरवाज़े का क्षेत्रफल $= l \times b$

$= 3\text{ m} \times 2\text{ m} = 6\text{ m}^2$

दरवाज़े सहित, दीवार का क्षेत्रफल = भुजा × भुजा $= 10\text{ m} \times 10\text{ m} = 100\text{ m}^2$

दरवाज़े को छोड़कर, दीवार का क्षेत्रफल $= (100 - 6)\text{ m}^2 = 94\text{ m}^2$

दीवार पर पेंट कराने की कुल मज़दूरी $= 2.50 \times 94 = 235$ रु



आकृति 11. 4

उदाहरण 2 एक आयताकार शीट का क्षेत्रफल 500 cm^2 है। यदि शीट की लंबाई 25 cm हो तो इसकी चौड़ाई क्या होगी? आयताकार शीट का परिमाप भी ज्ञात कीजिए।

हल आयताकार शीट का क्षेत्रफल $= 500\text{ cm}^2$

लंबाई $(l) = 25\text{ cm}$

आयत का क्षेत्रफल $= l \times b$ (जहाँ b = शीट की चौड़ाई)

इसलिए, चौड़ाई $b = \dfrac{\text{क्षेत्रफल}}{l} = \dfrac{500}{25} = 20\text{ cm}$

शीट का परिमाप $= 2 \times (l + b) = 2 \times (25 + 20)\text{ cm} = 90\text{ cm}$

इस प्रकार, आयताकार शीट की चौड़ाई 20 cm तथा इसका परिमाप 90 cm है।

उदाहरण 3 अनु अपने घर के सामने वाले बगीचे के तीनों ओर बाड़ लगाना चाहती है (आकृति 11.5)। इनमें से एक बाजू की लंबाई 20 m तथा बाकी प्रत्येक बाजू की लंबाई 12 m है। ₹ 150 प्रति मीटर की दर से बाड़ लगाने पर व्यय ज्ञात कीजिए।

आकृति 11.5

हल बाड़ की आवश्यक लंबाई बगीचे का वह परिमाप है जिसमें एक भुजा सम्मिलित नहीं है। यह 20 m + 12 m + 12 m यानि 44 m के बराबर है।

बाड़ लगाने पर व्यय = ₹ 150×44 = ₹ 6600

उदाहरण 4 एक तार 10 cm भुजा वाले वर्ग के आकार की है। यदि तार को दुबारा मोड़ कर एक 12 cm लंबाई वाला आयत बनाया जाता है, तो इसकी चौड़ाई ज्ञात कीजिए। किसका क्षेत्रफल अधिक होगा, वर्ग का या आयत का?

हल वर्ग की भुजा = 10 cm

तार की लंबाई = वर्ग का परिमाप = 4 × भुजा = 4 × 10 cm

= 40 cm

आयत की लंबाई $l = 12$ cm, b को आयत की चौड़ाई मान लीजिए

आयत का परिमाप = तार की लंबाई = 40 cm

आयत का परिमाप $= 2\,(l + b)$

इस प्रकार $40 = 2\,(12 + b)$

या $\frac{40}{2} = 12 + b$

इसलिए $b = 20 - 12 = 8$ cm

आयत की चौड़ाई 8 cm है।

वर्ग का क्षेत्रफल = $(\text{भुजा})^2$

$= 10\text{ cm} \times 10\text{ cm} = 100\text{ cm}^2$

आयत का क्षेत्रफल $= l \times b$

$= 12\text{ cm} \times 8\text{ cm} = 96\text{ cm}^2$

अत:, वर्ग अधिक क्षेत्रफल घेरता है यद्यपि इसका परिमाप आयत के परिमाप के बराबर है।

उदाहरण 5 एक वर्ग और एक आयत का क्षेत्रफल समान है। यदि वर्ग की भुजा 40 cm हो और आयत की चौड़ाई 25 cm हो तो आयत की लंबाई ज्ञात कीजिए। आयत का परिमाप भी ज्ञात कीजिए।

हल वर्ग का क्षेत्रफल = $(\text{भुजा})^2$

$= 40\text{ cm} \times 40\text{ cm} = 1600\text{ cm}^2$

यह दिया है कि

आयत का क्षेत्रफल = वर्ग का क्षेत्रफल

आयत का क्षेत्रफल = 1600 cm^2

आयत की चौड़ाई = 25 cm

आयत का क्षेत्रफल $= l \times b$

या $1600 = l \times 25$

या $\frac{1600}{25} = l$

या $l = 64$ cm

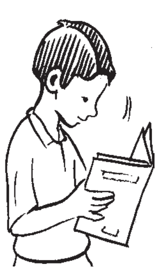
अत:, आयत की लंबाई 64 cm है।

आयत का परिमाप $= 2\,(l + b) = 2\,(64 + 25)$ cm

$= 2 \times 89\text{ cm} = 178\text{ cm}$

इस प्रकार, आयत का परिमाप 178 cm है यद्यपि इसका क्षेत्रफल वर्ग के क्षेत्रफल के बराबर है।

प्रश्नावली 11. 1



1. एक आयताकार भूखंड की लंबाई और चौड़ाई क्रमश: 500 m तथा 300 m हैं। ज्ञात कीजिए :

(i) भूखंड का क्षेत्रफल (ii) भूखंड का मूल्य, यदि 1 m^2 का मूल्य ₹ 10,000 है।

2. एक वर्गाकार पार्क का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसका परिमाप 320 m है।

3. एक आयताकार भूखंड की चौड़ाई ज्ञात कीजिए यदि इसका क्षेत्रफल 440 m^2 और लंबाई 22 m हो। इसका परिमाप भी ज्ञात कीजिए।

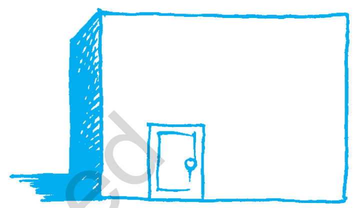
4. एक आयताकार शीट का परिमाप 100 cm है। यदि लंबाई 35 cm हो तो इसकी चौड़ाई ज्ञात कीजिए। क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए।

5. एक वर्गाकार पार्क का क्षेत्रफल एक आयताकार पार्क के बराबर है। यदि वर्गाकार पार्क की एक भुजा 60 m हो और आयताकार पार्क की लंबाई 90 m हो तो आयताकार पार्क की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

6. एक तार आयत के आकार का है। इसकी लंबाई 40 cm और चौड़ाई 22 cm है। यदि उसी तार को दुबारा मोड़कर एक वर्ग बनाया जाता है तो प्रत्येक भुजा की माप क्या होगी? यह भी ज्ञात कीजिए की किस आकार का क्षेत्रफल अधिक होगा?

7. एक आयत का परिमाप 130 cm है। यदि आयत की चौड़ाई 30 cm हो तो आयत की लंबाई ज्ञात कीजिए। आयत का क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए।

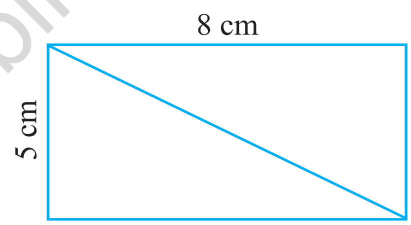
8. 2 m लंबाई और 1 m चौड़ाई वाले दरवाज़े को एक दीवार में लगाया जाता है। दीवार की लंबाई 4.5 m तथा चौड़ाई 3.6 m है (आकृति 11.6). ₹ 20 प्रति m^2 की दर से दीवार पर सफ़ेदी (white wash) कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।



आकृति 11.6

11.2.1 आयत के भाग के रूप में त्रिभुज

8 सेमी और 5 सेमी भुजाओं वाला एक आयत लीजिए। आयत को विकर्ण के अनुदिश ऐसा काटिए जिससे दो त्रिभुज प्राप्त हों(आकृति 11.7)।



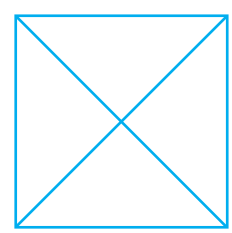
आकृति 11.7

एक त्रिभुज को दूसरे पर रखिए।
क्या ये दोनों पूर्णतया समान माप के हैं?
क्या आप कह सकते है कि दोनों त्रिभुजों का क्षेत्रफल बराबर है?
क्या ये त्रिभुज सवार्गसम भी हैं?
इनमें से प्रत्येक त्रिभुज का क्षेत्रफल कितना है?
आप देखेंगे कि दोनों त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का योगफल आयत के क्षेत्रफल के बराबर है।

$$\text{प्रत्येक त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2}(\text{आयत का क्षेत्रफल})$$

$$= \frac{1}{2}\times(l\times b) = \frac{1}{2}(8\times 5)$$

$$= \frac{40}{2} = 20\ \text{cm}^2$$



आकृति 11.8

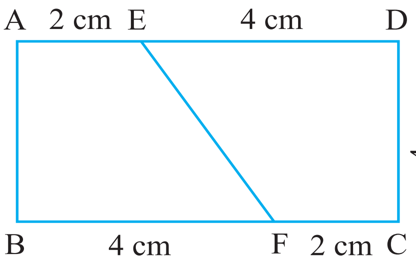
अब एक 5 cm भुजा वाला वर्ग लीजिए और इसे 4 त्रिभुजों में बाँटिए जैसा कि आकृति में दिखाया गया है (आकृति 11.8)।
क्या चारों त्रिभुजों का क्षेत्रफल बराबर है?
क्या वे एक दूसरे के सर्वांगसम हैं? (त्रिभुजों को एक-दूसरे पर रख कर जाँचिए)
प्रत्येक त्रिभुज का क्षेत्रफल क्या है?

$$\text{प्रत्येक त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{4}\ (\text{वर्ग का क्षेत्रफल})$$

$$= \frac{1}{4}\ (\text{भुजा})^2 = \frac{1}{4}\ (5)^2\ \text{cm}^2 = 6.25\ \text{cm}^2$$

11.2.2 आयतों के अन्य सर्वांगसम भागों के लिए व्यापीकरण

6 cm लंबाई और 4 cm चौड़ाई वाले एक आयत को दो भागों में बाँटा गया है जैसा आकृति में दिखाया है (आकृति 11.9)। आयत को दूसरे कागज़ पर ट्रेस कीजिए और आयत को EF के अनुदिश काटकर, दो भागों में बाँटिए।



आकृति 11.9

एक भाग को दूसरे पर रखिए और देखिए कि क्या वे एक दूसरे को पूर्णतया ढकते हैं। (आपको इन्हें घुमाना भी पड़ सकता है।)

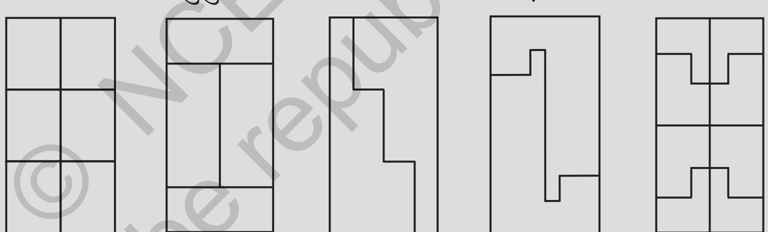
क्या ये सर्वांगसम हैं? दोनों भाग एक-दूसरे से सर्वांगसम हैं। इस प्रकार, एक भाग का क्षेत्रफल दूसरे भाग के क्षेत्रफल के बराबर है।

इसलिए, प्रत्येक सर्वांगसम भाग का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ (आयत का क्षेत्रफल)

$$= \frac{1}{2} \times (6 \times 4)\ \text{cm}^2 = 12\ \text{cm}^2$$

इन्हें कीजिए

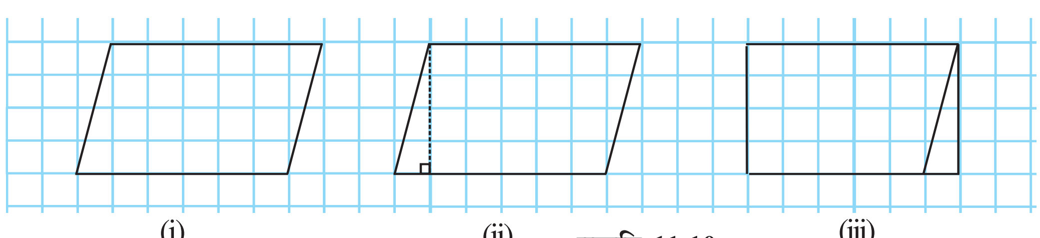
नीचे दिए गए प्रत्येक आयत जिसकी लंबाई 6 cm और चौड़ाई 4 cm है, सर्वांगसम बहुभुजों से मिलकर बने हैं। प्रत्येक बहुभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



11.3 समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल

हमें वर्ग और आयत के अतिरिक्त बहुत से दूसरे आकार देखने को मिलते हैं।
आप एक भूखंड का क्षेत्रफल कैसे ज्ञात करेंगे जिसका आकार समांतर चतुर्भुज जैसा है?
आइए समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल प्राप्त करने की एक विधि ज्ञात करें।
क्या एक समांतर चतुर्भुज को एक समान क्षेत्रफल वाले आयत में रूपांतरित किया जा सकता है?

ग्राफ़ पेपर पर एक समांतर चतुर्भुज बनाइए जैसाकि आकृति [11.10(i)] में दिखाया गया है। इस समांतर चतुर्भुज को काटिए। समांतर चतुर्भुज के एक शीर्ष से इसकी सम्मुख भुजा पर एक लंब खींचिए [आकृति 11.10(ii)]। इस त्रिभुज को काट लीजिए और इस त्रिभुज को समांतर चतुर्भुज की दूसरी भुजा के साथ रखिए [आकृति 11.10(iii)]।



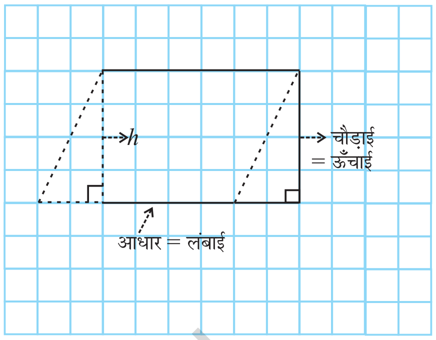
आकृति 11.10

आप कैसा आकार प्राप्त करते हैं? आप एक आयत प्राप्त करते हैं।

क्या समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल बनाए गए आयत के क्षेत्रफल के बराबर है?

हाँ, समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = बनाए गए आयत का क्षेत्रफल

आयत की लंबाई और चौड़ाई क्या है?



आकृति 11.11

हमने देखा कि बनाए गए आयत की लंबाई, समांतर चतुर्भुज के आधार की लंबाई के बराबर है और आयत की चौड़ाई, समांतर चतुर्भुज की ऊँचाई के बराबर है (आकृति 11.11)।

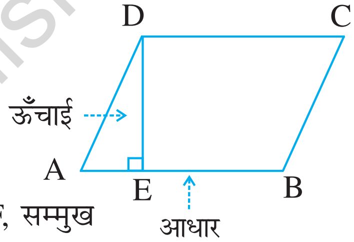
अब, समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आयत का क्षेत्रफल

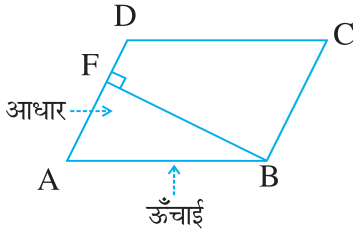
= लंबाई × चौड़ाई = $l \times b$

लेकिन आयत की लंबाई l तथा चौड़ाई b क्रमशः समांतर चतुर्भुज का आधार b और ऊँचाई h ही है।

इस प्रकार, समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई = $b \times h$

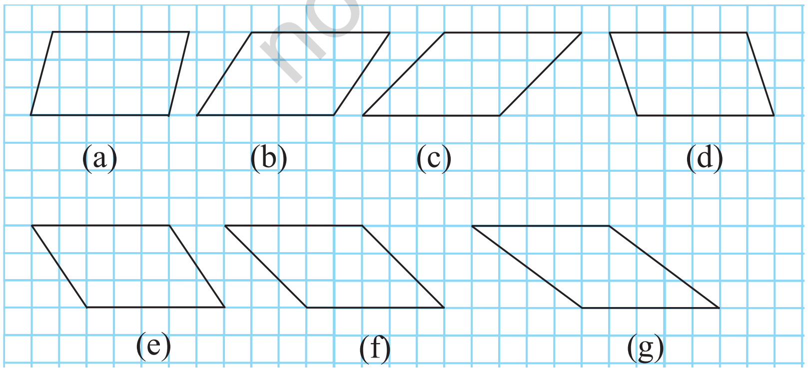
समांतर चतुर्भुज की किसी भी भुजा को **आधार** ले सकते हैं। इस भुजा पर, सम्मुख शीर्ष से डाला गया लंब, इसकी **ऊँचाई** कहलाती है। समांतर चतुर्भुज ABCD में DE, AB पर लंब है। यहाँ AB आधार तथा DE समांतर चतुर्भुज की ऊँचाई है।





इस समांतर चतुर्भुज ABCD में, BF, सम्मुख भुजा AD पर डाला गया लंब है। यहाँ AD **आधार** तथा BF **ऊँचाई** है।

निम्न समांतर चतुर्भुजों के बारे में सोचिए (आकृति 11.12)।



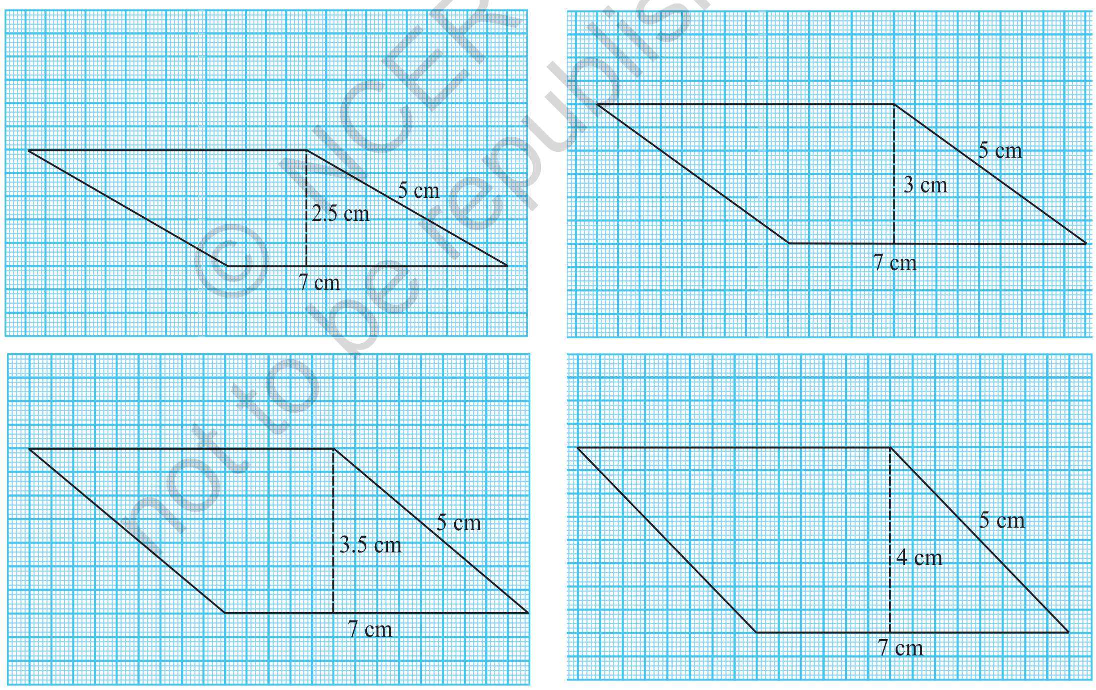
आकृति 11.12

आकृतियों द्वारा घेरे गए वर्गों की संख्या को गिन कर, समांतर चतुर्भुजों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए और भुजाओं को माप कर परिमाप भी ज्ञात कीजिए।

निम्न तालिका को पूरा कीजिए :

समांतर चतुर्भुज	आधार	ऊँचाई	क्षेत्रफल	परिमाप
(a)	5 इकाई	3 इकाई	15 वर्ग इकाई	
(b)				
(c)				
(d)				
(e)				
(f)				
(g)				

आप दखेंगे कि इन सभी समांतर चतुर्भुजों का क्षेत्रफल तो समान है परंतु परिमाप अलग-अलग हैं। अब, निम्न 7 cm तथा 5 cm भुजाओं वाले समांतर चतुर्भुजों को देखते हैं (आकृति 11.13)।



आकृति 11.13

प्रत्येक समांतर चतुर्भुज का परिमाप तथा क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। अपने परिणाम का विश्लेषण कीजिए।

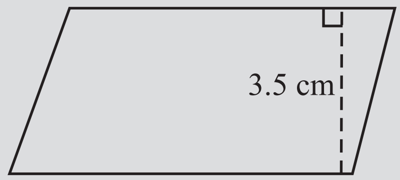
आप देखेंगे कि इन समांतर चतुर्भुजों का क्षेत्रफल अलग-अलग हैं लेकिन परिमाप समान हैं।

समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए आपको समांतर चतुर्भुज का आधार तथा संगत ऊँचाई को ज्ञात करने की आवश्यकता है।

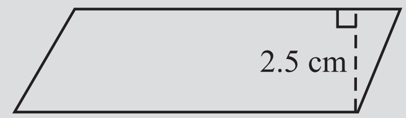
इन्हें कीजिए

निम्न समांतर चतुर्भुजों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए

(i)

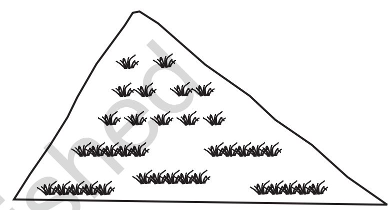


(ii)



(iii) समांतर चतुर्भुज ABCD में AB = 7.2 cm और C से AB पर लंब 4.5 cm है।

11.4 एक त्रिभुज का क्षेत्रफल



एक माली पूरे तिकोने पार्क पर घास लगाने का व्यय जानना चाहता है। इस स्थिति में हमें त्रिभुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करने की आवश्यकता है। आइए एक त्रिभुज के क्षेत्रफल को प्राप्त करने की विधि ज्ञात करें।

कागज़ के एक टुकड़े पर एक विषमबाहु त्रिभुज बनाइए। इस त्रिभुज को काट लीजिए। इस त्रिभुज को दूसरे कागज़ के टुकड़े पर रखिए और समान माप का एक ओर त्रिभुज काटिए। इस प्रकार अब आपके पास समान माप के दो विषमबाहु त्रिभुज हैं। क्या दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं?

एक त्रिभुज को दूसरे पर रखिए जिससे वे एक-दूसरे को पूर्ण रूप से ढक लें। आप दोनों में से एक त्रिभुज को घुमा भी सकते हैं।

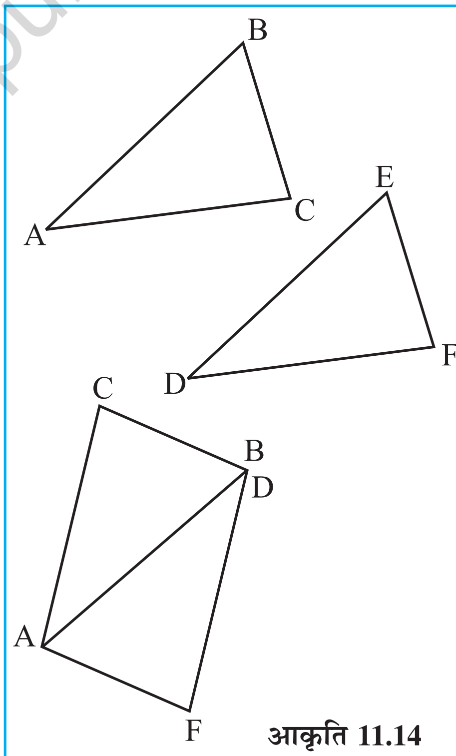
अब दोनों त्रिभुजों को इस प्रकार आपस में रखिए जिससे उनकी संगत भुजाओं का एक युग्म आपस में मिल जाएँ (जैसा आकृति 11.14 में दिखाया गया है)।

क्या इस प्रकार से बनी आकृति एक समांतर चतुर्भुज है?

प्रत्येक त्रिभुज के क्षेत्रफल की तुलना समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल से कीजिए।

त्रिभुजों के आधार तथा ऊँचाई की तुलना समांतर चतुर्भुज के आधार तथा ऊँचाई से कीजिए।

आप देखेंगे कि दोनों त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का योगफल समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल के बराबर है। त्रिभुज का आधार और ऊँचाई क्रमशः समांतर चतुर्भुज के आधार और ऊँचाई के बराबर है।



आकृति 11.14

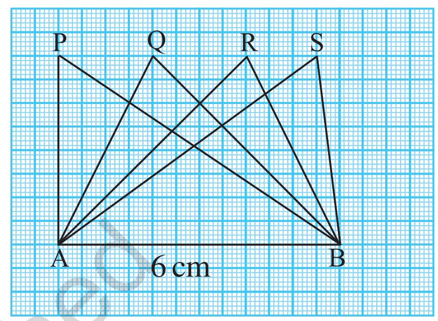
प्रत्येक त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ (समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल)

$= \frac{1}{2}$ (आधार × ऊँचाई) (क्योंकि, समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई)

$= \frac{1}{2}(b \times h)$ (या $\frac{1}{2}bh$, संक्षेप में)

इन्हें कीजिए

1. ऊपर दिए गए क्रियाकलापों को अलग-अलग प्रकार के त्रिभुज लेकर कीजिए।
2. अलग-अलग प्रकार के समांतर चतुर्भुज लीजिए। प्रत्येक समांतर चतुर्भुज को दो त्रिभुजों में एक विकर्ण के अनुदिश काटिए। क्या ये त्रिभुज सर्वांगसम हैं।



आकृति 11 .15

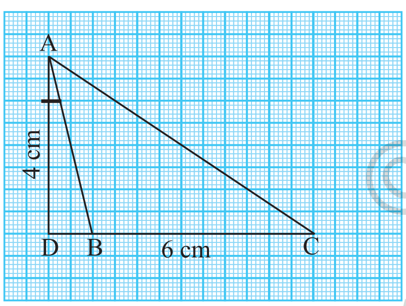
आकृति (11.15) में सभी त्रिभुज, आधार AB = 6 cm पर स्थित हैं।

आधार AB पर प्रत्येक त्रिभुज की संगत ऊँचाई के बारे में आप क्या कह सकते हैं?

क्या हम कह सकते हैं कि सभी त्रिभुजों का क्षेत्रफल बराबर है? हाँ।

क्या त्रिभुज सर्वांगसम हैं? नहीं।

हम निष्कर्ष निकालते हैं कि **सभी सर्वांगसम त्रिभुजों का क्षेत्रफल बराबर होता है लेकिन यह आवश्यक नहीं है कि वे त्रिभुज जिनका क्षेत्रफल बराबर होता है वे सर्वांगसम हैं।**

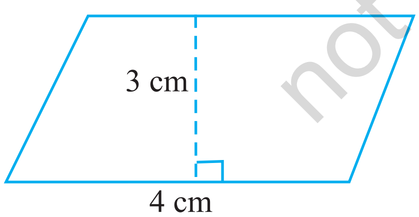


आकृति 11 .16

आधार 6 cm वाले एक अधिक कोण (obtuse angled triangle) त्रिभुज ABC पर विचार करते हैं (आकृति 11.16)।

इसकी ऊँचाई AD शीर्ष A से DC पर लंब है जो त्रिभुज के बाह्य स्थित है। क्या आप इस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं?

उदाहरण 6 एक समांतर चतुर्भुज की एक भुजा और संगत ऊँचाई क्रमशः 4 cm और 3 cm है। समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए (आकृति 11.17)।



आकृति 11.17

हल आधार की लंबाई दी गई है (b) = 4 cm, ऊँचाई (h) = 3 cm

समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $b \times h$ = 4 cm × 3 cm = 12 cm²

उदाहरण 7 यदि एक समांतर चतुर्भुज (आकृति 11.18) का क्षेत्रफल 24 cm² और आधार 4 cm हो तो ऊँचाई 'x' ज्ञात कीजिए।

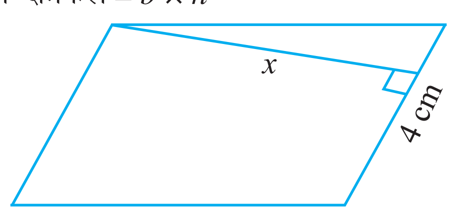
हल समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $b \times h$

इसलिए, $24 = 4 \times x$

या $\frac{24}{4} = x$

या $x = 6$ cm

इस प्रकार, समांतर चतुर्भुज की ऊँचाई 6 cm है।

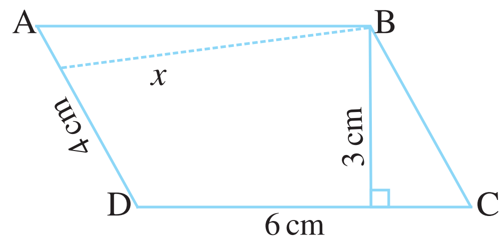


आकृति 11.18

उदाहरण 8 समांतर चतुर्भुज ABCD की दो भुजाओं की लंबाइयाँ 6 cm और 4 cm हैं। आधार CD की संगत ऊँचाई 3 cm है (आकृति 11.19)। ज्ञात कीजिए :

(i) समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल (ii) आधार AD की संगत ऊँचाई

हल



आकृति 11.19

(i) समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= b \times h$

$= 6 \text{ cm} \times 3 \text{ cm} = 18 \text{ cm}^2$

(ii) आधार $(b) = 4$ cm,

ऊँचाई $= x$ (मान लीजिए)

क्षेत्रफल $= 18 \text{ cm}^2$

समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= b \times x$

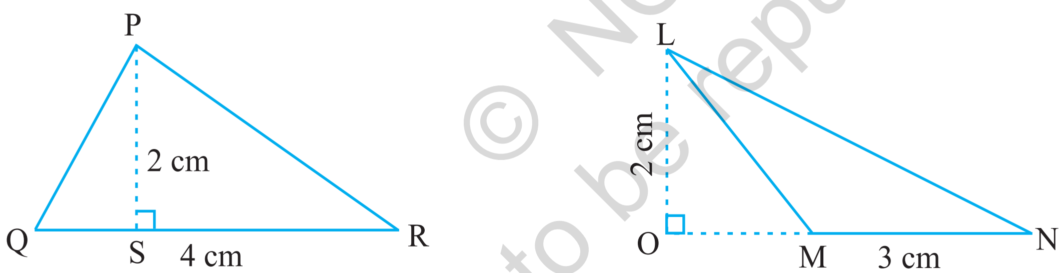
$18 = 4 \times x$

$\frac{18}{4} = x$

इसलिए, $x = 4.5$ cm

इस प्रकार, आधार AD की संगत ऊँचाई 4.5 cm है।

उदाहरण 9 निम्न त्रिभुजों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए (आकृति 11.20) :



(i) आकृति 11.20 (ii)

हल

(i) त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\, bh = \frac{1}{2} \times \text{QR} \times \text{PS}$

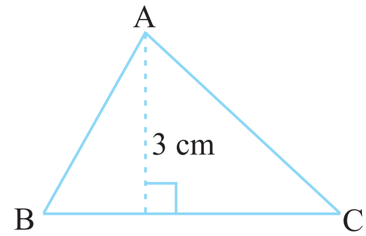
$= \frac{1}{2} \times 4 \text{ cm} \times 2 \text{ cm} = 4 \text{ cm}^2$

(ii) त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\, bh = \frac{1}{2} \times \text{MN} \times \text{LO}$

$= \frac{1}{2} \times 3 \text{ cm} \times 2 \text{ cm} = 3 \text{ cm}^2$

उदाहरण 10 BC ज्ञात कीजिए, यदि त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल 36 cm² और ऊँचाई AD 3 cm है। (आकृति 11.21) :

हल ऊँचाई = 3 cm, क्षेत्रफल = 36 cm²



आकृति 11.21

त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} bh$

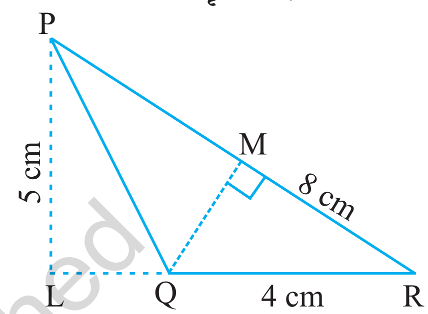
या $36 = \frac{1}{2} \times b \times 3$

$b = \frac{36 \times 2}{3} = 24$ cm

इसलिए BC = 24 cm

उदाहरण 11 ΔPQR में PR = 8 cm, QR = 4 cm और PL = 5 cm (आकृति 11.22)। ज्ञात कीजिए:

(i) ΔPQR का क्षेत्रफल (ii) QM



आकृति 11.22

हल

(i) आधार = 4 cm ऊँचाई = 5 cm

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} bh$

$= \frac{1}{2} \times 4 \text{ cm} \times 5 \text{ cm} = 10 \text{ cm}^2$

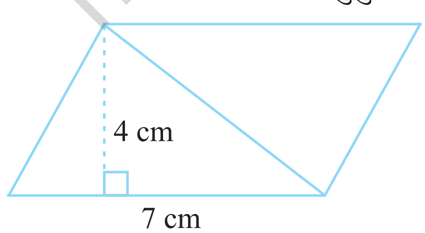
(ii) आधार = 8 cm, ऊँचाई = ?, क्षेत्रफल = 10 cm²

त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times b \times h$ अर्थात् $10 = \frac{1}{2} \times 8 \times h$

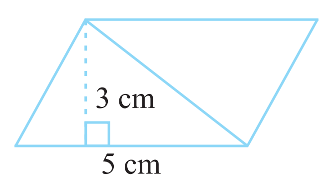
$h = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2.5$ इसलिए, QM = 2.5 cm

प्रश्नावली 11.2

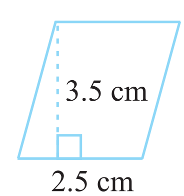
1. निम्न में प्रत्येक समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :



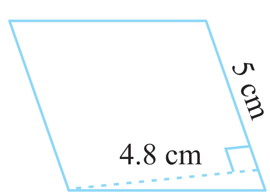
(a)



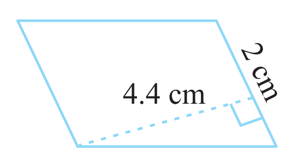
(b)



(c)

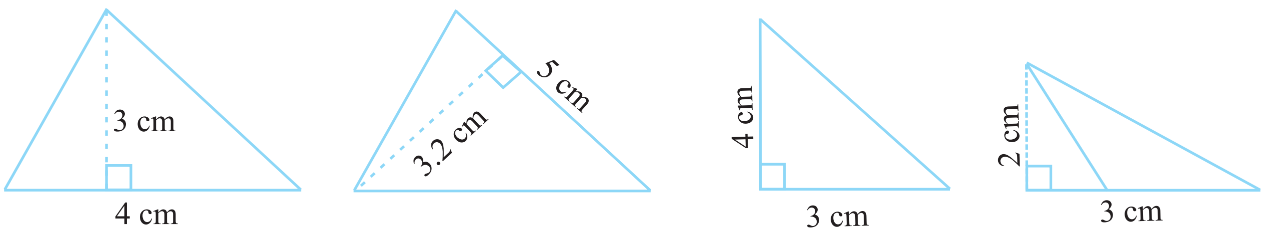


(d)



(e)

2. निम्न में प्रत्येक त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :

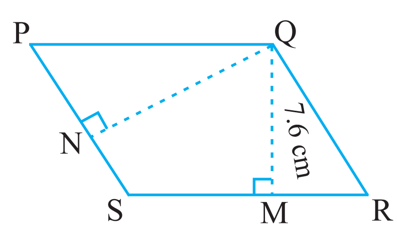


3. रिक्त स्थान का मान ज्ञात कीजिए :

क्र.सं.	आधार	ऊँचाई	समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल
a.	20 cm		246 cm^2
b.		15 cm	154.5 cm^2
c.		8.4 cm	48.72 cm^2
d.	15.6 cm		16.38 cm^2

4. रिक्त स्थानों का मान ज्ञात कीजिए :

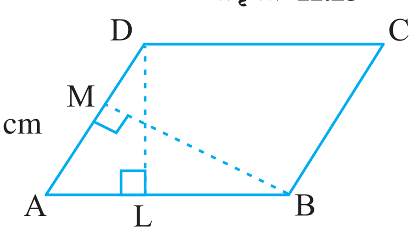
आधार	ऊँचाई	त्रिभुज का क्षेत्रफल
15 cm	______	87 cm^2
______	31.4 mm	1256 mm^2
22 cm	______	170.5 cm^2



आकृति 11.23

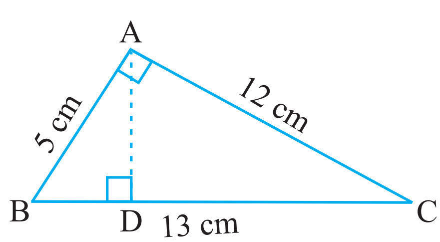
5. PQRS एक समांतर चतुर्भुज है (आकृति 11.23)। QM शीर्ष Q से SR तक की ऊँचाई तथा QN शीर्ष Q से PS तक की ऊँचाई है। यदि SR = 12 cm और QM = 7.6 cm तो ज्ञात कीजिए :

(a) समांतर चतुर्भुज PQRS का क्षेत्रफल (b) QN, यदि PS = 8 cm



आकृति 11.24

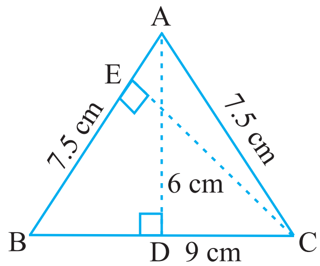
6. DL और BM समांतर चतुर्भुज ABCD की क्रमशः भुजाएँ AB और AD पर लंब हैं (आकृति 11.24)। यदि समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल 1470 cm^2 है, AB = 35 cm और AD = 49 cm है, तो BM तथा DL की लंबाई ज्ञात कीजिए।



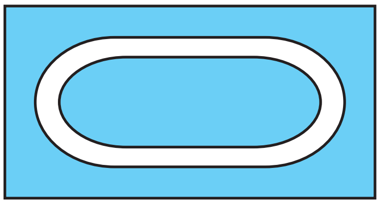
आकृति 11.25

7. त्रिभुज ABC, A पर समकोण है (आकृति 11.25), और AD भुजा BC पर लंब है। यदि AB = 5 cm, BC = 13 cm और AC = 12 cm है, तो ΔABC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। AD की लंबाई भी ज्ञात कीजिए।

8. ΔABC समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AB = AC = 7.5 cm और BC = 9 cm है (आकृति 11.26)। A से BC तक की ऊँचाई AD, 6 cm है। ΔABC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। C से AB तक की ऊँचाई, अर्थात् CE क्या होगी?



आकृति 11.26



आकृति 11.27

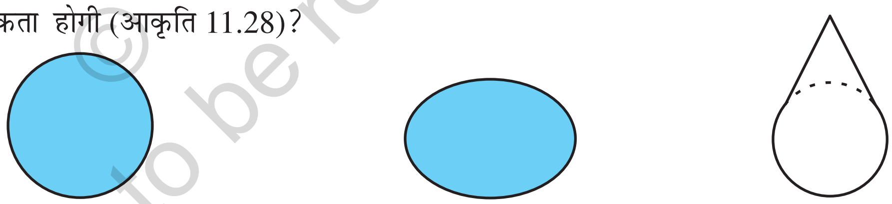
11.5 वृत्त

एक दौड़ पथ अपने दोनों किनारों पर अर्धवृत्ताकार है (आकृति 11.27)।

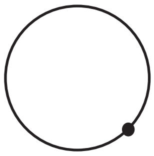
क्या आप एक धावक द्वारा तय की गई दूरी ज्ञात कर सकते हैं यदि वह इस दौड़ पथ के दो पूरे चक्कर लगाता है? जब आकार वृत्ताकार हो तो हमें उसके चारों ओर की दूरी प्राप्त करने की एक विधि ज्ञात करने की आवश्यकता होती है।

11.5.1 वृत्त की परिधि

तान्या गत्ते के घुमावदार आकार के अलग-अलग कार्ड काटती है। वह इन कार्डों को सजाने के लिए इनके चारों ओर किनारी लगाना चाहती है। प्रत्येक के लिए उसे कितनी लंबी किनारी की आवश्यकता होगी (आकृति 11.28)?



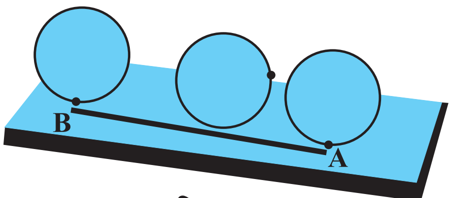
आकृति 11.28



आकृति 11.29

आप एक पैमाने (रूलर) की सहायता से वक्र (curve) को नहीं माप सकते क्योंकि ये आकृतियाँ सीधी नहीं हैं। आप क्या करेंगे?

आकृति 11. 28(a) में दिए गए आकार की आवश्यक किनारी की लंबाई ज्ञात करने के लिए आपको एक तरीका बताया जा रहा है। कार्ड के किनारे पर एक बिंदु अंकित कीजिए और इसे एक टेबल पर रखिए। बिंदु की स्थिति को टेबल पर भी अंकित कीजिए (आकृति 11.29)।



आकृति 11.30

अब वृत्ताकार कार्ड को एक सरल रेखा की दिशा में टेबल पर तब तक घुमाइए जब तक अंकित बिंदु टेबल को दुबारा स्पर्श न कर जाए। इस दूरी को रेखा के अनुदिश में मापिए। यह आवश्यक किनारी की लंबाई है। यह कार्ड के अंकित किए गए बिंदु से कार्ड के किनारे-किनारे वापस उसी बिंदु तक की दूरी है।

आप एक धागे को वृत्ताकार वस्तु के चारों ओर किनारे-किनारे रख कर भी दूरी ज्ञात कर सकते हैं।

एक वृत्ताकार क्षेत्र के चारों ओर की दूरी इसकी परिधि कहलाती है।

इन्हें कीजिए

एक बोतल का ढक्कन, एक चूड़ी या कोई अन्य वृत्ताकार वस्तु लीजिए और इसकी परिधि ज्ञात कीजिए।

अब, क्या आप इस विधि से एक धावक द्वारा एक पथ पर तय की गई दूरी ज्ञात कर सकते है?

अभी भी, पथ के चारों ओर की दूरी ज्ञात करना या अन्य किसी वृत्ताकार वस्तु को धागे से मापना बहुत ही मुश्किल होगा। तथापि यह माप सही नहीं होगी।

अत: इसके लिए हमें एक सूत्र की आवश्यकता है जैसाकि तल की आकृति या आकारों के लिए हम प्रयोग करते हैं।

आइए हम देखें क्या वृत्तों के व्यास और परिधि के बीच में कोई संबंध है।

निम्न तालिका पर विचार कीजिए। अलग-अलग त्रिज्याओं के 6 वृत्त खींचिए और धागे की सहायता से उनकी परिधि ज्ञात कीजिए। परिधि और व्यास के अनुपात को भी ज्ञात कीजिए :

वृत्त	त्रिज्या	व्यास	परिधि	परिधि और व्यास का अनुपात
1.	3.5 cm	7.0 cm	22.0 cm	$\frac{22}{7} = 3.14$
2.	7.0 cm	14.0 cm	44.0 cm	$\frac{44}{14} = 3.14$
3.	10.5 cm	21.0 cm	66.0 cm	$\frac{66}{21} = 3.14$
4.	21.0 cm	42.0 cm	132.0 cm	$\frac{132}{42} = 3.14$
5.	5.0 cm	10.0 cm	32.0 cm	$\frac{32}{10} = 3.2$
6.	15.0 cm	30.0 cm	94.0 cm	$\frac{94}{30} = 3.13$

ऊपर दी गई तालिका से आप क्या निष्कर्ष निकालते हैं? क्या यह अनुपात लगभग समान है? हाँ। क्या आप कह सकते हैं कि एक वृत्त की परिधि हमेशा इसके व्यास की तीन गुणा है? हाँ।

यह अनुपात स्थिर है और इसे 'π' (*pi*) (पाई) से प्रदर्शित करते हैं। इसका मान लगभग $\frac{22}{7}$ या 3.14 है।

अत: हम कह सकते हैं $\frac{C}{d} = \pi$, जहाँ 'C' वृत्त की परिधि और 'd' इसका व्यास दर्शाता है।

या $\quad C = \pi d$

हम जानते हैं कि एक वृत्त का व्यास (d), त्रिज्या (r) का दुगुना होता है; अर्थात् $d = 2r$

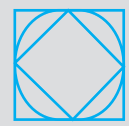
अत:, $C = \pi d = \pi \times 2r$ या $C = 2\pi r$

इन्हें कीजिए

आकृति 11.31 में

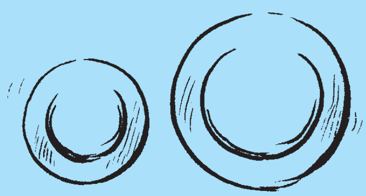
(a) किस वर्ग का परिमाप अधिक है?

(b) कौन-सा अधिक है, छोटे वर्ग का परिमाप या वृत्त की परिधि?



आकृति 11.31

प्रयास कीजिए



एक चौथाई प्लेट तथा एक अर्ध प्लेट लीजिए। प्रत्येक को टेबल की ऊपरी सतह पर एक बार घुमाइए। कौन-सी प्लेट एक पूरे चक्कर में अधिक दूरी तय करती है? कौन-सी प्लेट कम चक्कर में टेबल की ऊपरी सतह की लंबाई को पूरा करेगी?

उदाहरण 12 10 cm व्यास वाले एक वृत्त की परिधि ज्ञात कीजिए ($\pi = 3.14$ लीजिए)

हल वृत्त का व्यास (d) = 10 cm

वृत्त की परिधि = πd

$= 3.14 \times 10 \text{ cm} = 31.4 \text{ cm}$

अत:, 10 cm व्यास वाले वृत्त की परिधि 31.4 cm है।

उदाहरण 13 एक वृत्ताकार तश्तरी (disc) की परिधि ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 14 cm है।

$$\left(\text{प्रयोग करें } \pi = \frac{22}{7}\right)$$

हल वृत्ताकार तश्तरी (disc) की त्रिज्या (r) = 14 cm

तश्तरी की परिधि = $2\pi r$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 14 \text{ cm} = 88 \text{ cm}$$

अत:, वृत्ताकार तश्तरी की परिधि 88 cm है।

उदाहरण 14 एक वृत्ताकार पाइप की त्रिज्या 10 cm है। पाइप के चारों ओर एक बार टेप लपेटने की आवश्यक लंबाई ज्ञात कीजिए (प्रयोग करें $\pi = 3.14$)।

हल पाइप की त्रिज्या (r) = 10 cm

आवश्यक टेप की लंबाई, पाइप की परिधि के बराबर है।

पाइप की परिधि $= 2\pi r$

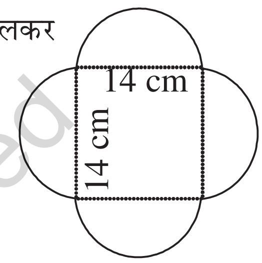
$= 2 \times 3.14 \times 10 \text{ cm} = 62.8 \text{ cm}$

इसलिए, पाइप के चारों ओर एक बार टेप लपेटने की आवश्यक लंबाई 62.8 cm है।

उदाहरण 15 दी गई आकृति का परिमाप ज्ञात कीजिए (आकृति 11.32)।

($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)।

हल इस आकृति में हमें वर्ग के प्रत्येक ओर स्थित अर्धवृत्त की परिधि को ज्ञात करने की आवश्यकता है। क्या आपको वर्ग के परिमाप को भी ज्ञात करने की आवश्यकता है? नहीं। इस आकृति की बाह्य परिसीमा अर्धवृत्तों से मिलकर बनी है। प्रत्येक अर्धवृत्त का व्यास 14 cm है।



आकृति 11.32

हम जानते हैं कि, वृत्त की परिधि $= \pi d$

अर्धवृत्त की परिधि $= \frac{1}{2}\pi d$

$= \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times 14 \text{ cm} = 22 \text{ cm}$

प्रत्येक अर्धवृत्त की परिधि 22 cm है। अत: दी गई आकृति का परिमाप $= 4 \times 22 \text{ cm} = 88 \text{ cm}$

उदाहरण 16 सुधांशु 7 cm त्रिज्या वाली एक वृत्ताकार तश्तरी (disc) को दो बराबर भागों में विभाजित करता है। प्रत्येक अर्धवृत्ताकार तश्तरी का परिमाप ज्ञात कीजिए (प्रयोग करें $\pi = \frac{22}{7}$)

हल अर्धवृत्ताकार तश्तरी (disc) के परिमाप को ज्ञात करने के लिए, (आकृति 11.33), हमें ज्ञात करने की आवश्यकता है:

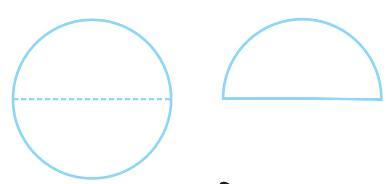
(i) अर्धवृत्ताकार आकार की परिधि (ii) व्यास

दी गई त्रिज्या $(r) = 7 \text{ cm}$

हम जानते हैं कि वृत्त की परिधि $= 2\pi r$

अत:, अर्धवृत्त की परिधि $= \frac{1}{2} \times 2\pi r = \pi r$

$= \frac{22}{7} \times 7 \text{ cm} = 22 \text{ cm}$


आकृति 11.33

इसलिए, वृत्त का व्यास $= 2r = 2 \times 7 \text{ cm} = 14 \text{ cm}$

अत: प्रत्येक अर्धवृत्ताकार तश्तरी (disc) का परिमाप $= 22 \text{ cm} + 14 \text{ cm} = 36 \text{ cm}$

11.5.2 वृत्त का क्षेत्रफल

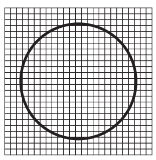
निम्न पर विचार कीजिए :

- एक किसान खेत के केंद्र पर 7 m त्रिज्या वाली एक फूलों की क्यारी खोदता है। उसे खाद को खरीदने की आवश्यकता है। यदि 1 m^2 क्षेत्रफल के लिए 1 kg खाद की आवश्यकता हो, तो उसे कितने किलोग्राम खाद खरीदनी चाहिए?

- 10 रु प्रति m^2 की दर से, 2 m त्रिज्या वाले एक वृत्ताकार टेबल के ऊपरी सतह पर पॉलिश कराने का व्यय क्या होगा?

क्या आप बता सकते हैं कि इन स्थितियों में हमें क्या ज्ञात करने की आवश्यकता है, क्षेत्रफल या परिमाप? ऐसी स्थितियों में हमें वृत्ताकार क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करने की आवश्यकता होती है। आइए ग्राफ़ पेपर की सहायता से हम एक वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात करते हैं।

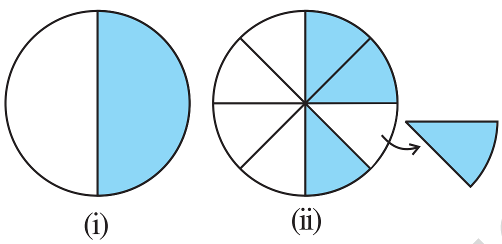
4 cm त्रिज्या वाले एक वृत्त को ग्राफ़ पेपर पर बनाइए (आकृति 11.34)। वृत्त के द्वारा घिरे हुए वर्गों को गिनकर इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



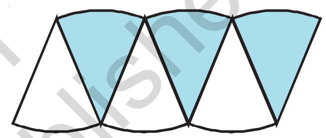
आकृति 11.34

क्योंकि किनारे सीधे नहीं हैं, हमें, इस विधि से, वृत्त के क्षेत्रफल का एक कच्चा (rough) अनुमान ही प्राप्त होता है। एक और विधि से वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात करते हैं।

एक वृत्त बनाइए और उसके अर्धभाग को छायांकित कीजिए [आकृति 11.35(i)] अब वृत्त को **आठ भागों** में मोड़िए और उन्हें मुड़ी हुई तहों के अनुदिश में काटिए (आकृति 11.35(ii))।



आकृति 11.35

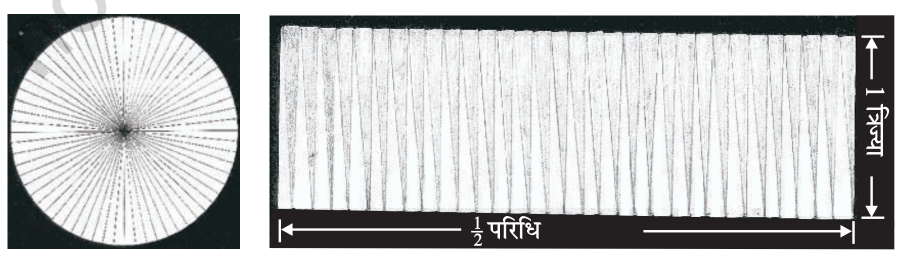


आकृति 11.36

अलग-अलग टुकड़ों को, जैसा आकृति 11.36 में दिखाया गया है, व्यवस्थित कीजिए, जो एक स्थूल रूप से (roughly) समांतर चतुर्भुज को दर्शाता है।

जितने अधिक त्रिज्याखंड होंगे, उतना ही सही समांतर चतुर्भुज हमें प्राप्त होता है।

जैसा ऊपर किया गया है यदि हम वृत्त को 64 त्रिज्याखंडों में विभाजित करें और उन्हें व्यवस्थित करें, तो हमें लगभग एक आयत प्राप्त होता है (आकृति 11.37)।



आकृति 11.37

इस आयत की चौड़ाई क्या है? इस आयत की चौड़ाई वृत्त की त्रिज्या ही है अर्थात् 'r'

जैसाकि पूरे वृत्त को 64 त्रिज्याखंडों में विभाजित किया गया तथा प्रत्येक ओर 32 त्रिज्यखंड हैं। आयत की लंबाई 32 त्रिज्यखंडों की लंबाइयों के बराबर है जो वृत्त की परिधि की आधी है (आकृति 11.37)।

वृत्त का क्षेत्रफल = बनाए गए आयत का क्षेत्रफल = $l \times b$

= (परिधि का आधा) × त्रिज्या = $\left(\frac{1}{2} \times 2\pi r\right) \times r = \pi r^2$

अतः, वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2

इन्हें कीजिए

ग्राफ़ पेपर पर अलग-अलग त्रिज्याओं के वृत्तों को बनाइए। वर्गों की संख्या को गिनकर क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। सूत्र का प्रयोग करके भी क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। दोनों उत्तरों की तुलना कीजिए।

उदाहरण 17 30 cm त्रिज्या वाले वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। (π = 3.14 लीजिए)

हल त्रिज्या r = 30 cm

वृत्त का क्षेत्रफल = $\pi r^2 = 3.14 \times 30^2 = 2826$ cm²

उदाहरण 18 एक वृत्ताकार बगीचे का व्यास 9.8 m है। इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए

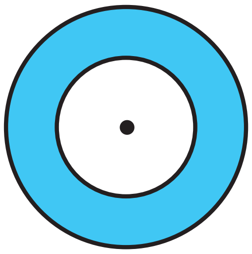
हल व्यास, d = 9.8 m   अतः त्रिज्या $r = 9.8 \div 2 = 4.9$ m

वृत्त का क्षेत्रफल = $\pi r^2 = \frac{22}{7} \times (4.9)^2 \text{ m}^2 = \frac{22}{7} \times 4.9 \times 4.9 \text{ m}^2 = 75.46 \text{ m}^2$

उदाहरण 19 संलग्न आकृति दो वृत्तों को दर्शाती है जिनका केंद्र समान है। बड़े वृत्त की त्रिज्या 10 cm और छोटे वृत्त की त्रिज्या 4 cm है।

ज्ञात कीजिए (a) बड़े वृत्त का क्षेत्रफल (b) छोटे वृत्त का क्षेत्रफल

(c) दोनों वृत्तों के बीच छायांकित भाग का क्षेत्रफल (π = 3.14)



हल

(a) बड़े वृत्त की त्रिज्या = 10 cm

अतः, बड़े वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2

= $3.14 \times 10 \times 10 = 314$ cm²

(b) छोटे वृत्त की त्रिज्या = 4 cm

छोटे वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2

= $3.14 \times 4 \times 4 = 50.24$ cm²

(c) छायांकित भाग का क्षेत्रफल = $(314 - 50.24)$ cm² = 263.76 cm²

प्रश्नावली 11.3

1. निम्न त्रिज्याओं वाले वृत्तों की परिधि ज्ञात कीजिए ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)

(a) 14 cm (b) 28 mm (c) 21 cm

2. निम्न वृत्तों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। दिया गया है :

(a) त्रिज्या = 14 mm ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए) (b) व्यास = 49 m

(c) त्रिज्या = 5 cm

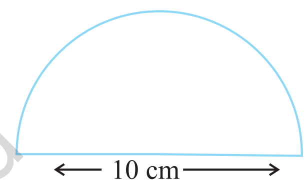
3. यदि एक वृत्ताकार शीट की परिधि 154 m हो तो इसकी त्रिज्या ज्ञात कीजिए। शीट का क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए। ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)

4. 21 m व्यास वाले एक वृत्ताकार बगीचे के चारों ओर माली बाड़ लगाना चाहता है। खरीदे जाने वाले आवश्यक रस्से की लंबाई ज्ञात कीजिए, यदि वह 2 पूरे चक्कर की बाड़ बनाना चाहता है। 4 रु प्रति मीटर की दर से रस्से पर व्यय ज्ञात कीजिए। ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)

5. 4 cm त्रिज्या वाली एक वृत्ताकार शीट में से 3 cm त्रिज्या वाले एक वृत्त को निकाल दिया जाता है। शीट के शेष भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ लीजिए)

6. साइमा 1.5 m व्यास वाले एक वृत्ताकार टेबल कवर के चारों ओर किनारी लगाना चाहती है। आवश्यक किनारी की लंबाई ज्ञात कीजिए और ₹ 15 प्रति मीटर की दर से किनारी लगाने का व्यय ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ लीजिए)

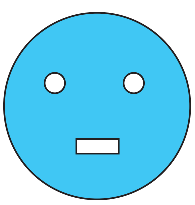
7. दी गई आकृति, व्यास के साथ एक अर्धवृत्त है। उसका परिमाप ज्ञात कीजिए।



8. 15 रु प्रति वर्ग मीटर की दर से, 1.6 m व्यास वाले एक वृत्ताकार टेबल के ऊपरी सतह पर पॉलिश कराने का व्यय ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ लीजिए)

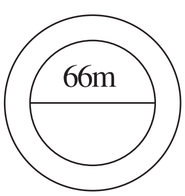
9. शाझली 44 cm लंबाई वाली एक तार लेती है और उसे एक वृत्त के आकार में मोड़ देती है। उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए। इसका क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए। यदि इसी तार को दुबारा एक वर्ग के आकार में मोड़ा जाता है, तो इसकी प्रत्येक भुजा की लंबाई क्या होगी? कौन-सी आकृति अधिक क्षेत्रफल घेरती है वृत्त या वर्ग? ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)

10. 14 cm त्रिज्या वाली एक वृत्ताकार गत्ते की शीट में से, 3.5 cm त्रिज्या वाले दो वृत्तों को और 3 cm लंबाई तथा 1 cm चौड़ाई वाले एक आयत को निकाल दिया जाता है (जैसाकि आकृति में दिखाया गया है) शीट के शेष भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)।



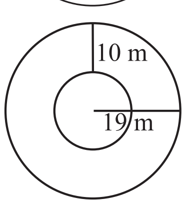
11. 6 cm भुजा वाले एक वर्गाकार एल्युमिनियम शीट के टुकड़े में से 2 cm त्रिज्या वाले एक वृत्त को काट दिया जाता है। शीट के शेष भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए? ($\pi = 3.14$ लीजिए)

12. एक वृत्त की परिधि 31.4 cm है। वृत्त की त्रिज्या और क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए? ($\pi = 3.14$ लीजिए)



13. एक वृत्ताकार फूलों की क्यारी के चारों ओर 4 m चौड़ा पथ है तथा फूलों की क्यारी का व्यास 66 m है। इस पथ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए? ($\pi = 3.14$ लीजिए)

14. एक वृत्ताकार फूलों के बगीचे का क्षेत्रफल 314 m^2 है। बगीचे के केंद्र में एक घूमने वाला फव्वारा (sprinkler) लगाया जाता है, जो अपने चारों ओर 12 m त्रिज्या के क्षेत्रफल में पानी का छिड़काव करता है। क्या फव्वारा पूरे बगीचे में पानी का छिड़काव कर सकेगा। ($\pi = 3.14$)



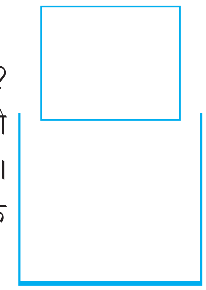
15. आकृति में, अंतः और बाह्य वृत्तों की परिधि ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ लीजिए)

16. 28 cm त्रिज्या वाले एक पहिए को 352 m दूरी तय करने के लिए कितनी बार घुमाना पड़ेगा? ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए)

17. एक वृत्ताकार घड़ी की मिनट की सुई की लंबाई 15 cm है। मिनट की सुई की नोक 1 घंटे में कितनी दूरी तय करती है। ($\pi = 3.14$ लीजिए)

11.6 इकाइयों का रूपांतरण

हम जानते हैं कि 1 cm = 10 mm^2। क्या आप बता सकते हैं कि 1 cm^2 में कितने mm^2 होते हैं? आइए हम ऐसे ही प्रश्नों को खोजें और ज्ञात करें कि क्षेत्रफलों को मापते हुए इनकी इकाइयों को कैसे रूपांतरित किया जाता है। ग्राफ़ पेपर पर 1 cm भुजा वाला एक वर्ग बनाइए (आकृति 11.38)। आप देखेंगे कि 1 cm वाले इस वर्ग को 100 वर्गों में विभाजित किया जा सकता है और प्रत्येक वर्ग की भुजा 1 mm है।



आकृति 11.38

1 cm भुजा वाले वर्ग का क्षेत्रफल= 100 वर्गों का क्षेत्रफल, जिसकी प्रत्येक भुजा 1 mm है।

अत: $1\ \text{cm}^2 = 100 \times 1\ \text{mm}^2$ या $1\ \text{cm}^2 = 100\ \text{mm}^2$

इस प्रकार, $1\ \text{m}^2 = 1\ \text{m} \times 1\ \text{m} = 100\ \text{cm} \times 100\ \text{cm}$ (1 m = 100 cm)

$= 10000\ \text{cm}^2$

अब क्या आप 1 km^2 को m^2 में बदल सकते हैं?

मिट्रिक प्रणाली में भूखंड के क्षेत्रफल को हेक्टेयर में मापा जाता है [संक्षेप में ha लिखा जाता है]

इस प्रकार, 1 हेक्टेयर = $100 \times 100\ \text{m}^2 = 10{,}000\ \text{m}^2$

जब हम क्षेत्रफल की एक इकाई को छोटी इकाई में बदलते हैं तो परिणामस्वरूप इकाइयों की संख्या अधिक होगी।

उदाहरण के लिए $1000\ \text{cm}^2 = 1000 \times 100\ \text{mm}^2 = 100000\ \text{mm}^2$

परंतु जब हम क्षेत्रफल की एक इकाई को बड़ी इकाई में बदलते हैं तो बड़ी इकाइयों की संख्या कम होगी।

उदाहरण के लिए, $1000\ \text{cm}^2 = \dfrac{1000}{10000}\ \text{m}^2 = 0.1\ \text{m}^2$

इन्हें कीजिए

निम्न को बदलिए :

(i) 50 cm^2 को mm^2 में

(ii) 2 ha को m^2 में

(iii) 10 m^2 को cm^2 में

(iv) 1000 cm^2 को mm^2

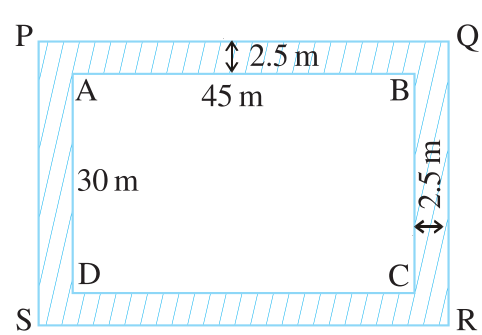
11.7 उपयोग

आपने ध्यान दिया होगा कि बहुधा पार्कों या बगीचों में उनके चारों ओर या बीच में चौपड़ की तरह कुछ स्थान पथ के रूप में छोड़ दिया जाता है। एक फ्रेम किए हुए चित्र या पेंटिंग के चारों ओर कुछ स्थान छोड़ दिया जाता है।

हमें ऐसे पथों या बार्डरों के क्षेत्रफलों को ज्ञात करने की आवश्यकता होती है, जब हम उनके बनाने का व्यय ज्ञात करना चाहते हैं।

उदाहरण 20 एक आयताकार पार्क 45 m लंबा और 30 m चौड़ा है। पार्क के बाहर चारों ओर एक 2.5 m चौड़ा एक पथ बनाया गया है। पथ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल माना ABCD आयताकार पार्क को और छायांकित क्षेत्र 2.5 m चौड़े पथ को दर्शाता है।



पथ के क्षेत्रफल को ज्ञात करने के लिए हमें (आयात PQRS का क्षेत्रफल – आयात ABCD का क्षेत्रफल) ज्ञात करने की आवश्यकता है।

हमें प्राप्त है $\quad PQ = (45 + 2.5 + 2.5)\ \text{m} = 50\ \text{m}$

$PS = (30 + 2.5 + 2.5)\ \text{m} = 35\ \text{m}$

आयत ABCD का क्षेत्रफल $= l \times b = 45 \times 30\ \text{m}^2 = 1350\ \text{m}^2$

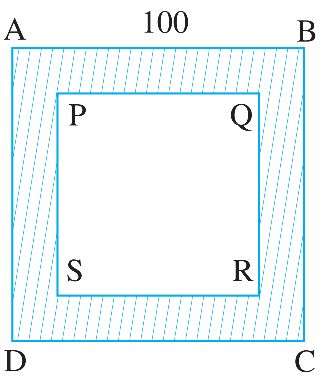
आयत PQRS का क्षेत्रफल $= l \times b = 50 \times 35\ \text{m}^2 = 1750\ \text{m}^2$

पथ का क्षेत्रफल = आयत PQRS का क्षेत्रफल – आयत ABCD का क्षेत्रफल

$= (1750 - 1350)\ m^2 = 400\ m^2$

उदाहरण 21 100 m भुजा वाले एक वर्गाकार पार्क की परिसीमा के साथ लगा हुआ भीतर की ओर एक 5 m चौड़ा पथ बना हुआ है। इस पथ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ₹ 250 प्रति 10 m^2 की दर से इसे सीमेंट कराने का भी व्यय ज्ञात कीजिए।

हल माना ABCD, 100 m भुजा वाला वर्गाकार पार्क है। छायांकित भाग 5 m चौड़े पथ को दर्शाता है।



$PQ = 100 - (5 + 5) = 90\ m$

वर्ग ABCD का क्षेत्रफल = (भुजा)^2 = $(100)^2\ m^2 = 10,000\ m^2$

वर्ग PQRS का क्षेत्रफल = (भुजा)^2 = $(90)^2\ m^2 = 8100\ m^2$

अतः, पथ का क्षेत्रफल = $(10000 - 8100)\ m^2 = 1900\ m^2$

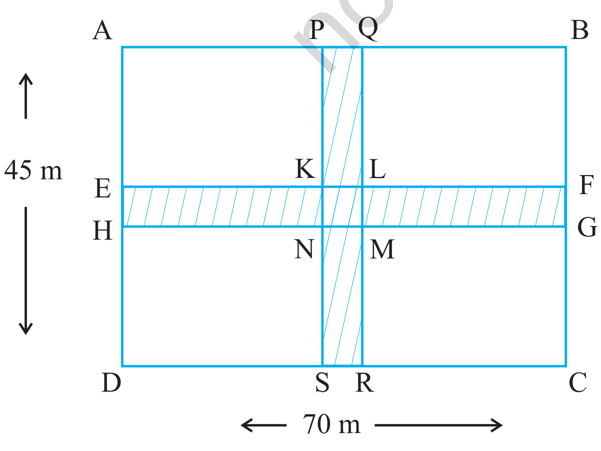
10 m^2 पर सीमेंट कराने का व्यय = ₹ 250

इसलिए, 1 m^2 पर सीमेंट कराने का व्यय = ₹ $\frac{250}{10}$

अतः, 1900 m^2 पर सीमेंट कराने का व्यय = $\frac{250}{10} \times 1900$ = ₹ 47500

उदाहरण 22 70 m लंबाई और 45 m चौड़ाई वाले एक आयताकार पार्क के मध्य से होकर 5 m चौड़ाई के दो पथ, एक दूसरे पर लंब ऐसे बने हुए हैं जो भुजाओं के समांतर हैं। पथों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए तथा ₹ 105 प्रति m^2 की दर से पथों को बनाने का भी व्यय ज्ञात कीजिए।

हल पथों का क्षेत्रफल, छायांकित भाग का क्षेत्रफल ही है, अर्थात् आयत PQRS का क्षेत्रफल और आयत EFGH का क्षेत्रफल। परंतु ऐसा करते समय, वर्ग KLMN के क्षेत्रफल को दो बार लिया जाता है, जिसे घटाना होगा। अब



$PQ = 5\ m$ और $PS = 45\ m$

$EH = 5\ m$ और $EF = 70\ m$

$KL = 5\ m$ और $KN = 5\ m$

पथों का क्षेत्रफल = आयत PQRS का क्षेत्रफल

+ आयत EFGH का क्षेत्रफल

– वर्ग KLMN का क्षेत्रफल

$= PS \times PQ + EF \times EH - KL \times KN$

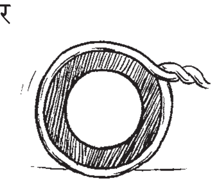
$= (45 \times 5 + 70 \times 5 - 5 \times 5)\ m^2$

= (225 + 350 – 25) मी^{2} = 550 m^2

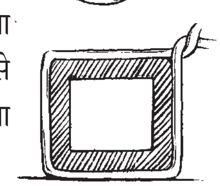
पथों को बनाने का व्यय = 105 × 550 = ₹ 5775

प्रश्नावली 11.4

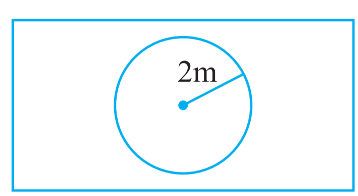
1. एक बगीचा 90 m लंबा और 75 m चौड़ा है। इसके बाहर, चारों ओर एक 5 m चौड़ा पथ बनाना है। पथ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। बगीचे का क्षेत्रफल हेक्टेयर में भी ज्ञात कीजिए।
2. 125 m लंबाई और 65 m चौड़ाई वाले एक आयताकार पार्क के चारों ओर बाहर एक 3 m चौड़ा एक पथ बना हुआ है। पथ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
3. 8 cm लंबे और 5 cm चौड़े एक गत्ते पर एक चित्र की पेंटिंग इस प्रकार बनाई गई है कि इसकी प्रत्येक भुजाओं के अनुदिश 1.5 cm चौड़ा हाशिया (margin) छोड़ा गया है। हाशिये का कुल क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
4. 5.5 m लंबे और 4 m चौड़े कमरे के चारों ओर बाहर 2.25 m चौड़ा एक बरामदा बनाया गया है। ज्ञात कीजिए :
   (i) बरामदे का क्षेत्रफल
   (ii) ₹ 200 प्रति m^2 की दर से बरामदे के फर्श पर सीमेंट कराने का व्यय।
5. 30 m भुजा वाले एक वर्गाकार बगीचे की परिसीमा से लगा भीतर की ओर 1 m चौड़ा पथ बना हुआ है। ज्ञात कीजिए :
   (i) पथ का क्षेत्रफल
   (ii) ₹ 40 प्रति m^2 की दर से बगीचे के शेष भाग पर घास लगवाने का व्यय।
6. 700 m लंबे और 300 m चौड़े एक आयताकार पार्क के मध्य से होकर जाते 10 m चौड़े दो पथ बने हुए हैं जो एक-दूसरे पर परस्पर लंब और चौपड़ के आकार के हैं। इनमें से प्रत्येक पथ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए तथा पार्क की भुजाओं को छोड़कर पार्क के शेष भाग का भी क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। उत्तर को हेक्टेयर में दीजिए।
7. 90 m लंबाई और 60 m चौड़ाई वाले एक आयताकार मैदान में दो पथ बनाए गए हैं, जो भुजाओं के समांतर हैं, एक-दूसरे को लंबवत् काटते हैं और मैदान के मध्य से होकर निकलते हैं। यदि प्रत्येक पथ की चौड़ाई 3 m हो, तो ज्ञात कीजिए :
   (i) पथों द्वारा आच्छादित क्षेत्रफल
   (ii) ₹ 110 प्रति m^2 की दर से पथ बनाने का व्यय



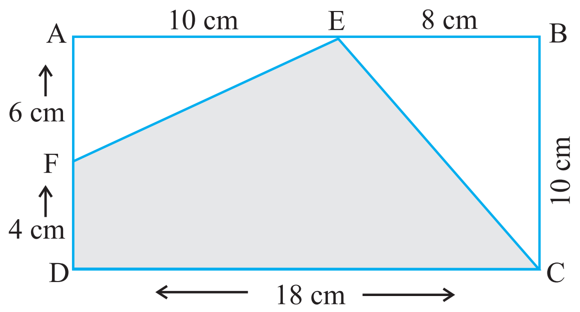
8. प्रज्ञा 4 cm त्रिज्या वाले एक वृत्ताकार पाइप के चारों ओर एक रस्सी लपेटती है (जैसा दिखाया गया है) और रस्सी की आवश्यक लंबाई को काट लेती है। इसके बाद वह उसे 4 cm भुजा वाले एक वर्गाकार बॉक्स के चारों ओर लपेटती है (दिखाया गया है)। क्या उसके पास कुछ और रस्सी बचेगी? ($\pi = 3.14$)

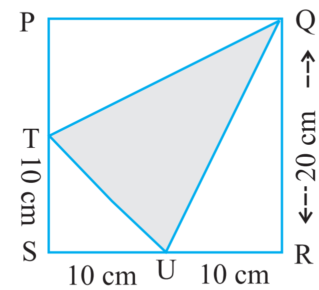


9. संलग्न आकृति, एक आयताकार पार्क के मध्य में एक वृत्ताकार फूलों की क्यारी को दर्शाती है। ज्ञात कीजिए :
   (i) पूरे पार्क का क्षेत्रफल
   (ii) फूलों की क्यारी का क्षेत्रफल
   (iii) फूलों की क्यारी को छोड़कर, पार्क के शेष भाग का क्षेत्रफल
   (iv) क्यारी की परिधि

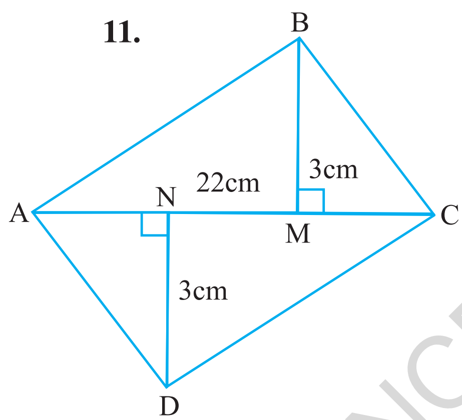


10. दी गई आकृति में, छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :





11. चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। यहाँ AC = 22 cm, BM = 3 cm, DN = 3 cm और $BM \perp AC$, $DN \perp AC$



हमने क्या चर्चा की?

1. परिमाप एक बंद आकृति के चारों ओर की दूरी है जबकि क्षेत्रफल एक बंद आकृति द्वारा घेरे गए तल के भाग या क्षेत्र को दर्शाता है।

2. हम पिछली कक्षा में जान चुके हैं कि एक वर्ग और आयत का परिमाप तथा क्षेत्रफल कैसे निकालते हैं। जैसे :

(a) एक वर्ग का परिमाप = 4 × भुजा

(b) एक आयत का परिमाप = 2 × (लंबाई + चौड़ाई)

(c) एक वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा × भुजा

(d) एक आयत का क्षेत्रफल = लंबाई × चौड़ाई

3. एक समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई

4. एक त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (इससे प्राप्त समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल)

$= \frac{1}{2}$ × आधार × ऊँचाई

5. एक वृत्ताकार क्षेत्र के चारों ओर की दूरी इसकी परिधि कहलाती है। एक वृत्त की परिधि = πd, जहाँ d वृत्त का व्यास और $\pi = \frac{22}{7}$ या 3.14 (लगभग) है।

6. एक वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2, जहाँ r वृत्त की त्रिज्या है।

7. जैसा कि आप जानते हैं कि जिस प्रकार लंबाइयों की इकाइयों का रूपांतरण करते हैं उसी प्रकार क्षेत्रफलों की ईकाइयों को भी रूपांतरित किया जा सकता है।

$1\ cm^2 = 100\ mm^2$, $1\ m^2 = 10000\ cm^2$, 1 हेक्टेयर = $10000\ m^2$

अध्याय 12

बीजीय व्यंजक

0757CH12

12.1 भूमिका

हम $x + 3$, $y - 5$, $4x + 5$, $10y - 5$, इत्यादि जैसे सरल बीजीय व्यंजकों से परिचित हो चुके हैं। कक्षा VI में, हमने देखा था कि ये व्यंजक किस प्रकार पहेलियों और समस्याओं को एक सुव्यवस्थित प्रकार से प्रस्तुत करने में सहायक होते हैं। हम सरल समीकरणों वाले अध्याय में भी व्यंजकों के अनेक उदाहरणों को देख चुके हैं।

बीजगणित में व्यंजकों (expressions) को एक केंद्रीय अवधारणा माना जाता है। यह अध्याय बीजीय व्यंजकों से संबद्ध होगा। जब आप इस अध्याय को पढ़ लेंगे, तो आपको ज्ञात हो जाएगा कि बीजीय व्यंजक किस प्रकार बनते हैं, इन्हें किस प्रकार संयोजित किया (मिलाया) जाता है, इनके मान हम कैसे ज्ञात कर सकते हैं तथा इनका किस प्रकार उपयोग किया जा सकता है।

12.2 व्यंजक किस प्रकार बनते हैं ?

अब हम भली भाँति जानते हैं कि एक चर (variable) क्या होता है। हम चरों को व्यक्त करने के लिए, अक्षरों $x, y, l, m, \ldots$ इत्यादि का प्रयोग करते हैं। एक **चर** के विभिन्न मान हो सकते हैं। इसका मान निश्चित नहीं होता है। इसके दूसरी ओर **अचर** (constant) का एक निश्चित मान होता है। अचरों के उदाहरण $4, 100, -17$, इत्यादि हैं।

हम चरों और अचरों को संयोजित करके बीजीय व्यंजकों को बनाते हैं। इसके लिए हम योग, व्यवकलन, गुणन और विभाजन की संक्रियाओं का प्रयोग करते हैं। हम, $4x + 5$, $10y - 20$ जैसे व्यंजकों को पहले ही देख चुके हैं। व्यंजक $4x + 5$, 'x' चर के प्रयोग से बना है, जिसमें पहले चर x को अचर 4 से गुणा करके और फिर इस गुणनफल में अचर 5 जोड़ कर प्राप्त किया जाता है। इसी प्रकार, $10y - 20$ पहले चर y को अचर 10 से गुणा करके और फिर इस गुणनफल में से 20 घटा कर प्राप्त किया जाता है।

उपरोक्त व्यंजक चरों और अचरों को संयोजित करके प्राप्त किए गए थे। हम व्यंजकों को, चरों को स्वयं उन चरों से अथवा अन्य चरों से संयोजित करके भी प्राप्त कर सकते हैं।

देखिए कि निम्नलिखित व्यंजक किस प्रकार प्राप्त किए जाते हैं ?

$$x^2, 2y^2, 3x^2 - 5, xy, 4xy + 7$$

(i) व्यंजक x^2 चर x को स्वयं x से गुणा करके प्राप्त किया जाता है।
अर्थात् $x \times x = x^2$ है।
जिस प्रकार $4 \times 4 = 4^2$ लिखा जाता है, उसी प्रकार हम $x \times x = x^2$. लिखते हैं। इसे सामान्यतः x का वर्ग (x squared) पढ़ा जाता है।
[बाद में, जब आप 'घातांक और घात' वाले अध्याय का अध्ययन करेंगे, तब आप अनुभव करेंगे कि x^2 को x के ऊपर घात 2 भी पढ़ा जा सकता है]।
इसी प्रकार, हम लिख सकते हैं : $x \times x \times x = x^3$
सामान्यतः, x^3 को x का घन (x cubed) पढ़ा जाता है। बाद में, आप यह अनुभव करेंगे कि x^3 को x के ऊपर घात 3 भी पढ़ा जा सकता है।
$x, x^2, x^3, \ldots$ में से प्रत्येक x से प्राप्त एक बीजीय व्यंजक है।

(ii) व्यंजक $2y^2$ को y से इस प्रकार प्राप्त किया जाता है: $2y^2 = 2 \times y \times y$
यहाँ, हम y को y से गुणा करके y^2 प्राप्त करते हैं और फिर इस गुणनफल y^2 को 2 से गुणा करते हैं।

(iii) $(3x^2 - 5)$ में, हम पहले x^2 प्राप्त करते हैं और फिर उसे 3 से गुणा करके $3x^2$ प्राप्त करते हैं। अंत में, $3x^2 - 5$ पर पहुँचने के लिए, हम $3x^2$ में से 5 को घटाते हैं।

(iv) xy में, हम चर x को एक अन्य चर y से गुणा करते हैं। इस प्रकार, $x \times y = xy$।

(v) $4xy + 7$ में, हम पहले xy प्राप्त करते हैं; उसे 4 से गुणा करके $4xy$ प्राप्त करते हैं और फिर दिया हुआ व्यंजक प्राप्त करने के लिए, $4xy$ में 7 जोड़ते हैं।

प्रयास कीजिए

बताइए कि निम्नलिखित व्यंजक किस प्रकार प्राप्त किए जाते हैं :

$7xy + 5, x^2y, 4x^2 - 5x$

12.3 एक व्यंजक के पद

अभी तक ऊपर हमने पढ़ा है कि व्यंजक किस प्रकार बनाए जाते हैं, अब हम उसे एक सुव्यवस्थित रूप में रखेंगे। इस कार्य के लिए, हमें यह जानने की आवश्यकता है कि एक व्यंजक के पद (terms) और उनके गुणनखंड (factors) क्या होते हैं, अर्थात् उनके अर्थ क्या हैं।

व्यंजक $(4x + 5)$ पर विचार कीजिए। इस व्यंजक को बनाने के लिए, पहले हमने अलग से 4 और x का गुणा करके $4x$ बनाया था और फिर इसमें 5 जोड़ दिया था। इसी प्रकार, व्यंजक $(3x^2 + 7y)$ पर विचार कीजिए। यहाँ, हमने पहले अलग से 3, x और x का गुणा करके $3x^2$ बनाया था। फिर हमने अलग से 7 और y का गुणा करके $7y$ बनाया था। $3x^2$ और $7y$ बनाने के बाद, हमने दिया हुआ व्यंजक प्राप्त करने के लिए, इनको जोड़ दिया था।

आप पाएँगे कि हम जितने भी व्यंजकों पर कार्य करते हैं वे सभी इसी रूप में देखे जा सकते हैं। इनके भाग होते हैं जो अलग से बनाए जाते हैं और फिर जोड़ दिए जाते हैं। व्यंजकों के इस प्रकार के भाग, जो पहले अलग से बनाए जाते हैं और फिर जोड़ दिए जाते हैं, इस व्यंजक के **पद** कहलाते हैं। व्यंजक $4x^2 - 3xy$ को देखिए। हम कहते हैं कि इसके दो पद $4x^2$ और $-3xy$ हैं। पद $4x^2$; 4, x और x का गुणनफल है तथा पद $-3xy$; -3, x और y का गुणनफल है।

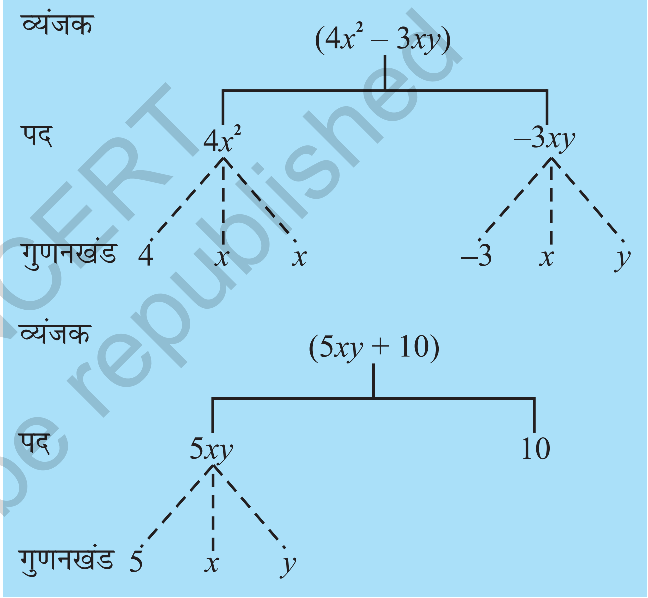
व्यंजकों को बनाने के लिए पदों को जोड़ा जाता है। जिस प्रकार व्यंजक $(4x + 5)$ को बनाने के लिए $4x$ और 5 को जोड़ा जाता है, उसी प्रकार व्यंजक $(4x^2–3xy)$ को बनाने के लिए $4x^2$ और $(– 3xy)$ को जोड़ा जाता है। इसका कारण $4x^2 + (–3xy) = 4x^2 – 3xy$ होता है।

> ध्यान दीजिए कि पद में ऋण *(minus)* चिह्न सम्मिलित होता है। व्यंजक $4x^2 –3xy$ में, हमने पद को $3xy$ न लेकर $(–3xy)$ लिया था। इसलिए, हमें यह कहने कि आवश्यकता नहीं है कि एक व्यंजक को बनाने के लिए, पदों को जोड़ा या घटाया जाता है। इसके लिए केवल यह कहना ही पर्याप्त है कि पदों को जोड़ा जाता है।

एक पद के गुणनखंड

हमने ऊपर देखा था कि व्यंजक $(4x^2 – 3xy)$ के दो पद $4x^2$ और $–3xy$ हैं। पद $4x^2$; 4, x और x का गुणनफल है। हम कहते हैं कि 4, x और x पद $4x^2$ के गुणनखंड (factors) हैं। एक पद अपने गुणनखंडों का एक गुणनफल होता है। पद $–3xy$, गुणनखंडों $–3$, x और y का एक गुणनफल है।

हम एक व्यंजक के पदों तथा पदों के गुणनखंडों को एक सुविधाजनक और आकर्षक प्रकार से एक व्यंजक पेड़ आरेख (tree diagram) द्वारा निरूपित कर सकते हैं। व्यंजक $(4x^2 – 3xy)$ का पेड़ संलग्न आकृति में दर्शाया गया है।



> ध्यान दीजिए कि पेड़ आरेख में, हमने गुणनखंड के लिए बिंदुकित रेखाओं का प्रयोग किया तथा पदों के लिए सतत रेखाओं का प्रयोग किया है। यह इनके मिश्रित न होने के लिए किया गया है।

आइए व्यंजक $5xy + 10$ का पेड़ आरेख खींचें। गुणनखंड ऐसे लिखे जाएँ कि जिनके आगे गुणनखंड न हो सके। इस प्रकार, हम $5xy$ को $5 \times xy$ के रूप में नहीं लिखते हैं, क्योंकि xy के आगे और भी गुणनखंड हो सकते हैं। इसी प्रकार, यदि x^3 एक पद होता, तो इसे $x \times x^2$ न लिख कर $x \times x \times x$ लिखा जाए। साथ ही, याद रखिए 1 को अलग से गुणनखंड नहीं लिया जाता है।

प्रयास कीजिए

1. निम्नलिखित व्यंजकों में कौन-कौन से पद हैं? दर्शाइए कि ये व्यंजक कैसे बनाए जाते हैं। प्रत्येक व्यंजक के लिए एक पेड़ आरेख भी खींचिए।
   $8y + 3x^2$, $7mn – 4$, $2x^2 y$
2. ऐसे तीन व्यंजक लिखिए, जिनमें से प्रत्येक में चार पद हों।

गुणांक

हम एक पद को उसके गुणनखंडों के एक गुणनफल के रूप में लिखना सीख चुके हैं। इनमें से एक गुणनखंड संख्यात्मक (numerical) हो सकता है तथा अन्य बीजीय (algebraic) हो सकते हैं (अर्थात् इनमें चर होते हैं)। इस संख्यात्मक गुणनखंड को **पद का संख्यात्मक गुणांक (numerical coefficient)** या केवल **गुणांक** कहते हैं। इसे शेष पद (जो स्पष्टत: बीजीय गुणनखंडों का गुणनफल है) का गुणांक भी कहते हैं। इस प्रकार, पद $5xy$ में, xy का गुणांक 5 है। इसी प्रकार, पद $10xyz$, में xyz का गुणांक 10 है तथा पद $-7x^2y^2$ में x^2y^2 का गुणांक -7 है।

जब किसी पद का गुणांक $+1$ होता है, प्राय: उसे लिखते समय छोड़ दिया जाता है। उदाहरणार्थ, $1x$ को x लिखा जाता है, $1x^2y^2$ को x^2y^2 लिखा जाता है, इत्यादि। साथ ही, गुणांक (-1) को केवल ऋण चिह्न $(-)$ से दर्शाया जाता है। इस प्रकार, $(-1)x$ को $-x$ लिखा जाता है, $(-1)x^2y^2$ को $-x^2y^2$ लिखा जाता है, इत्यादि।

कभी-कभी शब्द गुणांक का प्रयोग एक अधिक व्यापक रूप में प्रयोग किया जाता है। इस रूप में, हम कहते हैं कि पद $5xy$ में, xy का गुणांक 5 है, $5y$ का गुणांक x है तथा $5x$ का गुणांक y है। $10xy^2$ में, xy^2 का गुणांक 10 है, $10y^2$ का गुणांक x है तथा $10x$ का गुणांक y^2 है। इस प्रकार, इसे अधिक व्यापक रूप में, गुणांक एक संख्यात्मक गुणनखंड हो सकता है या एक बीजीय गुणनखंड हो सकता है या दो या अधिक गुणनखंडों का गुणनफल भी हो सकता है। इसे शेष गुणनखंडों के गुणनफल का गुणांक कहा जाता है।

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित व्यंजकों के पदों के गुणांकों की पहचान कीजिए :

$4x - 3y$, $a + b + 5$, $2y + 5$, $2xy$

उदाहरण 1 निम्नलिखित व्यंजकों में, वे पद छाँटिए जो अचर नहीं हैं। उनके संख्यात्मक गुणांक भी लिखिए :

$xy + 4$, $13 - y^2$, $13 - y + 5y^2$, $4p^2q - 3pq^2 + 5$

हल

क्रम संख्या	व्यंजक	पद (जो अचर नहीं है)	संख्यात्मक गुणांक
(i)	$xy + 4$	xy	1
(ii)	$13 - y^2$	$-y^2$	-1
(iii)	$13 - y + 5y^2$	$-y$ $5y^2$	-1 5
(iv)	$4p^2q - 3pq^2 + 5$	$4p^2q$ $-3pq^2$	4 -3

उदाहरण 2

(a) निम्नलिखित व्यंजकों में x के क्या गुणांक हैं ?

$$4x - 3y,\ 8 - x + y,\ y^2x - y,\ 2z - 5xz$$

(b) निम्नलिखित व्यंजकों में y के क्या गुणांक हैं ?

$$4x - 3y,\ 8 + yz,\ yz^2 + 5,\ my + m$$

हल

(a) प्रत्येक व्यंजक में, हम गुणनखंड x वाले पद को देखते हैं। उस पद का शेष भाग x का वांछित गुणांक होगा।

क्रम संख्या	व्यंजक	गुणनखंड x वाला पद	x का गुणांक
(i)	$4x - 3y$	$4x$	4
(ii)	$8 - x + y$	$-x$	-1
(iii)	$y^2x - y$	y^2x	y^2
(iv)	$2z - 5xz$	$-5xz$	$-5z$

(b) इसकी विधि उपरोक्त (a) की विधि जैसी ही है।

क्रम संख्या	व्यंजक	गुणनखंड y वाला पद	y का गुणांक
(i)	$4x - 3y$	$-3y$	-3
(ii)	$8 + yz$	yz	z
(iii)	$yz^2 + 5$	yz^2	z^2
(iv)	$my + m$	my	m

12.4 समान और असमान पद

जब पदों के बीजीय गुणनखंड एक जैसे ही हों, तो वे पद **समान पद (like terms)** कहलाते हैं। जब पदों के बीजीय गुणनखंड भिन्न-भिन्न हों, तो वे **असमान पद** (unlike terms) कहलाते हैं। उदाहरणार्थ व्यंजक $2xy - 3x + 5xy - 4$, में पदों $2xy$ और $5xy$ को देखिए। $2xy$ के गुणनखंड 2, x और y है। $5xy$ के गुणनखंड 5, x और y हैं। इस प्रकार, इनके बीजीय (अर्थात् वे जिनमें चर हैं) गुणनखंड एक ही हैं और इसीलिए ये **समान पद** हैं। इसके विपरीत, पदों $2xy$ और $-3x$ में भिन्न-भिन्न बीजीय गुणनखंड हैं। ये **असमान पद** हैं। इसी प्रकार, पद $2xy$ और 4 असमान पद हैं। साथ ही, $-3x$ और 4 भी असमान पद हैं।

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित में, समान पदों के समूह बनाइए :

$12x, 12, -25x, -25, -25y, 1, x, 12y, y$

12.5 एकपदी, द्विपद, त्रिपद और बहुपद

वह बीजीय व्यंजक जिसमें केवल एक पद हो, **एकपदी** (monomial) कहलाता है, जैसे $7xy$, $-5m$, $3z^2$, 4 इत्यादि।

प्रयास कीजिए

निम्नलिखित व्यंजकों को एकपदी, द्विपद और त्रिपद के रूप में वर्गीकृत कीजिए : a, $a + b$, $ab + a + b$, $ab + a + b - 5$, xy, $xy + 5$, $5x^2 - x + 2$, $4pq - 3q + 5p$, 7, $4m - 7n + 10$, $4mn + 7$.

एक व्यंजक जिसमें केवल दो पद हों और वे असमान पद हों वह **द्विपद** (binomial) कहलाता है, उदाहरणार्थ $x + y$, $m - 5$, $mn + 4m$, $a^2 - b^2$ द्विपद हैं। व्यंजक $10pq$ एक द्विपद नहीं है यह एक एकपदी है। व्यंजक $(a + b + 5)$ एक द्विपद नहीं है। इसमें तीन पद हैं।

एक व्यंजक जिसमें तीन पद हों, **एक त्रिपद** (trinomial) कहलाता है, उदाहरणार्थ $x + y + 7$, $ab + a + b$, $3x^2 - 5x + 2$, $m + n + 10$ त्रिपद हैं। परंतु व्यंजक $ab + a + b + 5$ एक त्रिपद नहीं है इसमें तीन पद न होकर चार पद हैं। व्यंजक $x + y + 5x$ एक त्रिपद नहीं है क्योंकि पद x और $5x$ समान पद हैं।

व्यापक रूप में, एक या, अधिक पदों वाला व्यंजक **एक बहुपद** (Polynomial) कहलाता है। इस प्रकार, एकपदी, द्विपदी और त्रिपदी भी बहुपद हैं।

उदाहरण 3 कारण सहित बताइए कि पदों के निम्नलिखित युग्मों में कौन-कौन से युग्म समान पदों के हैं तथा कौन-कौन से युग्म असमान पदों के हैं :

(i) $7x, 12y$ (ii) $15x, -21x$ (iii) $-4ab, 7ba$ (iv) $3xy, 3x$

(v) $6xy^2, 9x^2y$ (vi) $pq^2, -4pq^2$ (vii) $mn^2, 10mn$

हल

क्रम संख्या	युग्म	गुणनखंड	बीजीय गुणनखंड एक ही हैं या भिन्न-भिन्न हैं	समान/ असमान पद	टिप्पणी
(i)	$7x$ $12y$	$7, x$ $12, y$	भिन्न-भिन्न	असमान	पदों में चर भिन्न-भिन्न हैं
(ii)	$15x$ $-21x$	$15, x$ $-21, x$	एक ही हैं	समान	
(iii)	$-4ab$ $7\ ba$	$-4, a, b$ $7, b, a$	एक ही हैं	समान	याद रखिए $ab = ba$
(iv)	$3xy$ $3x$	$3, x, y$ $3, x$	भिन्न-भिन्न	असमान	चर y केवल पहले पद में है
(v)	$6xy^2$ $9x^2y$	$6, x, y, y$ $9, x, x, y$	भिन्न-भिन्न	असमान	दोनों पदों में चर तो एक जैसे हैं; परंतु इनकी घातें अलग अलग हैं
(vi)	pq^2 $-4pq^2$	$1, p, q, q$ $-4, p, q, q$	एक ही हैं	समान	ध्यान दीजिए संख्यात्मक गुणांक 1 दिखाया नहीं जाता है

निम्नलिखित सरल चरण आपको यह निर्णय लेने में सहायक होंगे कि दिए हुए पद **समान** पद हैं या **असमान** पद हैं :

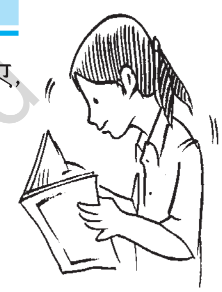
(i) संख्यात्मक गुणांकों पर ध्यान न दीजिए। पदों के बीजीय भाग पर अपना ध्यान केंद्रित कीजिए।

(ii) पदों में चरों की जाँच कीजिए। ये एक ही होने चाहिए।

(iii) अब, पदों में प्रत्येक चर की घातों की जाँच कीजिए। ये एक ही होनी चाहिए।

ध्यान दीजिए कि समान पदों के बारे मे निर्णय लेते समय, इन दो बातों से कोई प्रभाव नहीं पड़ता है : (1) पदों के संख्यात्मक गुणांक तथा (2) पदों में चरों के गुणा करने का क्रम।

प्रश्नावली 12.1



1. निम्नलिखित स्थितियों में, चरों, अचरों और अंक गणितीय संक्रियाओं का प्रयोग करते हुए, बीजीय व्यंजक प्राप्त कीजिए :

(i) संख्या y में से z को घटाना।

(ii) संख्याओं x और y के योग का आधा।

(iii) संख्या z को स्वयं उससे गुणा किया जाता है।

(iv) संख्याओं p और q के गुणनफल का एक-चौथाई।

(v) दोनों संख्याओं x और y के वर्गों को जोड़ा जाता है।

(vi) संख्याओं m और n के गुणनफल के तीन गुने में संख्या 5 जोड़ना।

(vii) 10 में से संख्याओं y और z गुणनफल को घटाना।

(viii) संख्याओं a और b के गुणनफल में से उनके योग को घटाना।

2. (i) निम्नलिखित व्यंजकों में पदों ओर उनके गुणनखंडों को छाँटिए। पदों और उनके गुणनखंडों को पेड़ आरेखों द्वारा भी दर्शाइए।

(a) $x - 3$ (b) $1 + x + x^2$ (c) $y - y^3$

(d) $5xy^2 + 7x^2y$ (e) $-ab + 2b^2 - 3a^2$

(ii) नीचे दिए व्यंजकों में, पदों और उनके गुणनखंडों को छाँटिए।

(a) $-4x + 5$ (b) $-4x + 5y$ (c) $5y + 3y^2$

(d) $xy + 2x^2y^2$ (e) $pq + q$ (f) $1.2\,ab - 2.4\,b + 3.6\,a$

(g) $\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$ (h) $0.1\,p^2 + 0.2\,q^2$

3. निम्नलिखित व्यंजकों में पदों के संख्यात्मक गुणांकों, जो अचर न हों, की पहचान कीजिए।

(i) $5 - 3t^2$ (ii) $1 + t + t^2 + t^3$ (iii) $x + 2xy + 3y$

(iv) $100m + 1000n$ (v) $-p^2q^2 + 7pq$ (vi) $1.2\,a + 0.8\,b$

(vii) $3.14\,r^2$ (viii) $2\,(l + b)$ (ix) $0.1\,y + 0.01\,y^2$

4. (a) वे पद पहचानिए जिनमें x है और फिर इनमें x का गुणांक लिखिए।

(i) $y^2x + y$ (ii) $13y^2 - 8yx$ (iii) $x + y + 2$

(iv) $5 + z + zx$ (v) $1 + x + xy$ (vi) $12xy^2 + 25$

(vii) $7 + xy^2$

(b) वे पद पहचानिए जिनमें y^2 है और फिर इनमें y^2 का गुणांक लिखिए।

(i) $8 - xy^2$ (ii) $5y^2 + 7x$ (iii) $2x^2y - 15xy^2 + 7y^2$

5. निम्नलिखित व्यंजकों को एकपदी, द्विपद और त्रिपद के रूप में वर्गीकृत कीजिए :

(i) $4y - 7z$ (ii) y^2 (iii) $x + y - xy$ (iv) 100

(v) $ab - a - b$ (vi) $5 - 3t$ (vii) $4p^2q - 4pq^2$ (viii) $7mn$

(ix) $z^2 - 3z + 8$ (x) $a^2 + b^2$ (xi) $z^2 + z$ (xii) $1 + x + x^2$

6. बताइए कि दिए हुए पदों के युग्म समान पदों के हैं या असमान पदों के हैं :

(i) $1, 100$ (ii) $-7x, \frac{5}{2}x$ (iii) $-29x, -29y$

(iv) $14xy, 42yx$ (v) $4m^2p, 4mp^2$ (vi) $12xz, 12x^2z^2$

7. निम्नलिखित में समान पदों को छाँटिए :

(a) $-xy^2, -4yx^2, 8x^2, 2xy^2, 7y, -11x^2, -100x, -11yx, 20x^2y,$
$-6x^2, y, 2xy, 3x$

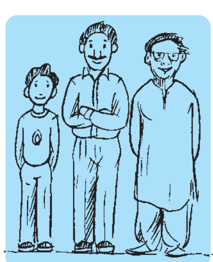
(b) $10pq, 7p, 8q, -p^2q^2, -7qp, -100q, -23, 12q^2p^2, -5p^2, 41, 2405p, 78qp,$
$13p^2q, qp^2, 701p^2$

12.6 बीजीय व्यंजकों के योग और व्यवकलन

निम्नलिखित समस्याओं पर विचार कीजिए :

1. सरिता के पास कुछ कँचे हैं। अमीना के पास उससे 10 कँचे अधिक हैं। अप्पू कहता है कि उसके पास सरिता और अमीना के पास कुल जितने कँचे हैं उससे 3 अधिक कँचे हैं। आप अप्पू के कँचों की संख्या कैसे ज्ञात करेंगे?

   चूँकि यह नहीं दिया गया है कि सरिता के पास कितने कँचे है, इसलिए हम इन्हें x मान लेते हैं। अमीना के पास इनसे 10 अधिक, अर्थात् $x + 10$ कँचे हैं। अप्पू कहता है कि उसके पास सरिता और अमीना के कुल कँचों से 3 अधिक कँचे हैं। अत: हम सरिता और अमीना के कँचों का योग ज्ञात करते हैं और उस योग में 3 जोड़ते हैं, अर्थात् हम x, $x + 10$ और 3 को जोड़ते हैं।



2. रामू के पिता की वर्तमान आयु रामू की आयु की तीन गुनी है। रामू के दादाजी की आयु रामू और रामू के पिता की आयु के योग से 13 वर्ष अधिक है। आप रामू के दादाजी की आयु किस प्रकार ज्ञात करेंगे?

   चूँकि रामू की आयु दी हुई नहीं है, इसलिए आइए इसे y वर्ष मान लें। तब, उसके पिता की आयु $3y$ वर्ष है। रामू के दादाजी की आयु ज्ञात करने के लिए, हमें रामू की आयु (y) और उसके पिता की आयु $(3y)$ का योग ज्ञात करके इस योग में 13 जोड़ना होगा, अर्थात् हमें y, $3y$ और 13 का योग ज्ञात करना पड़ेगा।

3. एक बाग में, गुलाब और गेंदे के पौधे वर्गाकार क्यारियों में लगाए जाते हैं। जिस वर्गाकार क्यारी में गेंदे के फूल लगाए जाते हैं उसकी भुजा की लंबाई उस वर्गाकार क्यारी की भुजा की लंबाई से 3 मीटर अधिक है, जिसमें गुलाब के पौधे लगाए गए हैं। गेंदे की क्यारी गुलाब की क्यारी से क्षेत्रफल में कितनी बड़ी है?

आइए गुलाब की क्यारी की भुजा को l मीटर मान लेते हैं। तब गेंदे की क्यारी की भुजा $(l + 3)$ मीटर होगी। इनके क्षेत्रफल (वर्ग मीटर में) क्रमशः l^2 और $(l + 3)^2$ होंगे। इन दोनों का अंतर ही यह बताएगा कि गेंदे के पौधों वाली क्यारी गुलाबों वाली क्यारी से क्षेत्रफल में कितनी बड़ी है।

उपरोक्त तीनों स्थितियों में, हमें बीजीय व्यंजकों को जोड़ना या घटाना पड़ा था। दैनिक जीवन में, इसी प्रकार की अनेक ऐसी स्थितियाँ हमारे सम्मुख आती हैं, जहाँ हमें बीजीय व्यंजकों का प्रयोग करना पड़ता है तथा उन पर अंकगणितीय संक्रियाएँ करनी पड़ती हैं। इस अनुच्छेद में, हम यह देखेंगे कि बीजीय व्यंजकों को किस प्रकार जोड़ा और घटाया जाता है।

प्रयास कीजिए

कम से कम ऐसी दो स्थितियों के बारे मे सोचिए जिनमें से प्रत्येक में आपको दो बीजीय व्यंजकों को बनाने की आवश्यकता पड़े और उन्हें जोड़ना या घटाना पड़े।

समान पदों का जोड़ना और घटाना

सरलतम व्यंजक एकपदी होते हैं। इनमें केवल एक ही पद होता है। प्रारंभ करने के लिए, हम यह सीखेंगे कि समान पदों को किस प्रकार जोड़ा या घटाया जाता है।

- आइए $3x$ और $4x$. को जोड़ें। हम जानते हैं कि x एक संख्या है तथा इसीलिए $3x$ और $4x$ भी संख्याएँ हैं।

  अब, $3x + 4x = (3 \times x) + (4 \times x)$

  $= (3 + 4) \times x$ वितरण या बंटन गुण के प्रयोग से

  $= 7 \times x = 7x$

  या $3x + 4x = 7x$

  चूँकि चर, संख्याएँ ही हैं, इसलिए हम वितरण गुण का प्रयोग कर सकते हैं।

- आइए अब आगे $8xy$, $4xy$ और $2xy$ को जोड़ें।

$$8xy + 4xy + 2xy = (8 \times xy) + (4 \times xy) + (2 \times xy)$$
$$= (8 + 4 + 2) \times xy$$
$$= 14 \times xy = 14xy$$

  या $8xy + 4xy + 2xy = 14\,xy$

- आइए $7n$ में से $4n$ को घटाएँ।

$$7n - 4n = (7 \times n) - (4 \times n)$$
$$= (7 - 4) \times n = 3 \times n = 3n$$

  या $7n - 4n = 3n$

- इसी प्रकार, $11ab$ में से $5ab$ को घटाइए।

$$11ab - 5ab = (11 - 5)\,ab = 6ab$$

इसी प्रकार, *दो या अधिक समान पदों का योग एक समान पद होता है, जिसका संख्यात्मक गुणांक सभी समान पदों के गुणांकों के योग के बराबर होता है।*

इसी प्रकार, *दो समान पदों का अंतर एक समान पद होता है, जिसका संख्यात्मक गुणांक दोनों समान पदों के संख्यात्मक गुणांकों के अंतर के बराबर होता है।*

ध्यान दीजिए कि ***असमान पदों को उस प्रकार जोड़ा या घटाया नहीं जा सकता, जिस प्रकार कि समान पदों को जोड़ या घटा लिया जाता है।*** इसके उदाहरण हम पहले ही देख चुके हैं। जब x में 5 को जोड़ा जाता है, तो हम इस परिणाम को $(x + 5)$ लिखते हैं। ध्यान दीजिए कि $(x + 5)$ में 5 और x दोनों ही पद पहले जैसे ही हैं। इसी प्रकार, यदि हम असमान पदों $3xy$ और 7 को जोड़े, तो योग $3xy + 7$ है।

यदि हम $3xy$ में से 7 घटाएँ, तो परिणाम $3xy - 7$ है।

व्यापक बीजीय व्यंजकों का जोड़ना और घटाना

आइए कुछ उदाहरण लें :

- $3x + 11$ और $7x - 5$ को जोड़िए।

  वांछित योग $= 3x + 11 + 7x - 5$

  अब, हम जानते हैं कि पद $3x$ और $7x$ समान पद हैं तथा 11 और -5 भी समान पद हैं। साथ ही, $3x + 7x = 10x$ और $11 + (-5) = 6$ हैं। अतः, हम उपरोक्त योग को नीचे दिए अनुसार सरल कर सकते हैं:

  योग $= 3x + 11 + 7x - 5$

  $= 3x + 7x + 11 - 5$ (पदों को पुनर्व्यवस्थित करने पर)

  $= 10x + 6$

  अतः, $3x + 11 + 7x - 5 = 10x + 6$

- $3x + 11 + 8z$ और $7x - 5$ को जोड़िए।

  योग $= 3x + 11 + 8z + 7x - 5$

  $= 3x + 7x + 11 - 5 + 8z$ (पदों को पुनर्व्यवस्थित करने पर)

  ध्यान दीजिए कि हमने समान पदों को एक साथ रखा है तथा अकेला असमान पद $8z$ उसी प्रकार रहता है।

  अतः, योग $= 10x + 6 + 8z$

- $3a - b + 4$ में से $a - b$ को घटाइए।

  अंतर $= 3a - b + 4 - (a - b)$

  $= 3a - b + 4 - a + b$

  ध्यान दीजिए कि किस प्रकार हमने $a - b$ को कोष्ठकों में रखा। तथा किस प्रकार कोष्ठकों को खोलते समय चिह्नों का ध्यान रखा है समान पदों को एक साथ रखने के लिए, पदों को पुनर्व्यवस्थित करने पर,

  अंतर $= 3a - a - b + b + 4$

  $= (3 - 1)\, a - (1 - 1)\, b + 4$

  अंतर $= 2a + (0)\, b + 4 = 2a + 4$

  या, $3a - b + 4 - (a - b) = 2a + 4$

> **ध्यान दीजिए :**
> जैसे $-(5 - 3) = -5 + 3$ है, उसी प्रकार $-(a - b) = -a + b$ है। बीजीय पदों के चिह्नों पर उसी प्रकार कार्य किया जाता है, जैसाकि संख्याओं के चिह्नों के साथ किया जाता है।

अब, हम अभ्यास के लिए, व्यंजकों के योग और व्यवकलन पर कुछ और उदाहरण हल करेंगे।

उदाहरण 4 समान पदों को एकत्रित करके, व्यंजक $12m^2 - 9m + 5m - 4m^2 - 7m + 10$ को सरल कीजिए :

हल पदों को पुनर्व्यवस्थित करने पर, हमें प्राप्त होता है:

$$\begin{aligned} &12m^2 - 4m^2 + 5m - 9m - 7m + 10 \\ &= (12 - 4)\, m^2 + (5 - 9 - 7)\, m + 10 \\ &= 8m^2 + (-4 - 7)\, m + 10 \\ &= 8m^2 + (-11)\, m + 10 \\ &= 8m^2 - 11m + 10 \end{aligned}$$

प्रयास कीजिए

जोड़िए और घटाइए:

(i) $m - n, m + n$

(ii) $mn + 5 - 2, mn + 3$

उदाहरण 5 $30ab + 12b + 14a$ में से $24ab - 10b - 18a$ को घटाइए।

हल

$$\begin{aligned} &30ab + 12b + 14a - (24ab - 10b - 18a) \\ &= 30ab + 12b + 14a - 24ab + 10b + 18a \\ &= 30ab - 24ab + 12b + 10b + 14a + 18a \\ &= 6ab + 22b + 32a \end{aligned}$$

वैकल्पिक रूप से, हम व्यंजकों को एक के नीचे एक करके इस प्रकार रखते हैं कि समान पद एक ही सीध, अर्थात् स्तंभों में रहें, जैसा नीचे दर्शाया गया है:

$$\begin{array}{ccccc} 30ab & + & 12b & + & 14a \\ 24ab & - & 10b & - & 18a \\ - & & + & & + \\ \hline 6ab & + & 22b & + & 32a \\ \hline \end{array}$$

ध्यान दीजिए कि एक पद घटाने का अर्थ है कि उसके योज्य प्रतिलोम को जोड़ना। अतः, $-10b$ घटाने का अर्थ है कि $+10b$ जोड़ना, $-18a$ घटाने का अर्थ है कि $+18a$ जोड़ना तथा $24ab$ घटाने का अर्थ है कि $-24ab$ को जोड़ना। घटाए जाने वाले व्यंजक के नीचे दर्शाए गए चिह्न, घटाने की प्रक्रिया को उचित रूप से करने में सहायक होते हैं।

उदाहरण 6 $2y^2 + 3yz, -y^2 - yz - z^2$ और $yz + 2z^2$ के योग में से $3y^2 - z^2$ और $-y^2 + yz + z^2$ के योग को घटाइए।

हल पहले हम $2y^2 + 3yz, -y^2 - yz - z^2$ और $yz + 2z^2$ को जोड़ते हैं।

$$\begin{array}{ccccccc} & 2y^2 & + & 3yz & & \\ - & y^2 & - & yz & - & z^2 \\ & & + & yz & + & 2z^2 \\ \hline & y^2 & + & 3yz & + & z^2 \\ \hline \end{array} \qquad (1)$$

फिर हम, $3y^2 - z^2$ और $-y^2 + yz + z^2$ को जोड़ते हैं।

$$\begin{array}{cccccc} & 3y^2 & & & - & z^2 \\ - & y^2 & + & yz & + & z^2 \\ \hline & 2y^2 & + & yz & & \\ \hline \end{array} \qquad (2)$$

अब हम योग (1) में से योग (2) को घटाते हैं।

$$\begin{array}{rrr} y^2 & +\ 3yz & +\ z^2 \\ 2y^2 & +\ yz & \\ - & - & \\ \hline -\ y^2 & +\ 2yz & +\ z^2 \\ \hline \end{array}$$

प्रश्नावली 12.2

1. समान पदों को संयोजित (मिला) करके सरल कीजिए :

(i) $21b - 32 + 7b - 20b$

(ii) $-z^2 + 13z^2 - 5z + 7z^3 - 15z$

(iii) $p - (p - q) - q - (q - p)$

(iv) $3a - 2b - ab - (a - b + ab) + 3ab + b - a$

(v) $5x^2y - 5x^2 + 3yx^2 - 3y^2 + x^2 - y^2 + 8xy^2 - 3y^2$

(vi) $(3y^2 + 5y - 4) - (8y - y^2 - 4)$

2. जोड़िए :

(i) $3mn, -5mn, 8mn, -4mn$

(ii) $t - 8tz, 3tz - z, z - t$

(iii) $-7mn + 5, 12mn + 2, 9mn - 8, -2mn - 3$

(iv) $a + b - 3, b - a + 3, a - b + 3$

(v) $14x + 10y - 12xy - 13, 18 - 7x - 10y + 8xy, 4xy$

(vi) $5m - 7n, 3n - 4m + 2, 2m - 3mn - 5$

(vii) $4x^2y, -3xy^2, -5xy^2, 5x^2y$

(viii) $3p^2q^2 - 4pq + 5, -10\ p^2q^2, 15 + 9pq + 7p^2q^2$

(ix) $ab - 4a, 4b - ab, 4a - 4b$

(x) $x^2 - y^2 - 1, y^2 - 1 - x^2, 1 - x^2 - y^2$

3. घटाइए :

(i) y^2 में से $-5y^2$

(ii) $-12xy$ में से $6xy$

(iii) $(a + b)$ में से $(a - b)$

(iv) $b\,(5 - a)$ में से $a\,(b - 5)$

(v) $4m^2 - 3mn + 8$ में से $-m^2 + 5mn$

(vi) $5x - 10$ में से $-x^2 + 10x - 5$

(vii) $3ab - 2a^2 - 2b^2$ में से $5a^2 - 7ab + 5b^2$

(viii) $5p^2 + 3q^2 - pq$ में से $4pq - 5q^2 - 3p^2$

4. (a) $2x^2 + 3xy$ प्राप्त करने के लिए, $x^2 + xy + y^2$ में क्या जोड़ना चाहिए ?

(b) $-3a + 7b + 16$ प्राप्त करने के लिए, $2a + 8b + 10$ में से क्या घटाना चाहिए ?

5. $-x^2 - y^2 + 6xy + 20$ प्राप्त करने के लिए, $3x^2 - 4y^2 + 5xy + 20$ में क्या निकाल लेना चाहिए ?

6. (a) $3x - y + 11$ और $-y - 11$ के योग में से $3x - y - 11$ को घटाइए।

(b) $4 + 3x$ और $5 - 4x + 2x^2$ के योग में से $3x^2 - 5x$ और $-x^2 + 2x + 5$ के योग को घटाइए।

12.7 किसी व्यंजक का मान ज्ञात करना

हम जानते हैं कि एक बीजीय व्यंजक का मान उस व्यंजक को बनाने वाले चरों के मानों पर निर्भर करता है। ऐसी अनेक स्थितियाँ हैं, जहाँ हमें व्यंजकों के मान ज्ञात करने होते हैं, जैसे कि हम यह जाँच करना चाहते हैं कि चर का एक विशेष मान एक दिए हुए समीकरण को संतुष्ट करता है या नहीं।

जब हम ज्यामिति और प्रतिदिन की गणित के सूत्रों का प्रयोग करते हैं, तो भी हम व्यंजकों के मान ज्ञात करते हैं। उदाहरणार्थ, भुजा l वाले वर्ग का क्षेत्रफल l^2 होता है। यदि $l = 5$ cm है, तो क्षेत्रफल 5^2 cm^2 = 25 cm^2 है। यदि भुजा = 10 cm है, तो क्षेत्रफल 10^2 cm^2 या 100 cm^2 है, इत्यादि। ऐसे कुछ और उदाहरणों को हम अगले अनुच्छेद में देखेंगे।

उदाहरण 7 निम्नलिखित व्यंजकों के मान $x = 2$ के लिए ज्ञात कीजिए :

(i) $x + 4$ (ii) $4x - 3$ (iii) $19 - 5x^2$

(iv) $100 - 10x^3$

हल

(i) $x + 4$ में, $x = 2$ रखने पर, हमें $x + 4$ का निम्नलिखित मान प्राप्त होता है:

$x + 4 = 2 + 4 = 6$

(ii) $4x - 3$ में, $x = 2$ रखने पर, हमें प्राप्त होता है:

$4x - 3 = (4 \times 2) - 3 = 8 - 3 = 5$

(iii) $19 - 5x^2$ में, $x = 2$ रखने पर, हमें प्राप्त होता है:

$19 - 5x^2 = 19 - (5 \times 2^2) = 19 - (5 \times 4) = 19 - 20 = -1$

(v) $100 - 10x^3$ में, $x = 2$ रखने पर, हमें प्राप्त होता है :

$100 - 10x^3 = 100 - (10 \times 2^3) = 100 - (10 \times 8)$ [ध्यान दीजिए कि $2^3 = 8$ है]

$= 100 - 80 = 20$

उदाहरण 8 निम्नलिखित व्यंजकों के मान ज्ञात कीजिए, जब $n = -2$

(i) $5n - 2$ (ii) $5n^2 + 5n - 2$ (iii) $n^3 + 5n^2 + 5n - 2$ है :

हल

(i) $5n - 2$ में, $n = -2$ रखने पर, हमें प्राप्त होता है:

$5(-2) - 2 = -10 - 2 = -12$

(ii) $5n^2 + 5n - 2$ में $n = -2$ के लिए, $5n - 2 = -12$ है,

और, $5n^2 = 5 \times (-2)^2 = 5 \times 4 = 20$ [चूँकि $(-2)^2 = 4$]

दोनों को मिलाने पर, हमें प्राप्त होता है :

$5n^2 + 5n - 2 = 20 - 12 = 8$

(iii) अब, $n = -2$ के लिए

$5n^2 + 5n - 2 = 8$ है तथा

$n^3 = (-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$ है।

दोनों के मिलाने पर,

$n^3 + 5n^2 + 5n - 2 = -8 + 8 = 0$

अब हम दो चरों के व्यंजकों, जैसे $x + y$, xy इत्यादि पर विचार करेंगे। दो चरों वाले एक व्यंजक का संख्यात्मक मान ज्ञात करने के लिए, हमें इसमें दोनों चरों के मान रखने की आवश्यकता होती है। उदाहरणार्थ, $x = 3$ और $y = 5$ के लिए $(x + y)$ का मान $3 + 5 = 8$ है।

उदाहरण 9 $a = 3$ और $b = 2$ के लिए, निम्नलिखित व्यंजकों के मान ज्ञात कीजिए:

(i) $a + b$ (ii) $7a - 4b$ (iii) $a^2 + 2ab + b^2$

(iv) $a^3 - b^3$

हल दिए हुए व्यंजकों में, $a = 3$ और $b = 2$ रखने पर, हमें प्राप्त होता है :

(i) $a + b = 3 + 2 = 5$

(ii) $7a - 4b = 7 \times 3 - 4 \times 2 = 21 - 8 = 13.$

(iii) $a^2 + 2ab + b^2 = 3^2 + 2 \times 3 \times 2 + 2^2 = 9 + 12 + 4 = 25$

(iv) $a^3 - b^3 = 3^3 - 2^3 = 3 \times 3 \times 3 - 2 \times 2 \times 2 = 9 \times 3 - 4 \times 2 = 27 - 8 = 19$

प्रश्नावली 12.3

1. यदि $m = 2$ है, तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए :

(i) $m - 2$ (ii) $3m - 5$ (iii) $9 - 5m$

(iv) $3m^2 - 2m - 7$ (v) $\frac{5m}{2}$ 4

2. यदि $p = -2$ है, तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए :

(i) $4p + 7$ (ii) $-3p^2 + 4p + 7$ (iii) $-2p^3 - 3p^2 + 4p + 7$

3. निम्नलिखित व्यंजकों के मान ज्ञात कीजिए, जब $x = -1$ है :

(i) $2x - 7$ (ii) $-x + 2$ (iii) $x^2 + 2x + 1$

(iv) $2x^2 - x - 2$

4. यदि $a = 2$ और $b = -2$ है, तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए :

(i) $a^2 + b^2$ (ii) $a^2 + ab + b^2$ (iii) $a^2 - b^2$

5. जब $a = 0$ और $b = -1$ है, तो दिए हुए व्यंजकों के मान ज्ञात कीजिए :

(i) $2a + 2b$ (ii) $2a^2 + b^2 + 1$ (iii) $2a^2b + 2ab^2 + ab$

(iv) $a^2 + ab + 2$

6. इन व्यंजकों को सरल कीजिए तथा इनके मान ज्ञात कीजिए, जब x का मान 2 है :

(i) $x + 7 + 4 (x - 5)$ (ii) $3 (x + 2) + 5x - 7$

(iii) $6x + 5 (x - 2)$ (iv) $4(2x - 1) + 3x + 11$

7. इन व्यंजकों को सरल कीजिए तथा इनके मान ज्ञात कीजिए, जब $x = 3$, $a = -1$और $b = -2$ है:

(i) $3x - 5 - x + 9$ (ii) $2 - 8x + 4x + 4$

(iii) $3a + 5 - 8a + 1$ (iv) $10 - 3b - 4 - 5b$

(v) $2a - 2b - 4 - 5 + a$

8. (i) यदि $z = 10$ है, तो $z^3 - 3(z - 10)$ का मान ज्ञात कीजिए :

(ii) यदि $p = -10$ है, तो $p^2 - 2p - 100$ का मान ज्ञात कीजिए ।

9. यदि $x = 0$ पर $2x^2 + x - a$ का मान 5 के बराबर है, तो a का मान क्या होना चाहिए ?

10. व्यंजक $2(a^2 + ab) + 3 - ab$ को सरल कीजिए और इसका मान ज्ञात कीजिए, जब $a = 5$ और $b = -3$ है ।

12.8 बीजीय व्यंजकों के प्रयोग–सूत्र और नियम

हम पहले भी देख चुके हैं कि गणित में सूत्रों (formulas) और नियम (rules) को संक्षिप्त और व्यापक रूप में, बीजीय व्यंजकों का प्रयोग करके लिखा जा सकता है। हम नीचे अनेक उदाहरण देखेंगे :

- **परिमाप सूत्र**

1. एक समबाहु त्रिभुज का परिमाप = $3 \times$ उसकी भुजा की लंबाई होता है। यदि इस समबाहु त्रिभुज की भुजा की लंबाई को l से व्यक्त करें, तो **उसका परिमाप = $3l$** का होगा।
2. इसी प्रकार, **एक वर्ग का परिमाप = $4l$ होता है**, जहाँ l वर्ग की भुजा की लम्बाई है।
3. एक सम पंचभुज (regular pentagon) **का परिमाप = $5l$ होता है**, जहाँ l उसकी भुजा की लंबाई है, इत्यादि।

- **क्षेत्रफल सूत्र**

1. यदि हम एक वर्ग की भुजा को l से व्यक्त करें, तो वर्ग का क्षेत्रफल = l^2 होता है।
2. यदि हम एक आयत की लंबाई और चौड़ाई को क्रमश: l और b से व्यक्त करें, तो आयत का क्षेत्रफल = $l \times b = lb$ होता है ।
3. इसी प्रकार, यदि एक त्रिभुज का आधार b और ऊचांई h है, तो त्रिभुज का

क्षेत्रफल = $\dfrac{b \times h}{2} = \dfrac{bh}{2}$ होता है।

एक बार किसी दी हुई राशि के लिए सूत्र, अर्थात् बीजीय व्यंजक ज्ञात हो जाए, तो उस राशि का मान वांछित प्रतिबंधों के अंतर्गत परिकलित किया जा सकता है।

उदाहरणार्थ, लंबाई 3 cm की भुजा वाले एक दिए हुए वर्ग का परिमाप, वर्ग के परिमाप के व्यंजक, अर्थात् $4l$ में $l = 3$ cm रखने पर प्राप्त किया जाता है।

दिए हुए वर्ग का परिमाप = (4×3) cm = 12 cm

इसी प्रकार, इस वर्ग का क्षेत्रफल, वर्ग के क्षेत्रफल के व्यंजक, अर्थात् l^2 में $l = 3$ cm रख कर प्राप्त किया जाता है।

दिए हुए वर्ग का क्षेत्रफल $= (3)^2$ cm^2 $= 9$ cm^2

- **संख्या प्रतिरूपों (Patterns) के लिए नियम**

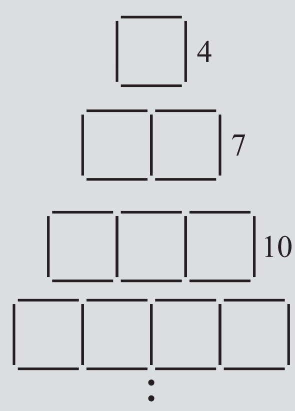
निम्नलिखित कथनों का अध्ययन कीजिए :

1. यदि किसी प्राकृत संख्या को n से व्यक्त किया जाए तो उसका परवर्ती (successor) $(n + 1)$ होता है। हम इसकी जाँच किसी भी प्राकृत संख्या के लिए कर सकते हैं। उदाहरणार्थ, यदि प्राकृत संख्या 10 है, तो उसका परिवर्ती $10 + 1 = 11$ है, जो सर्वविदित है (ज्ञात है) ।
2. यदि किसी प्राकृत संख्या को n से व्यक्त किया जाए, तो $2n$ एक सम संख्या होती है तथा $(2n + 1)$ एक विषम संख्या होती है। आइए इसकी जाँच कोई भी प्राकृत संख्या, माना 15 लेकर करें। अब, $2n = 2 \times 15 = 30$ है, जो वास्तव में एक सम संख्या है तथा $2n + 1 = 2 \times 15 + 1 = 30 + 1 = 31$ है, जो वास्तव में एक विषम संख्या है।

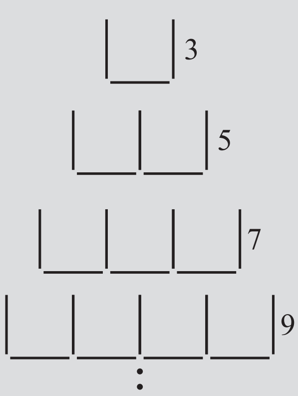
इन्हें कीजिए

माचिस की तीलियों, दाँत साफ़ करने की सीकों या सरकंडों के बराबर लंबाई के टुकड़ों के छोटे रेखाखंडों को लीजिए। उन्हें आकृतियों में दर्शाए अनुसार प्रतिरूपों (patterns) में जोड़िए :

1. आकृति 12.1 में बने पैटर्न को देखिए।
इसमें चार रेखाओं से बने आकार □ की पुनरावृत्ति हो रही है। जैसा कि आप देख सकते हैं कि एक आकार को बनाने के लिए चार रेखाखंडों की आवश्यकता होती है, दो आकारों के लिए 7, तीन आकारों के लिए 10, इत्यादि रेखाखंडों की आवश्यकता होती है। यदि आकारों की संख्या n हो, तो उन्हें बनाने के लिए आवश्यक रेखाखंडों की संख्या $(3n + 1)$ होगी। आप इसकी सत्यता की जाँच $n = 1, 2, 3,...,10,...$ इत्यादि लेकर कर सकते हैं। यदि बनाए गए आकारों की संख्या 3 है, तो आवश्यक रेखाखंडों की संख्या $3 \times 3 + 1 = 10$ होती, जैसाकि आकृति से भी देखा जासकता है।



आकृति 12.1

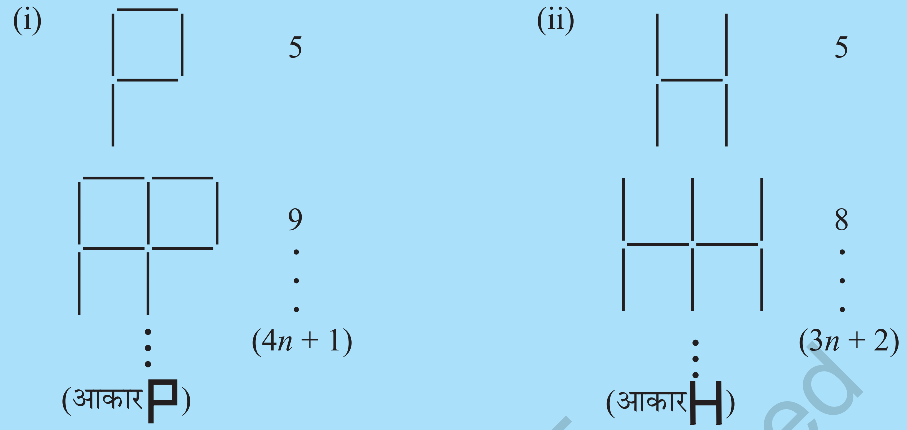


आकृति 12.2

2. अब आकृति 12.2 में दिए पैटर्न पर विचार कीजिए। यहाँ आकार ⊔ की पुनरावृत्ति हो रही है। आकारों 1,2,3,... को बनाने के लिए आवश्यक रेखाखंडों की संख्याएँ क्रमश: 3,5,7,9,... हैं। क्रमश: यदि n बनाए गए आकारों की संख्या को व्यक्त करता है तो आवश्यक रेखाखंडों की संख्या व्यंजक $(2n + 1)$ से प्राप्त होगी। व्यंजक सही है या नहीं, की जाँच आप n के किसी भी मान को लेकर कर सकते हैं। उदाहरणार्थ, $n = 4$ लेने पर, वांछित रेखाखंडों की संख्या, $2n + 1 = (2 \times 4) + 1 = 9$, होगी, जो वास्तव में 4 ⊔ के बनाने के लिए आवश्यक है।

प्रयास कीजिए

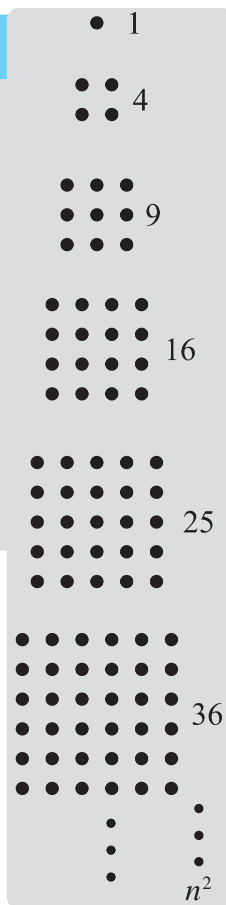
दर्शाए गए आधारभूत आकारों को लेकर उपरोक्त प्रकार के पैटर्न बनाइए :



[आकारों को बनाने के लिए आवश्यक रेखाखंडों की संख्या दाईं ओर लिखी हुई है। साथ ही n आकारों को बनाने के लिए आवश्यक रेखाखंडों के दर्शाने वाला व्यंजक भी दाईं ओर दिया हुआ है।]

आगे बढ़िए और ऐसी ही और पैटर्नों की खोज कीजिए।

इन्हें कीजिए



आकृति में दर्शाए अनुसार, बिंदुओं (dots) के पैटर्न बनाइए। यदि आप एक आलेख कागज़ या बिंदुकित कागज़ (dot paper) लें, तो पैटर्नों को बनाना सरल रहेगा।

देखिए कि किस प्रकार बिंदुओं को एक वर्ग के आकार में व्यवस्थित किया गया है। यदि किसी विशिष्ट आकार में एक पंक्ति या एक स्तंभ में बिंदुओं की संख्या चर n लेते हैं, तो आकार में कुल बिंदुओं की संख्या व्यंजक $n \times n = n^2$ से प्राप्त होगी। उदाहरणार्थ $n = 4$ लीजिए। उस आकार के लिए जिसकी प्रत्येक पंक्ति (या प्रत्येक स्तंभ) में 4 बिंदु हैं, तब कुल बिंदुओं की संख्या $4 \times 4 = 16$ होगी, जिसे वास्तव में आकृति से देखा जा सकता है। आप इसी प्रकार की जाँच n के अन्य मान लेकर भी कर सकते हैं। प्राचीन यूनानी गणितज्ञों ने इन संख्याओं 1, 4, 9, 16, ... को वर्ग संख्याओं (square numbers) से नामांकित किया।

- **कुछ और संख्या पैटर्न**

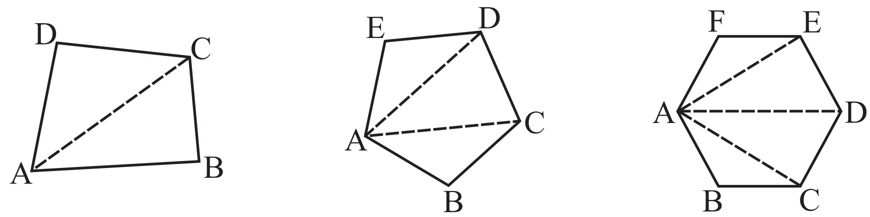
आइए संख्याओं के एक अन्य पैटर्न पर विचार करें, जिसमें हमारी सहायता के लिए कोई आकृति बनी हुई नहीं है : $3, 6, 9, 12, ..., 3n, ...$

ये संख्याएँ 3 के गुणज (multiples) हैं और इन्हें 3 से प्रारंभ करते हुए आरोही क्रम में व्यवस्थित किया गया है। n वें स्थान पर आने वाले पद को $3n$ से व्यक्त किया गया है इसकी सहायता से, आप सरलतापूर्वक 10वें स्थान पर आने वाले पद (जो $3 \times 10 = 30$ है) तथा 100 वें स्थान पर आने वाले पद (जो $3 \times 100 = 300$ है), इत्यादि ज्ञात कर सकते हैं।

● **ज्यामिति में पैटर्न**

एक चतुर्भुज के किसी शीर्ष से उसके कितने विकर्ण खींचे जा सकते हैं ? जाँच कीजिए कि इनकी संख्या एक है।

एक पंचभुज के एक शीर्ष से उसके कितने विकर्ण खींच सकते हैं ? जाँच कीजिए कि इनकी संख्या दो है।



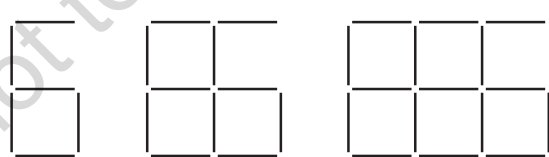
एक षटभुज के एक शीर्ष से उसके कितने विकर्ण खींचे जा सकते हैं? जाँच कीजिए यह संख्या 3 है।

n भुजा वाले किसी बहुभुज के एक शीर्ष से हम कुल $(n - 3)$ विकर्ण खींच सकते हैं। एक सप्तभुज (7 भुजाएँ) और अष्टभुज (8 भुजाएँ) के लिए, उनकी आकृतियाँ खींच करके इसकी जाँच कीजिए। यह संख्या एक त्रिभुज (3 भुजाएँ) के लिए क्या है ? ध्यान दीजिए कि किसी बहुभुज के किसी एक शीर्ष से खींचे गए विकर्ण उसे उतने अनानिव्यापी (non-overlapping) (जो एक दूसरे को न ढकते हों) त्रिभुजों में विभाजित करते हैं जितनी विकर्णों की संख्या से अधिक 1 संख्या होती है।

प्रश्नावली 12.4

1. बराबर लंबाई के रेखाखंडों से बनाए गए अंकों के पैटर्न को देखिए। आप रेखाखंडों से बने हुए इस प्रकार के अंकों को इलैक्ट्रॉनिक घड़ियों या कैलकुलेटरों पर देख सकते हैं।

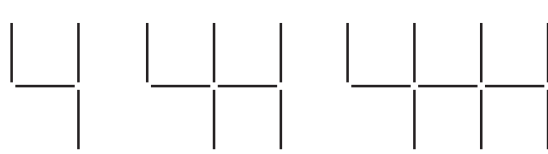
(a)



... ...

6 11 16 21 ... $(5n + 1)$ ...

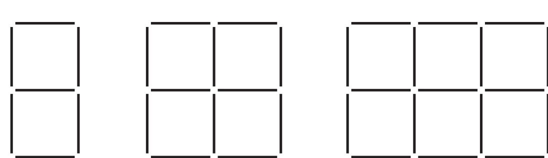
(b)



... ...

4 7 10 13 ... $(3n + 1)$ ...

(c)



... ...

7 12 17 22 ... $(5n + 2)$ ...

यदि बनाए गए अंकों की संख्या n ली जाए, तो उसके लिए आवश्यक रेखाखंडों की (n) संख्या दर्शाने वाला बीजीय व्यंजक प्रत्येक पैटर्न के दाईं ओर लिखा गया है।

5, 4, 8 के प्रकार के 5,10,100 अंकों को बनाने के लिए कितने रेखाखंडों की आवश्यकता होगी ?

2. संख्या पैटर्नों की निम्नलिखित सारणी को पूरा करने के लिए, दिए हुए बीजीय व्यंजकों का प्रयोग कीजिए :

क्रम संख्या	व्यंजक	पद									
		पहला	दूसरा	तीसरा	चौथा	पाँचवाँ	...	दसवाँ	...	सौवाँ	...
(i)	$2n-1$	1	3	5	7	9	-	19	-	-	-
(ii)	$3n+2$	5	8	11	14	-	-	-	-	-	-
(iii)	$4n+1$	5	9	13	17	-	-	-	-	-	-
(iv)	$7n+20$	27	34	41	48	-	-	-	-	-	-
(v)	n^2+1	2	5	10	17	-	-	-	-	10,001	-

हमने क्या चर्चा की ?

1. **चरों** और **अचरों** से **बीजीय व्यंजक** बनते हैं। व्यंजकों को बनाने के लिए, हम चरों और अचरों पर योग, व्यवकलन, गुणन और विभाजन की संक्रियाएँ करते हैं। उदाहरणार्थ, व्यंजक $4xy + 7$ चरों x और y तथा अचरों 4 और 7 से बनाया गया है। अचर 4 तथा चरों x और y को गुणा करके $4xy$ बनाकर उसमें 7 जोड़ कर $4xy + 7$ बनाया जाता है।

2. व्यंजक **पदों** से मिलकर बनते हैं। पदों को जोड़ कर व्यंजक बनाया जाता है। उदाहरणार्थ, पदों $4xy$ और 7 को जोड़ने से व्यंजक $4xy + 7$ बन जाता है।

3. एक **पद**, **गुणनखंडों** का एक **गुणनफल** होता है। व्यंजक $4xy + 7$ में पद $4xy$ गुणनखंडों x, y और 4 का एक गुणनफल है। चरों वाले गुणनखंड **बीजीय गुणनखंड** कहलाते हैं।

4. पद का **गुणांक** उसका संख्यात्मक गुणनखंड होता है। कभी-कभी पद का कोई भी एक गुणनखंड पद के शेष भाग का गुणांक कहलाता है।

5. एक या अधिक पदों से बना व्यंजक एक **बहुपद** कहलाता है। विशिष्ट रूप से, एक पद वाला व्यंजक **एकपदी**, दो पदों वाला व्यंजक **द्विपद** तथा तीन पदों वाला व्यंजक **त्रिपद** कहलाता है।

6. वे पद जिनमें बीजीय गुणनखंड एक जैसे हों, **समान पद** कहलाते हैं तथा भिन्न-भिन्न बीजीय गुणनखंडों वाले पद **असमान पद** कहलाते हैं। इस प्रकार $4xy$ और $-3xy$ समान पद हैं, परंतु $4xy$ और $-3x$ समान पद नहीं हैं।

7. **दो समान पदों का योग** (या **अंतर**) एक अन्य समान पद होता है, जिसका गुणांक उन समान पदों के **गुणांकों** के योग (या **अंतर**) के बराबर होता है। इस प्रकार, $8xy - 3xy = (8 - 3)xy$, अर्थात् $5xy$।

8. जब हम दो बीजीय व्यंजकों को **जोड़ते** हैं, तो समान पदों को, ऊपर वर्णित नियम के अनुसार जोड़ा जाता है; जो समान पद नहीं हैं उन्हें वैसे ही छोड़ दिया जाता है। इस प्रकार, $4x^2 + 5x$ और $2x + 3$ का योग $4x^2 + 7x + 3$ है। यहाँ समान पद $5x$ और $2x$ जुड़ कर $7x$ बन जाते हैं तथा **असमान** पदों $4x^2$ और 3 को वैसे ही छोड़ दिया जाता है।

9. एक समीकरण को हल करने और किसी सूत्र का प्रयोग करने जैसी स्थितियों में, हमें एक **व्यंजक का मान** ज्ञात करने की आवश्यकता होती है। बीजीय व्यंजक का मान उन चरों के मानों पर निर्भर करता है, जिनसे वह बनाया गया है। इस प्रकार, $x = 5$ के लिए $7x - 3$ का मान 32, है क्योंकि $7 \times 5 - 3 = 32$ है।

10. गणित में, बीजीय व्यंजकों का प्रयोग करते हुए, **नियमों और सूत्रों** को संक्षिप्त और व्यापक रूप में लिखा जाता है।

इस प्रकार, आयत का क्षेत्रफल $= lb$, है, जहाँ l आयत की लंबाई तथा b आयत की चौड़ाई है।

एक संख्या पैटर्न (या अनुक्रम) का व्यापक (nवाँ) पद, n में एक व्यंजक होता है। इस प्रकार, संख्या पैटर्न 11, 21, 31, 41, . . . का n वाँ पद $(10n + 1)$ है।

घातांक और घात

0757CH13

अध्याय 13

13.1 भूमिका

क्या आप जानते हैं कि पृथ्वी का द्रव्यमान (mass) क्या है? यह 5,970,000,000,000,000,000,000,000 kg है!

क्या आप इस संख्या को पढ़ सकते हैं?

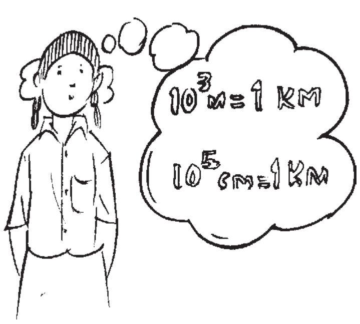
यूरेनस ग्रह (Uranus) का द्रव्यमान 86,800,000,000,000,000,000,000,000 kg है।

किसका द्रव्यमान अधिक है–पृथ्वी या यूरेनस ग्रह?

सूर्य (Sun) और शनि (Saturn) के बीच की दूरी 1,433,500,000,000 m है तथा शनि और यूरेनस ग्रह के बीच की दूरी 1,439,000,000,000 m है। क्या आप इन संख्याओं को पढ़ सकते हैं? इनमें कौन-सी दूरी कम है?

ऐसी बहुत बड़ी संख्याओं का पढ़ना, समझना और इनकी तुलना करना कठिन होता है। इन संख्याओं को सरलता से पढ़ने, समझने और इनकी तुलना करने के लिए, हम घातांकों (exponents) का प्रयोग करते हैं। इस अध्याय में, हम घातांकों के बारे में सीखेंगे तथा यह भी सीखेंगे कि इनका प्रयोग किस प्रकार किया जाता है।

13.2 घातांक



हम बड़ी संख्याओं को घातांकों का प्रयोग करके संक्षिप्त रूप में लिख सकते हैं। निम्नलिखित को देखिए : $10,000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$

संक्षिप्त संकेतन 10^4 गुणनफल $10 \times 10 \times 10 \times 10$ को व्यक्त करता है। यहाँ, '10' **आधार (base)** और '4' **घातांक** कहलाता है। **10^4** को **10 के ऊपर घात (power) 4 या केवल 10 की चौथी घात पढ़ा जाता है। 10^4** को 10000 का **घातांकीय रूप (exponential form)** कहा जाता है।

हम इसी प्रकार 1000 को भी 10 की घात के रूप में व्यक्त कर सकते हैं। ध्यान दीजिए कि

$$1000 = 10 \times 10 \times 10 = 10^3 \text{ है।}$$

यहाँ, पुनः 10^3 संख्या 1000 का घातांकीय रूप है।

इसी प्रकार, $1,00,000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^5$ है।

अर्थात्, 10^5 संख्या 1,00,000 का घातांकीय रूप है।

इन दोनों उदाहरणों में, आधार 10 है। 10^3 में घातांक 3 है तथा 10^5 में घातांक 5 है।

हम संख्याओं को विस्तारित या प्रसारित रूप (expanded form) में लिखने के लिए 10, 100, 1000 इत्यादि जैसी संख्याओं का प्रयोग कर चुके हैं।

उदाहरणार्थ, $47561 = 4 \times 10000 + 7 \times 1000 + 5 \times 100 + 6 \times 10 + 1$ है।

इसे $4 \times 10^4 + 7 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 6 \times 10 + 1$ के रूप में लिखा जा सकता है।

निम्नलिखित संख्याओं को इसी प्रकार लिखने का प्रयत्न कीजिए :

172, 5642, 6374

उपरोक्त सभी उदाहरणों में, हमने वे संख्याएँ देखी हैं जिनके आधार 10 हैं। परंतु आधार कोई भी संख्या हो सकती है। उदाहरणार्थ,

$81 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$ के रूप में लिखा जा सकता है। यहाँ आधार 3 है और घातांक 4 है।

कुछ घातों के विशिष्ट नाम हैं। उदाहरणार्थ :

10^2, जो 10 के ऊपर घात 2 है, इसे 10 का वर्ग (10 squared) भी पढ़ा जाता है।

10^3, जो 10 के ऊपर घात 3 है, इसे 10 का घन (10 cubed) भी पढ़ा जाता है।

क्या आप बता सकते हैं कि 5^3 (5 के घन) का क्या अर्थ है?

$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$

अतः हम कह सकते हैं कि 125 संख्या 5 की तीसरी घात (third power) है।

5^3 में आधार तथा घातांक क्या हैं?

इसी प्रकार $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ है, जो 2 की पाँचवीं घात है।

2^5 में, 2 आधार है तथा घातांक 5 है।

इसी विधि के अनुसार, $243 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$,

$64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6$

$625 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$

प्रयास कीजिए

ऐसे पाँच और उदाहरण दीजिए, जहाँ एक संख्या को घातांकीय रूप में व्यक्त किया जाता है। प्रत्येक स्थिति में, घातांक व आधार की पहचान भी कीजिए।

आप संक्षिप्त रूप में लिखने की इस विधि को तब भी लागू कर सकते हैं, जब आधार एक ऋणात्मक पूर्णांक हो।

$(-2)^3$ का क्या अर्थ है?

यह $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$ है।

क्या $(-2)^4 = 16$ है? इसकी जाँच कीजिए।

कोई निश्चित संख्या लेने के स्थान पर, आइए किसी भी संख्या a को आधार लें तथा संख्याओं को निम्नलिखित रूप में लिखें :

$a \times a = a^2$ (इसे 'a का वर्ग' या 'a के ऊपर घात 2' पढ़ा जाता है)

$a \times a \times a = a^3$ (इसे 'a का घन' या 'a के ऊपर घात 3' पढ़ा जाता है)

$a \times a \times a \times a = a^4$ (इसे a के ऊपर घात 4 या 'a की चौथी घात' पढ़ा जाता है)

$a \times a \times a \times a \times a \times a \times a = a^7$ (इसे 'a के ऊपर घात 7' या 'a की सातवीं घात' पढ़ा जाता है)

इत्यादि।

$a \times a \times a \times b \times b$ को a^3b^2 के रूप में व्यक्त किया जा सकता है (इसे a का घन गुणा b का वर्ग पढ़ा जाता है)।

$a \times a \times b \times b \times b \times b$ को a^2b^4 के रूप में व्यक्त किया जा सकता है (इसे a का वर्ग गुणा b पर 4 घात पढ़ा जाता है)।

प्रयास कीजिए

व्यक्त कीजिए :

(i) 729 को 3 की घात के रूप में

(ii) 128 को 2 की घात के रूप में

(iii) 343 को 7 की घात के रूप में

उदाहरण 1 256 को 2 की घात के रूप में व्यक्त कीजिए।

हल हमें प्राप्त है $256 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

अतः हम कह सकते हैं कि $256 = 2^8$

उदाहरण 2 2^3 और 3^2 में कौन बड़ा है?

हल हमें प्राप्त है कि $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ है तथा $3^2 = 3 \times 3 = 9$ है।

चूँकि $9 > 8$ है, इसलिए 3^2 संख्या 2^3 से बड़ा है।

उदाहरण 3 8^2 और 2^8 में कौन बड़ा है?

हल $8^2 = 8 \times 8 = 64$ है।

$2^8 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 256$ है।

स्पष्टतया, $2^8 > 8^2$

उदाहरण 4 $a^3 b^2$, $a^2 b^3$, $b^2 a^3$, और $b^3 a^2$ को प्रसारित रूप में लिखिए। क्या ये सभी बराबर हैं?

हल

$$a^3 b^2 = a^3 \times b^2$$
$$= (a \times a \times a) \times (b \times b)$$
$$= a \times a \times a \times b \times b$$
$$a^2 b^3 = a^2 \times b^3$$
$$= a \times a \times b \times b \times b$$
$$b^2 a^3 = b^2 \times a^3$$
$$= b \times b \times a \times a \times a$$
$$b^3 a^2 = b^3 \times a^2$$
$$= b \times b \times b \times a \times a$$

ध्यान दीजिए कि पद $a^3\,b^2$ और $a^2\,b^3$ की स्थिति में, a और b की घातें भिन्न-भिन्न हैं। इस प्रकार, $a^3\,b^2$ और $a^2\,b^3$ भिन्न-भिन्न हैं।

इसके विपरीत, $a^3\,b^2$ और $b^2\,a^3$ बराबर (एक ही) हैं, चूँकि इनमें a और b की घातें एक ही हैं। गुणनखंडों के क्रम से कोई प्रभाव नहीं पड़ता है।

इस प्रकार, $a^3\,b^2 = a^3 \times b^2 = b^2 \times a^3 = b^2\,a^3$ है।

इसी प्रकार $a^2\,b^3$ और $b^3\,a^2$ भी बराबर हैं।

उदाहरण 5 निम्नलिखित संख्याओं को अभाज्य गुणनखंडों की घातों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) 72 (ii) 432 (iii) 1000 (iv) 16000

2	72
2	36
2	18
3	9
	3

हल

(i) $72 = 2 \times 36 = 2 \times 2 \times 18$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 9$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^2$

इस प्रकार $72 = 2^3 \times 3^2$ (वांछित अभाज्य गुणनखंडों की घातों के गुणनफल वाला रूप)

(ii) $432 = 2 \times 216 = 2 \times 2 \times 108 = 2 \times 2 \times 2 \times 54$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 27 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 9$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$

या $432 = 2^4 \times 3^3$ (वांछित रूप)

(iii) $1000 = 2 \times 500 = 2 \times 2 \times 250 = 2 \times 2 \times 2 \times 125$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 25 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$

या $1000 = 2^3 \times 5^3$

> अतुल इस उदाहरण को निम्नलिखित विधि से हल करना चाहता है :
>
> $1000 = 10 \times 100 = 10 \times 10 \times 10$
>
> $= (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5)$ (चूँकि $10 = 2 \times 5$ है)
>
> $= 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$
>
> या $1000 = 2^3 \times 5^3$
>
> क्या अतुल की विधि सही है?

(iv) $16000 = 16 \times 1000 = (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times 1000$ (चूँकि $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$ है।)

$= (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5)$

(चूँकि $1000 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$ है।)

$= (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (5 \times 5 \times 5)$

या, $16000 = 2^7 \times 5^3$

उदाहरण 6 निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए।

$(1)^5, (-1)^3, (-1)^4, (-10)^3$ और $(-5)^4$:

हल

(i) हमें प्राप्त है, $(1)^5 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$

वास्तव में, 1 की कोई भी घात 1 के बराबर होती है।

(ii) $(-1)^3 = (-1) \times (-1) \times (-1) = 1 \times (-1) = -1$

(iii) $(-1)^4 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = 1 \times 1 = 1$

आप इसकी जाँच कर सकते हैं कि (–1) की कोई भी **विषम** घात (–1) के बराबर होती है तथा (–1) की कोई भी **सम** घात (+1) के बराबर होती है।

$(-1)^{\text{विषम संख्या}}$	$= -1$
$(-1)^{\text{सम संख्या}}$	$= +1$

(iv) $(-10)^3 = (-10) \times (-10) \times (-10) = 100 \times (-10) = -1000$

(v) $(-5)^4 = (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) = 25 \times 25 = 625$

प्रश्नावली 13.1

1. निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए :

(i) 2^6 (ii) 9^3 (iii) 11^2 (iv) 5^4

2. निम्नलिखित को घातांकीय रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) $6 \times 6 \times 6 \times 6$ (ii) $t \times t$ (iii) $b \times b \times b \times b$

(iv) $5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7$ (v) $2 \times 2 \times a \times a$ (vi) $a \times a \times a \times c \times c \times c \times c \times d$

3. निम्नलिखित संख्याओं में से प्रत्येक को घातांकीय संकेतन में व्यक्त कीजिए :

(i) 512 (ii) 343 (iii) 729 (iv) 3125

4. निम्नलिखित में से प्रत्येक भाग में, जहाँ भी संभव हो, बड़ी संख्या को पहचानिए:

(i) 4^3 या 3^4 (ii) 5^3 या 3^5 (iii) 2^8 या 8^2

(iv) 100^2 या 2^{100} (v) 2^{10} या 10^2

5. निम्नलिखित में से प्रत्येक को उनके अभाज्य गुणनखंडों की घातों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) 648 (ii) 405 (iii) 540 (iv) 3600

6. सरल कीजिए :

(i) 2×10^3 (ii) $7^2 \times 2^2$ (iii) $2^3 \times 5$ (iv) 3×4^4

(v) 0×10^2 (vi) $5^2 \times 3^3$ (vii) $2^4 \times 3^2$ (viii) $3^2 \times 10^4$

7. सरल कीजिए :

(i) $(-4)^3$ (ii) $(-3) \times (-2)^3$ (iii) $(-3)^2 \times (-5)^2$

(iv) $(-2)^3 \times (-10)^3$

8. निम्नलिखित संख्याओं की तुलना कीजिए :

(i) 2.7×10^{12} ; 1.5×10^8 (ii) 4×10^{14} ; 3×10^{17}

13.3 घातांकों के नियम

13.3.1 एक ही आधार वाली घातों का गुणन

(i) आइए $2^2 \times 2^3$ को परिकलित करें।

$$2^2 \times 2^3 = (2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2)$$
$$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 2^{2+3}$$

ध्यान दीजिए कि 2^2 और 2^3 में आधार एक ही (समान) है तथा घातांकों का योग, अर्थात् 2 और 3 का योग 5 है।

(ii) $(-3)^4 \times (-3)^3 = [(-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)] \times [(-3) \times (-3) \times (-3)]$

$= (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)$

$= (-3)^7$

$= (-3)^{4+3}$

पुन: ध्यान दीजिए कि आधार एक ही है तथा घातांकों का योग $4 + 3 = 7$ है।

(iii) $a^2 \times a^4 = (a \times a) \times (a \times a \times a \times a)$

$= a \times a \times a \times a \times a \times a = a^6$

(टिप्पणी: आधार एक ही है तथा घातांकों का योग $2 + 4 = 6$ है)

इसी प्रकार, सत्यापित कीजिए कि

$4^2 \times 4^2 = 4^{2+2}$

तथा $3^2 \times 3^3 = 3^{2+3}$ है।

प्रयास कीजिए

सरल करके घातांकीय रूप में लिखिए :

(i) $2^5 \times 2^3$

(ii) $p^3 \times p^2$

(iii) $4^3 \times 4^2$

(iv) $a^3 \times a^2 \times a^7$

(v) $5^3 \times 5^7 \times 5^{12}$

(vi) $(-4)^{100} \times (-4)^{20}$

क्या आप बॉक्स में उपयुक्त संख्या लिख सकते हैं ?

$(-11)^2 \times (-11)^6 = 11^{\square}$

$b^2 \times b^3 = b^{\square}$

(याद रखिए, आधार एक ही है, b कोई भी शून्येतर पूर्णांक है)।

$c^3 \times c^4 = c^{\square}$ (c कोई भी शून्येतर पूर्णांक है)।

$d^{10} \times d^{20} = d^{\square}$

यहाँ से हम व्यापक रूप से यह कह सकते हैं कि एक शून्येतर पूर्णांक a, के लिए, $a^m \times a^n = a^{m+n}$

होता है, जहाँ m और n पूर्ण संख्याएँ हैं।

सावधानी!

$2^3 \times 3^2$ पर विचार कीजिए।

क्या आप घातांकों को जोड़ सकते हैं? नहीं! क्या आप बता सकते हैं 'क्यों'? 2^3 का आधार 2 है और 3^2 का आधार 3 है। आधार एक समान नहीं हैं।

13.3.2 एक ही आधार वाली घातों का विभाजन

आइए $3^7 \div 3^4$ को सरल करें।

$$3^7 \div 3^4 = \frac{3^7}{3^4} = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{3 \times 3 \times 3 \times 3}$$

$$= 3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 3^{7-4}$$

इस प्रकार, $3^7 \div 3^4 = 3^{7-4}$ है।

[ध्यान दीजिए कि 3^7 और 3^4 के आधार एक ही हैं और $3^7 \div 3^4 = 3^{7-4}$ हो जाता है।]

इस प्रकार, $$5^6 \div 5^2 = \frac{5^6}{5^2} = \frac{5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5}{5 \times 5}$$

$$= 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4 = 5^{6-2}$$

या, $5^6 \div 5^2 = 5^{6-2}$ है।

मान लीजिए कि a कोई शून्येतर पूर्णांक है। तब,

$$a^4 \div a^2 = \frac{a^4}{a^2} = \frac{a \times a \times a \times a}{a \times a} = a \times a = a^2 = a^{4\;\;2}$$

या $\qquad a^4 \div a^2 = a^{4-2}$ है।

क्या अब आप तुरंत उत्तर दे सकते हैं?

$$10^8 \div 10^3 = 10^{8-3} = 10^5$$
$$7^9 \div 7^6 = 7^{\square}$$
$$a^8 \div a^5 = a^{\square}$$

शून्येतर पूर्णांक b और c के लिए

$$b^{10} \div b^5 = b^{\square}$$
$$c^{100} \div c^{90} = c^{\square}$$

व्यापक रूप में, किसी भी शून्येतर पूर्णांक a के लिए,

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

होता है, जहाँ m और n पूर्ण संख्याएँ हैं तथा $m > n$ है।

प्रयास कीजिए

सरल करके घातांकीय रूप में लिखिए:
(उदाहरण के लिए, $11^6 \div 11^2 = 11^4$)

(i) $2^9 \div 2^3$ (ii) $10^8 \div 10^4$
(iii) $9^{11} \div 9^7$ (iv) $20^{15} \div 20^{13}$
(v) $7^{13} \div 7^{10}$

13.3.3 एक घात की घात लेना

निम्नलिखित पर विचार कीजिए :

$\left(2^3\right)^2$ और $\left(3^2\right)^4$ को सरल कीजिए।

अब, $\left(2^3\right)^2$ का अर्थ है 2^3 का स्वयं से दो बार गुणा किया गया है।

$$\left(2^3\right)^2 = 2^3 \times 2^3$$
$$= 2^{3+3} \qquad (\text{चूँकि } a^m \times a^n = a^{m+n} \text{ है।})$$
$$= 2^6 = 2^{3 \times 2}$$

अर्थात् $\qquad \left(2^3\right)^2 = 2^{3\times2}$

इसी प्रकार, $\qquad \left(3^2\right)^4 = 3^2 \times 3^2 \times 3^2 \times 3^2$

$$= 3^{2+2+2+2}$$
$$= 3^8 \qquad (\text{देखिए कि 2 और 4 का गुणनफल 8 है।})$$
$$= 3^{2 \times 4}$$

क्या आप बता सकते हैं कि $\left(7^2\right)^{10}$ किसके बराबर है?

अत:, $\qquad \left(2^3\right)^2 = 2^{3 \times 2} = 2^6$

$$\left(3^2\right)^4 = 3^{2 \times 4} = 3^8$$

प्रयास कीजिए

सरल करके, उत्तर को घातांकीय रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) $\left(6^2\right)^4$ (ii) $\left(2^2\right)^{100}$
(iii) $\left(7^{50}\right)^2$ (iv) $\left(5^3\right)^7$

$$\left(7^2\right)^{10} = 7^{2 \times 10} = 7^{20}$$

$$\left(a^2\right)^3 = a^{2 \times 3} = a^6$$

$$(a^m)^3 = a^{m \times 3} = a^{3m}$$

उपरोक्त से, हम व्यापक रूप से कह सकते हैं कि किसी शून्येतर पूर्णांक 'a' के लिए,

$$\boxed{\left(a^m\right)^n = a^{mn}}$$

होता है, जहाँ m और n पूर्ण संख्याएँ हैं।

उदाहरण 7 क्या आप बता सकते हैं कि $(5^2) \times 3$ और $\left(5^2\right)^3$ में से कौन बड़ा है?

हल $(5^2) \times 3$ का अर्थ है कि 5^2 को 3 से गुणा किया गया है, अर्थात् यह $5 \times 5 \times 3 = 75$

परंतु $\left(5^2\right)^3$ का अर्थ है कि 5^2 का स्वयं से तीन बार गुणा किया गया है, अर्थात् यह

$$5^2 \times 5^2 \times 5^2 = 5^6 = 15625 \text{ है।}$$

अतः, $(5^2)^3 > (5^2) \times 3$ है।

13.3.4 समान घातांकों वाली घातों का गुणन

क्या आप $2^3 \times 3^3$ को सरल कर सकते हैं? ध्यान दीजिए कि यहाँ दोनों पदों 2^3 और 3^3 के आधार भिन्न-भिन्न हैं। परंतु इनके घातांक समान हैं।

अब
$$\begin{aligned} 2^3 \times 3^3 &= (2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3) \\ &= (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \\ &= 6 \times 6 \times 6 \\ &= 6^3 \quad \text{(देखिए 6 आधारों 2 और 3 का गुणनफल है)} \end{aligned}$$

देखिए
$$\begin{aligned} 4^4 \times 3^4 &= (4 \times 4 \times 4 \times 4) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3) \\ &= (4 \times 3) \times (4 \times 3) \times (4 \times 3) \times (4 \times 3) \\ &= 12 \times 12 \times 12 \times 12 \\ &= 12^4 \end{aligned}$$

साथ ही, देखिए
$$\begin{aligned} 3^2 \times a^2 &= (3 \times 3) \times (a \times a) \\ &= (3 \times a) \times (3 \times a) \\ &= (3 \times a)^2 \\ &= (3a)^2 \quad \text{(ध्यान दीजिए : } 3 \times a = 3a \text{)} \end{aligned}$$

इसी प्रकार
$$\begin{aligned} a^4 \times b^4 &= (a \times a \times a \times a) \times (b \times b \times b \times b) \\ &= (a \times b) \times (a \times b) \times (a \times b) \times (a \times b) \\ &= (a \times b)^4 \\ &= (ab)^4 \quad \text{(ध्यान दीजिए कि } a \times b = ab \text{ है)} \end{aligned}$$

व्यापक रूप में, किसी भी शून्येतर पूर्णांक के लिए,

$a^m \times b^m = (ab)^m$ होता है जहाँ, m एक पूर्ण संख्या है

उदाहरण 8 निम्नलिखत पदों को घातांकीय रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) $(2 \times 3)^5$ (ii) $(2a)^4$ (iii) $(-4m)^3$

हल

(i) $(2 \times 3)^5 = (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3)$
$= (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3)$
$= 2^5 \times 3^5$

(ii) $(2a)^4 = 2a \times 2a \times 2a \times 2a$
$= (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (a \times a \times a \times a)$
$= 2^4 \times a^4$

(iii) $(-4m)^3 = (-4 \times m)^3$
$= (-4 \times m) \times (-4 \times m) \times (-4 \times m)$
$= (-4) \times (-4) \times (-4) \times (m \times m \times m) = (-4)^3 \times (m)^3$

प्रयास कीजिए

$a^m \times b^m = (ab)^m$ का प्रयोग करके, अन्य रूप में बदलिए :

(i) $4^3 \times 2^3$ (ii) $2^5 \times b^5$

(iii) $a^2 \times t^2$ (iv) $5^6 \times (-2)^6$

(v) $(-2)^4 \times (-3)^4$

13.3.5 समान घातांकों वाली घातों से विभाजन

निम्नलिखित सरलीकरणों को देखिए :

(i) $$\frac{2^4}{3^4} = \frac{2\times2\times2\times2}{3\times3\times3\times3} = \frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^4$$

(ii) $$\frac{a^3}{b^3} = \frac{a\times a\times a}{b\times b\times b} = \frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^3$$

इन उदाहरणों से, हम कह सकते हैं कि व्यापक रूप में,

$a^m \div b^m = \dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$ जहाँ, a और b कोई दो शून्येतर पूर्णांक हैं तथा m एक पूर्ण संख्या है।

प्रयास कीजिए

$a^m \div b^m = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$ का प्रयोग करके, अन्य रूप में बदलिए:

(i) $4^5 \div 3^5$
(ii) $2^5 \div b^5$
(iii) $(-2)^3 \div b^3$
(iv) $p^4 \div q^4$
(v) $5^6 \div (-2)^6$

उदाहरण 9 प्रसार कीजिए: (i) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^4$ (ii) $\left(\dfrac{-4}{7}\right)^5$

हल

(i) $$\left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{3^4}{5^4} = \frac{3\times3\times3\times3}{5\times5\times5\times5}$$

(ii) $$\left(\frac{-4}{7}\right)^5 = \frac{(-4)^5}{7^5} = \frac{(-4)\times(-4)\times(-4)\times(-4)\times(-4)}{7\times7\times7\times7\times7}$$

● शून्य घातांक वाली संख्याएँ

क्या आप बता सकते हैं कि $\frac{3^5}{3^5}$ किसके बराबर है?

$$\frac{3^5}{3^5} = \frac{3\times3\times3\times3\times3}{3\times3\times3\times3\times3} = 1 \text{ है।}$$

घातांकों के नियमों का प्रयोग करते हुए,

$3^5 \div 3^5 = 3^{5-5} = 3^0$ है।

अतः $3^0 = 1$ है।

क्या आप बता सकते हैं कि 7^0 किसके बराबर है?

$7^3 \div 7^3 = 7^{3-3} = 7^0$

साथ ही, $\frac{7^3}{7^3} = \frac{7\times7\times7}{7\times7\times7} = 1$ है।

अतः $7^0 = 1$

इसी प्रकार, $a^3 \div a^3 = a^{3-3} = a^0$ है।

साथ ही $a^3 \div a^3 = \frac{a^3}{a^3} = \frac{a\times a\times a}{a\times a\times a} = 1$ है।

अतः, $a^0 = 1$ (किसी भी शून्येतर पूर्णांक a के लिए)

अतः, हम कह सकते हैं कि किसी भी संख्या (शून्य के अतिरिक्त) पर घात (या घातांक) 0 का मान 1 होता है।

> a^0 क्या है?
> निम्नलिखित पैटर्न को देखिए :
> $2^6 = 64$
> $2^5 = 32$
> $2^4 = 16$
> $2^3 = 8$
> $2^2 = ?$
> $2^1 = ?$
> $2^0 = ?$
> आप केवल पैटर्न देख कर ही 2^0 के मान का अनुमान लगा सकते हैं।
> आप देख सकते हैं कि $2^0 = 1$ है।
> यदि $3^6 = 729$, से प्रारंभ करें, तो ऊपर दर्शाई विधि से $3^5, 3^4, 3^3,...$ इत्यादि ज्ञात करते हुए, क्या आप 3^0 का मान बता सकते हैं?

13.4 घातांकों के नियमों का विविध उदाहरणों में प्रयोग

आइए ऊपर विकसित किए गए घातांकों के नियमों का प्रयोग करके, कुछ उदाहरण हल करें।

उदाहरण 10 $8 \times 8 \times 8 \times 8$ के लिए, आधार 2 लेते हुए, इसे घातांकीय रूप में लिखिए।

हल ज्ञात है कि, $8 \times 8 \times 8 \times 8 = 8^4$

परंतु हम जानते हैं कि $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$ है।

अतः, $8^4 = (2^3)^4 = 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3$

$= 2^{3\times4}$ (आप $(a^m)^n = a^{mn}$ का भी प्रयोग कर सकते हैं।)

$= 2^{12}$

उदाहरण 11 सरल कीजिए और उत्तर को घातांकीय रूप में लिखिए :

(i) $\left(\frac{3^7}{3^2}\right)\times 3^5$ (ii) $2^3 \times 2^2 \times 5^5$ (iii) $(6^2 \times 6^4) \div 6^3$

(iv) $((2^2)^3 \times 3^6) \times 5^6$ (v) $8^2 \div 2^3$

हल (i) $\left(\frac{3^7}{3^2}\right)\times 3^5 = \left(3^{7-2}\right)\times 3^5$

$= 3^5 \times 3^5 = 3^{5+5} = 3^{10}$

(ii) $2^3 \times 2^2 \times 5^5 = 2^{3+2} \times 5^5$

$= 2^5 \times 5^5 = (2 \times 5)^5 = 10^5$

(iii) $\left(6^2 \times 6^4\right) \div 6^3 = 6^{2+4} \div 6^3$

$= \dfrac{6^6}{6^3} = 6^{6-3} = 6^3$

(iv) $\left[\left(2^2\right)^3 \times 3^6\right] \times 5^6 = [2^6 \times 3^6] \times 5^6$

$= \left(2 \times 3\right)^6 \times 5^6$

$= \left(2 \times 3 \times 5\right)^6 = 30^6$

(v) $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

अतः, $8^2 \div 2^3 = (2^3)^2 \div 2^3$

$= 2^6 \div 2^3 = 2^{6-3} = 2^3$

उदाहरण 12 सरल कीजिए :

(i) $\dfrac{12^4 \times 9^3 \times 4}{6^3 \times 8^2 \times 27}$ (ii) $2^3 \times a^3 \times 5a^4$ (iii) $\dfrac{2 \times 3^4 \times 2^5}{9 \times 4^2}$

हल (i) यहाँ

$$\frac{12^4 \times 9^3 \times 4}{6^3 \times 8^2 \times 27} = \frac{(2^2 \times 3)^4 \times (3^2)^3 \times 2^2}{(2 \times 3)^3 \times (2^3)^2 \times 3^3}$$

$$= \frac{(2^2)^4 \times (3)^4 \times 3^{2\times3} \times 2^2}{2^3 \times 3^3 \times 2^{2\times3} \times 3^3} = \frac{2^8 \times 2^2 \times 3^4 \times 3^6}{2^3 \times 2^6 \times 3^3 \times 3^3}$$

$$= \frac{2^{8+2} \times 3^{4+6}}{2^{3+6} \times 3^{3+3}} = \frac{2^{10} \times 3^{10}}{2^9 \times 3^6}$$

$= 2^{10-9} \times 3^{10-6} = 2^1 \times 3^4$

$= 2 \times 81 = 162$

(ii) $2^3 \times a^3 \times 5a^4 = 2^3 \times a^3 \times 5 \times a^4$

$= 2^3 \times 5 \times a^3 \times a^4 = 8 \times 5 \times a^{3+4}$

$= 40\, a^7$

(ii) $\dfrac{2 \times 3^4 \times 2^5}{9 \times 4^2} = \dfrac{2 \times 3^4 \times 2^5}{3^2 \times \left(2^2\right)^2} = \dfrac{2 \times 2^5 \times 3^4}{3^2 \times 2^{2\times2}}$

$= \dfrac{2^{1+5} \times 3^4}{2^4 \times 3^2} = \dfrac{2^6 \times 3^4}{2^4 \times 3^2} = 2^{6-4} \times 3^{4-2}$

$= 2^2 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36$

टिप्पणी: इस अध्याय में, हमने अधिकांशतः ऐसे उदाहरण लिए हैं जिनमें आधार पूर्णांक हैं। परंतु इस अध्याय के सभी परिणाम उन स्थितियों के लिए भी सत्य हैं, जहाँ आधार परिमेय संख्याएँ हैं।

प्रश्नावली 13.2

1. घातांकों के नियमों का प्रयोग करते हुए, सरल कीजिए और उत्तर को घातांकीय रूप में लिखिए :

(i) $3^2 \times 3^4 \times 3^8$ (ii) $6^{15} \div 6^{10}$ (iii) $a^3 \times a^2$

(iv) $7^x \times 7^2$ (v) $\left(5^2\right)^3 \div 5^3$ (vi) $2^5 \times 5^5$

(vii) $a^4 \times b^4$ (viii) $\left(3^4\right)^3$ (ix) $\left(2^{20} \div 2^{15}\right) \times 2^3$

(x) $8^t \div 8^2$

2. निम्नलिखित में से प्रत्येक को सरल करके घातांकीय रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) $\dfrac{2^3 \times 3^4 \times 4}{3 \times 32}$ (ii) $\left[\left(5^2\right)^3 \times 5^4\right] \div 5^7$ (iii) $25^4 \div 5^3$

(iv) $\dfrac{3 \times 7^2 \times 11^8}{21 \times 11^3}$ (v) $\dfrac{3^7}{3^4 \times 3^3}$ (vi) $2^0 + 3^0 + 4^0$

(vii) $2^0 \times 3^0 \times 4^0$ (viii) $(3^0 + 2^0) \times 5^0$ (ix) $\dfrac{2^8 \times a^5}{4^3 \times a^3}$

(x) $\dfrac{a^5}{a^3} \times a^8$ (xi) $\dfrac{4^5 \times a^8 b^3}{4^5 \times a^5 b^2}$ (xii) $\left(2^3 \times 2\right)^2$

3. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य है या असत्य तथा अपने उत्तर का कारण भी दीजिए:

(i) $10 \times 10^{11} = 100^{11}$ (ii) $2^3 > 5^2$ (iii) $2^3 \times 3^2 = 6^5$

(iv) $3^0 = (1000)^0$

4. निम्नलिखित में से प्रत्येक को केवल अभाज्य गुणनखंडों की घातों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) 108×192 (ii) 270 (iii) 729×64

(iv) 768

5. सरल कीजिए :

(i) $\dfrac{\left(2^5\right)^2 \times 7^3}{8^3 \times 7}$ (ii) $\dfrac{25 \times 5^2 \times t^8}{10^3 \times t^4}$ (iii) $\dfrac{3^5 \times 10^5 \times 25}{5^7 \times 6^5}$

13.5 दशमलव संख्या पद्धति

आइए 47561 के निम्नलिखित प्रसार को देखें, जिससे हम पहले से ही परिचित हैं :

$$47561 = 4 \times 10000 + 7 \times 1000 + 5 \times 100 + 6 \times 10 + 1$$

हम इसे 10 की घातों का प्रयोग करते हुए, घातांकीय रूप में निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त कर सकते हैं :

$$47561 = 4 \times 10^4 + 7 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 1 \times 10^0$$

[ध्यान दीजिए : $10000 = 10^4$, $1000 = 10^3$, $100 = 10^2$, $10 = 10^1$ और $1 = 10^0$ है।]

आइए एक और संख्या को प्रसारित रूप में लिखें :

$$104278 = 1 \times 100{,}000 + 0 \times 10000 + 4 \times 1000 + 2 \times 100 + 7 \times 10 + 8 \times 1$$
$$= 1 \times 10^5 + 0 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 8 \times 10^0$$
$$= 1 \times 10^5 + 4 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 8 \times 10^0$$

ध्यान दीजिए कि किस प्रकार 10 के घातांक अधिकतम मान 5 से प्रारंभ होते हुए एक-एक करके घटते हुए, 0 तक आ जाते हैं।

13.6 बड़ी संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त करना

आइए, इस अध्याय की प्रारंभिक स्थिति पर वापस आ जाएँ। हमने कहा था कि बड़ी संख्याओं को, घातांकों का प्रयोग करके सुविधाजनक रूप से व्यक्त किया जा सकता है। इसे अभी तक हमने दिखाया नहीं है। अब हम ऐसा करेंगे।

1. सूर्य हमारी आकाशगंगा (Milky Way Galaxy) के केंद्र से 300,000,000,000,000,000,000 m की दूरी पर स्थित है।
2. हमारी आकाशगंगा में 100,000,000,000 तारे हैं।
3. पृथ्वी का द्रव्यमान 5,976,000,000,000,000,000,000,000 kg है।

प्रयास कीजिए

10 की घातों का प्रयोग करते हुए, घातांकीय रूप में प्रसारित कीजिए :
(i) 172
(ii) 5643
(iii) 56439
(iv) 176428

ये संख्याएँ पढ़ने और लिखने की दृष्टि से सुविधाजनक नहीं हैं। इनको सुविधाजनक बनाने के लिए, हम घातों (या घातांकों) का प्रयोग करते हैं।

निम्नलिखित को देखिए :

$$59 = 5.9 \times 10 = 5.9 \times 10^1$$
$$590 = 5.9 \times 100 = 5.9 \times 10^2$$
$$5900 = 5.9 \times 1000 = 5.9 \times 10^3$$
$$59000 = 5.9 \times 10000 = 5.9 \times 10^4 \text{ इत्यादि।}$$

हमने इन सभी संख्याओं को **मानक रूप (standard form)** में व्यक्त कर दिया है। किसी भी संख्या को 1.0 और 10.0 के बीच की एक दशमलव संख्या (जिसमें 1.0 सम्मिलित है) और 10 की किसी घात के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। संख्या के इस रूप को उसका **मानक रूप** कहते हैं। इस प्रकार,

$5985 = 5.985 \times 1000 = 5.985 \times 10^3$ संख्या 5985 का मानक रूप है।

ध्यान दीजिए कि 5985 को 59.85×100 या 59.85×10^2 के रूप में भी व्यक्त किया जा सकता है। परंतु यह 5985 का मानक रूप नहीं है। इसी प्रकार

$5985 = 0.5985 \times 10000 = 0.5985 \times 10^4$ भी 5985 का मानक रूप नहीं है।

अब हम इस अध्याय के प्रारंभ में आई हुई संख्याओं को इस मानक रूप में व्यक्त करने में सक्षम हो गए हैं।

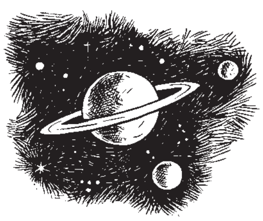
हमारी आकाशगंगा के केंद्र से सूर्य की दूरी अर्थात्,

300,000,000,000,000,000,000 m को

$3.0 \times 100,000,000,000,000,000,000$ m $= 3.0 \times 10^{20}$ m

के रूप में लिखा जा सकता है। अब, क्या आप 40,000,000,000 को इसी रूप में व्यक्त कर सकते हैं? इसमें शून्यों की संख्या को गिनिए। यह 10 है।

अतः $40,000,000,000 = 4.0 \times 10^{10}$ है।



पृथ्वी का द्रव्यमान = 5,976,000,000,000,000,000,000,000 kg

$= 5.976 \times 10^{24}$ kg है।

क्या आप इस बात से सहमत हैं कि पढ़ने, समझने और तुलना करने की दृष्टि से मानक रूप में लिखी यह संख्या उस 25 अंकों की संख्या की अपेक्षा बहुत अधिक सरल या सुविधाजनक है?

अब, यूरेनस ग्रह का द्रव्यमान = 86,800,000,000,000,000,000,000,000 kg

$= 8.68 \times 10^{25}$ kg है।

अब, उपरोक्त दोनों व्यंजकों में केवल 10 की घातों की तुलना करके ही, आप यह कह सकते हैं कि यूरेनस ग्रह का द्रव्यमान पृथ्वी से अधिक है।

सूर्य और शनि के बीच की दूरी 1,433,500,000,000 m या 1.4335×10^{12} m है। शनि और यूरेनस के बीच की दूरी 1,439,000,000,000 m या 1.439×10^{12} m हैं। सूर्य और पृथ्वी के बीच की दूरी 149, 600,000,000 m या 1.496×10^{11} m है।

क्या आप बता सकते हैं कि इन तीनों दूरियों में कौन-सी दूरी न्यूनतम है?

उदाहरण 13 निम्नलिखित संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) 5985.3 (ii) 65950

(iii) 3,430,000 (iv) 70,040,000,000

हल

(i) $5985.3 = 5.9853 \times 1000 = 5.9853 \times 10^3$

(ii) $65950 = 6.595 \times 10000 = 6.595 \times 10^4$

(iii) $3,430,000 = 3.43 \times 1000,000 = 3.43 \times 10^6$

(iv) $70,040,000,000 = 7.004 \times 10,000,000,000 = 7.004 \times 10^{10}$

यहाँ ध्यान रखने योग्य बात यह है कि दशमलव बिंदु से बाईं ओर के (अंकों की संख्या) गिनकर, उसमें से 1 घटा कर जो प्राप्त होता है, वही 10 का घातांक होता है, जिसे मानक रूप में प्रयोग किया जाता है। हम इस बिंदु की कल्पना, संख्या के (दाएँ) सिरे पर कर लेते हैं। यहाँ से बाईं ओर अंकों की (संख्या) 11 है। इसलिए, मानक रूप में व्यक्त करने के लिए, 10 का घातांक $11 - 1 = 10$ है। इसलिए इसके मानक रूप में 10 का घातांक $4 - 1 = 3$ है।

प्रश्नावली 13.3

1. निम्नलिखित संख्याओं को प्रसारित रूप में लिखिए :

279404, 3006194, 2806196, 120719, 20068

2. निम्नलिखित प्रसारित रूपों में से प्रत्येक के लिए संख्या ज्ञात कीजिए :

(a) $8 \times 10^4 + 6 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 5 \times 10^0$

(b) $4 \times 10^5 + 5 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 2 \times 10^0$

(c) $3 \times 10^4 + 7 \times 10^2 + 5 \times 10^0$

(d) $9 \times 10^5 + 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1$

3. निम्नलिखित संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) 5,00,00,000 (ii) 70,00,000 (iii) 3,18,65,00,000

(iv) 3,90,878 (v) 39087.8 (vi) 3908.78

4. निम्नलिखित कथनों में प्रकट होने वाली (आने वाली) संख्याओं को मानक रूप में व्यक्त कीजिए।

(a) पृथ्वी और चंद्रमा के बीच की दूरी 384,000,000 m है।

(b) निर्वात स्थान में प्रकाश की चाल (या वेग) 300,000,000 m/sec. है।

(c) पृथ्वी का व्यास 12756000 m है।

(d) सूर्य का व्यास 1,400,000,000 m है।

(e) एक आकाशगंगा में औसतन 100,000,000,000 तारे हैं।

(f) विश्व मंडल (या सौर मंडल) 12,000,000,000 वर्ष पुराना आकलित किया गया है।

(g) आकाशगंगा के मध्य से सूर्य की दूरी 300,000,000,000,000,000,000 m आकलित की गई है।

(h) 1.8 g भार वाली पानी की एक बूंद में 60,230,000,000,000,000,000,000 अणु (molecules) होते हैं।

(i) पृथ्वी में 1,353,000,000 km^3 समुद्र जल है।

(j) मार्च 2001 में भारत की जनसंख्या 1,027,000,000 थी।

हमने क्या चर्चा की?

1. बहुत बड़ी संख्याएँ पढ़ने, समझने, तुलना करने और उन पर संक्रियाएँ करने की दृष्टि से कठिन होती हैं। इनको सरल बनाने के लिए, हम इन अधिकांश बड़ी संख्याओं को घातांकों का प्रयोग करके संक्षिप्त रूप में लिखते हैं।

2. कुछ संख्याओं के घातांकीय रूप निम्नलिखित हैं :

$10000 = 10^4$ (इसे 10 के ऊपर घात 4 पढ़ा जाता है)

$243 = 3^5$, $\quad 128 = 2^7$.

यहाँ, 10, 3 और 2 आधार हैं तथा 4, 5 और 7 क्रमशः इनके घातांक हैं। हम यह भी कहते हैं कि 10 की चौथी घात 10000 है, 3 की पाँचवीं घात 243 है, इत्यादि।

3. घातांकीय रूप में संख्याएँ कुछ नियमों का पालन करती हैं, जो इस प्रकार हैं :

किन्हीं शून्येतर पूर्णांकों a और b तथा पूर्ण संख्याओं m और n के लिए,

(a) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

(b) $a^m \div a^n = a^{m-n}$, $\quad m > n$

(c) $(a^m)^n = a^{mn}$

(d) $a^m \times b^m = (ab)^m$

(e) $a^m \div b^m = \frac{a}{b}^{\,m}$

(f) $a^{\circ} = 1$

(g) $(-1)^{\text{सम संख्या}} = 1$

$(-1)^{\text{विषम संख्या}} = -1$

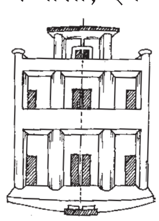
अध्याय 14

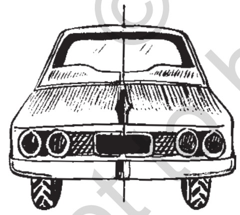
सममिति

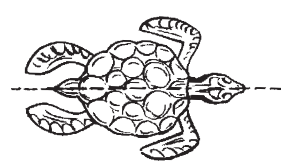
0757CH14

14.1 भूमिका

सममिति (Symmetry) एक महत्वपूर्ण ज्यामितीय अवधारणा है, जो सामान्यत: प्रकृति में प्रदर्शित होती है तथा क्रियाकलाप के लगभग सभी क्षेत्रों में इसका प्रयोग होता है। कलाकार, व्यवसायी, कपड़े या ज्वैलरी डिज़ाइन करने वाले, कार निर्माता, आर्किटेक्ट तथा अनेक अन्य सममिति की संकल्पना का प्रयोग करते हैं। मधुमक्खियों के छत्तों, फूलों, पेड़ की पत्तियों, धार्मिक चिह्नों, कंबलों और रूमालों, इन सभी स्थानों पर आपको सममित डिज़ाइन दिखाई देंगे।


आर्किटेक्चर

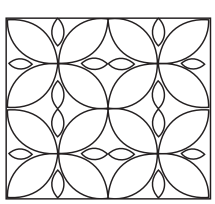

इंजीनियरिंग


प्रकृति

आप पिछली कक्षा में, **रैखिक सममिति** का कुछ 'अनुभव' कर चुके हैं।

एक आकृति मे रैखिक सममिति होती है, यदि उसमें एक रेखा ऐसी हो जिसके अनुदिश उस आकृति को मोड़ने पर, आकृति के दोनों भाग परस्पर संपाती हो जाते हों।

इन अवधारणाओं को आप याद कर सकते हैं। आपकी सहायता के लिए यहाँ कुछ क्रियाकलाप दिए जा रहे हैं।

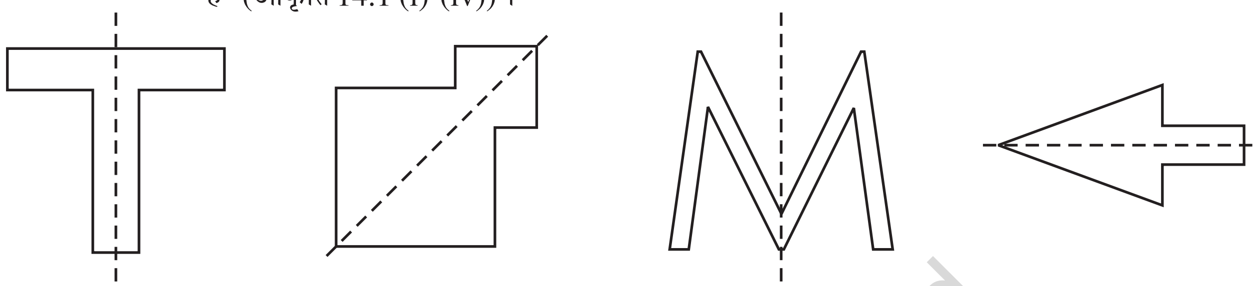

सममिति दर्शाने वाली एक पिक्चर एलबम बनाइए


कुछ रंगीन आकर्षक इंक-डाट डेविल्स बनाइए


कागज़ के कटे हुए कुछ सममिति डिज़ाइन बनाइए

आपके द्वारा एकत्रित किए गए डिज़ाइन में सममित रेखाओं (या अक्षों) को पहचानने का आनंद लीजिए ।

आइए अब सममिति पर अपनी अवधारणाओं को और अधिक प्रबल बनाएँ। निम्नलिखित आकृतियों का अध्ययन कीजिए, जिनमें सममित रेखाओं को बिंदुकित रेखाओं से अंकित किया गया है (आकृति 14.1 (i)-(iv)) ।



(i) (ii) (iii) (iv)

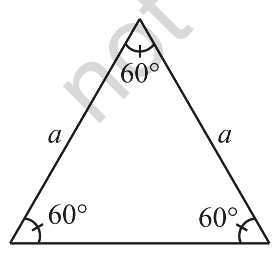
आकृति 14.1

14.2 सम बहुभुजों के लिए सममित रेखाएँ

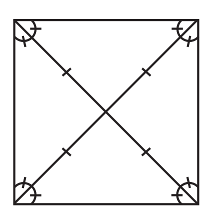
आप जानते हैं कि बहुभुज (polygon) एक ऐसी बंद आकृति है, जो अनेक रेखाखंडों से बनी होती है। सबसे कम रेखाखंडों से बना बहुभुज एक त्रिभुज है। (क्या आप इन रेखाखंडों से कम रेखाखंडों वाला कोई अन्य बहुभुज बना सकते हैं ? इसके बारे में सोचिए।)

एक बहुभुज, सम बहुभुज (regular polygon) कहलाता है, यदि इसकी सभी भुजाओं की लंबाइयाँ बराबर हों तथा सभी कोणों के माप बराबर हों। इस प्रकार, एक समबाहु त्रिभज, तीन भुजाओं वाला एक सम बहुभुज होता है। क्या चार भुजाओं वाला एक सम बहुभुज होता है ? क्या आप चार भुजाओं वाले एक सम बहुभुज का नाम बता सकते हैं ?

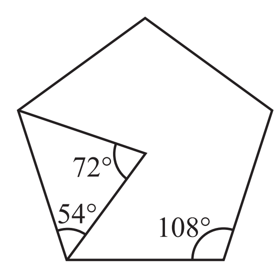
एक समबाहु त्रिभुज एक सम बहुभुज है, क्योंकि इसकी प्रत्येक भुजा की लंबाई समान होती है तथा इसके प्रत्येक कोण की माप 60° होती है (आकृति 14.2)।



आकृति 14.2



आकृति 14.3

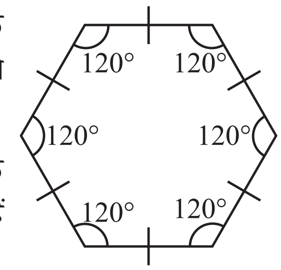


आकृति 14.4

वर्ग भी एक सम बहुभुज है, क्योंकि इसकी सभी भुजाएँ समान लंबाइयों की होती हैं तथा इसका प्रत्येक कोण एक समकोण (अर्थात् 90°) होता है। इसके विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित होते हैं (आकृति 14.3)।

यदि एक पंचभुज (pentagon) एक सम बहुभुज है, तो स्वाभाविक है कि इसकी भुजाएँ बराबर लंबाइयों की होनी चाहिए तथा इसके कोणों के माप बराबर होने चाहिए। बाद में आप पढ़ेंगे कि इसके प्रत्येक कोण की माप 108° होती है (आकृति 14.4)।

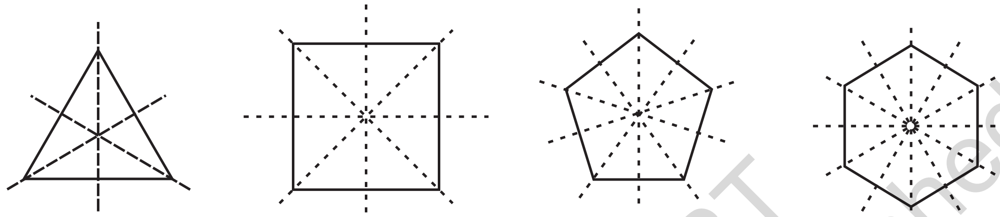
एक सम षड्भुज (regular hexagon) की सभी भुजाएँ बराबर होती हैं तथा इसके प्रत्येक कोण की माप 120° होती है। इस आकृति के बारे में आप और अधिक बाद में पढ़ेंगे (आकृति 14.5)।



आकृति 14.5

सम बहुभुज सममित आकृतियाँ होती हैं और इसीलिए इनकी सममित रेखाएँ बहुत रोचक हैं। प्रत्येक समबहुभुज की उतनी ही सममित रेखाएँ होती हैं, जितनी उसकी भुजाएँ हैं [आकृति 14.6 (i) से (iv)]।

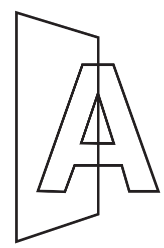
तीन सममित रेखाएँ | चार सममित रेखाएँ | पाँच सममित रेखाएँ | छ: सममित रेखाएँ



समबाहु त्रिभुज (i) | वर्ग (ii) | सम पंचभुज (iii) | सम षड्भुज (iv)

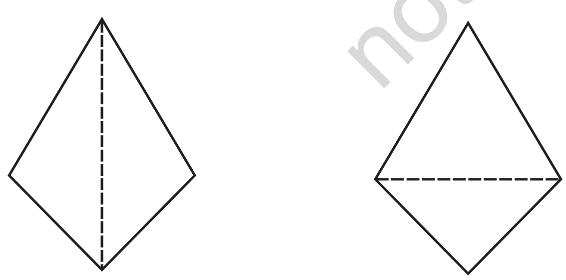
आकृति 14.6

संभवत:, आप कागज़ मोड़ने के क्रियाकलापों द्वारा इसकी खोज करना चाहेंगे। कोई बात नहीं, आगे बढ़िए!



आकृति 14.7

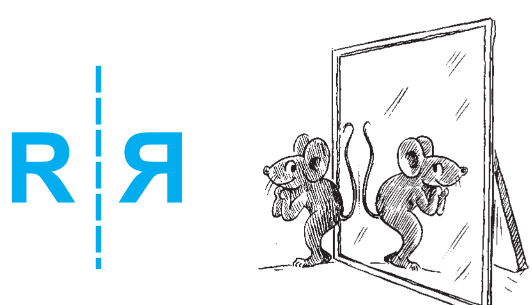
रैखिक सममिति की अवधारण का दर्पण परावर्तन (mirror reflection) से निकट का संबंध है। एक आकार (shape) में रैखिक सममिति तब होती है, जब उसका एक आधा भाग दूसरे आधे भाग का दर्पण प्रतिबिंब (mirror image) हो(आकृति 14.7)। इस प्रकार एक दर्पण रेखा हमें एक सममित रेखा देखने या ज्ञात करने में सहायता करती है (आकृति 14.8)।



क्या बिंदुकित रेखा दर्पण रेखा है ? हाँ।

क्या बिंदुकित रेखा दर्पण रेखा है ? नहीं।

आकृति 14.8



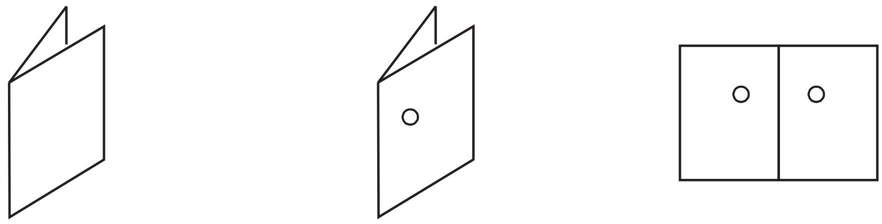
(i) (ii)

यहाँ आकार तो समान हैं; परंतु दिशाएँ विपरीत हैं।

आकृति 14.9

दर्पण परावर्तन के साथ कार्य करते समय, यह ध्यान रखना चाहिए कि एक आकृति के अभिमुखों (orientations) में दाएँ-बाएँ (left-right) परिवर्तन हो जाता है (आकृति 14.9)।

छेद करने वाला यह खेल खेलिए !



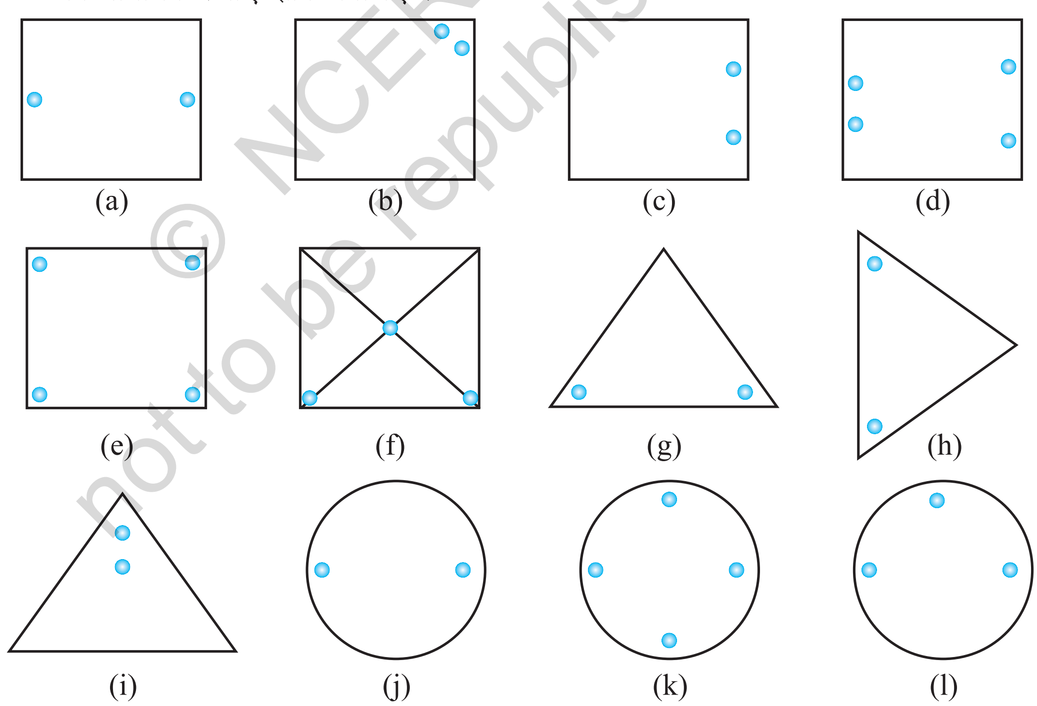
एक कागज़ को 2 आधों में मोड़िए — एक छेद करिए — मोड़ के निशान के अनुदिश दो छेद

आकृति 14.10

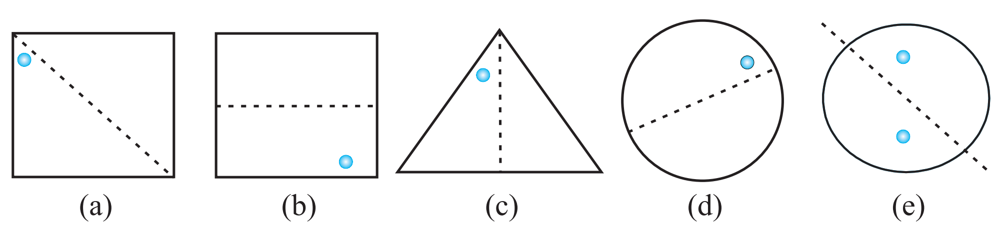
मोड़ का निशान एक सममित रेखा (या अक्ष) है। मोड़े हुए कागज़ पर विभिन्न स्थानों पर बनाए गए छेदों तथा संगत सममित रेखाओं का अध्ययन कीजिए (आकृति 14.10)।

प्रश्नावली 14.1

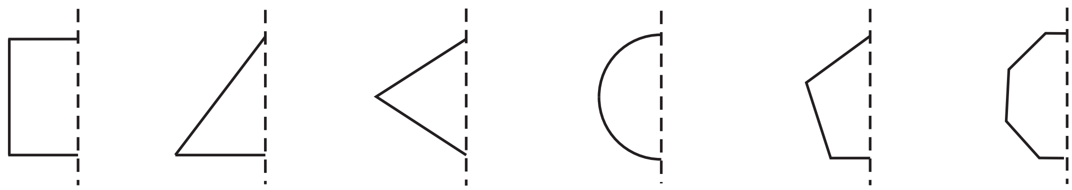
1. निम्नलिखित छेद की हुई आकृतियों की प्रतिलिपियाँ बनाकर (खींच कर) उनमें से प्रत्येक की सममित रेखाएँ ज्ञात कीजिए :



2. नीचे सममित रेखा (रेखाएँ) दी हुई हैं। अन्य छेद ज्ञात कीजिए।

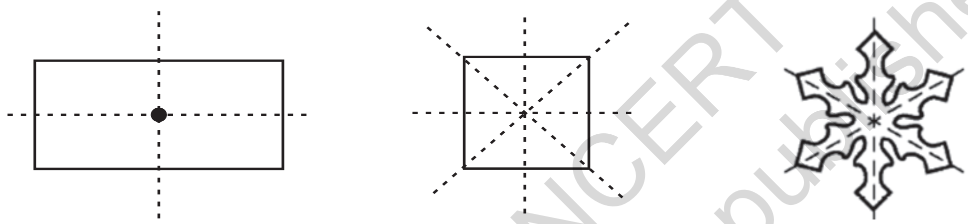


3. निम्नलिखित आकृतियों में, दर्पण रेखा (अर्थात् सममित रेखा) बिंदुकित रेखा के रूप में दी गई है। बिंदुकित (दर्पण) रेखा में प्रत्येक आकृति का परावर्तन करके, प्रत्येक आकृति को पूरा कीजिए। (आप बिंदुकित रेखा के अनुदिश एक दर्पण रख सकते हैं और फिर प्रतिबिंब (image) के लिए दर्पण में देख सकते हैं)। क्या आपको पूरी की गई आकृति का नाम याद है?



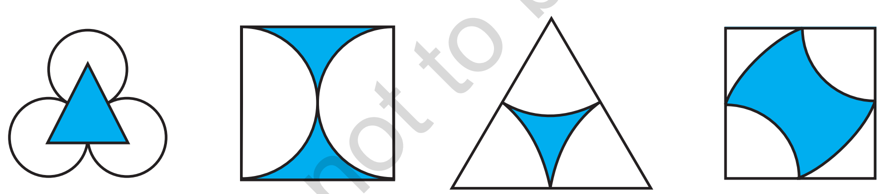
(a) (b) (c) (d) (e) (f)

4. निम्नलिखित आकृतियों की एक से अधिक सममित रेखाएँ हैं। ऐसी आकृतियों के लिए यह कहा जाता है कि इनकी अनेक सममित रेखाएँ हैं।

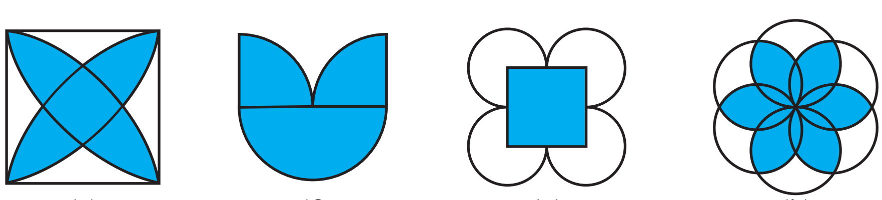


(a) (b) (c)

निम्नलिखित आकृतियों में से प्रत्येक में विविध सममित रेखाओं (यदि हों तो), की पहचान कीजिए :



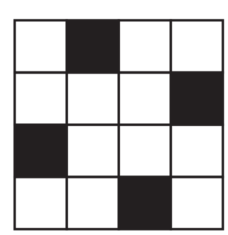
(a) (b) (c) (d)



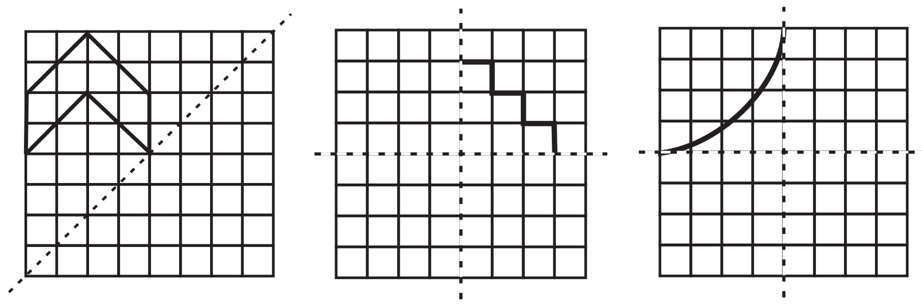
(e) (f) (g) (h)

5. यहाँ दी हुई आकृति की प्रतिलिपि बनाइए।

किसी एक विकर्ण की सममित रेखा लीजिए तथा कुछ और वर्गों को इस तरह छायांकित कीजिए, कि यह आकृति इस विकर्ण के अनुदिश सममित हो जाए। क्या ऐसा करने की एक से अधिक विधियाँ हैं? क्या यह आकृति दोनों विकर्णों के अनुदिश सममित होगी?



6. निम्नलिखित आरेखों की प्रतिलिपियाँ बनाइए तथा प्रत्येक आकार को इस तरह पूरा कीजिए ताकि वह आकार दर्पण रेखा (या रेखाओं) के अनुदिश सममित हो :



(a) (b) (c)

7. निम्नलिखित आकृतियों के लिए सममित रेखाओं की संख्याएँ बताइए :

(a) एक समबाहु त्रिभुज (b) एक समद्विबाहु त्रिभुज (c) एक विषमबाहु त्रिभुज
(d) एक वर्ग (e) एक आयत (f) एक समचतुर्भुज
(g) एक समांतर चतुर्भुज (h) एक चतुर्भुज (i) एक सम षड्भुज
(j) एक वृत्त

8. अंग्रेजी वर्णमाला के किन अक्षरों में निम्नलिखित के अनुदिश परावर्तन सममिति (दर्पण परावर्तन से संबंधित सममिति) है :

(a) एक ऊर्ध्वाधर दर्पण (b) एक क्षैतिज दर्पण
(c) ऊर्ध्वाधर और क्षैतिज दर्पण दोनों

9. ऐसे आकारों के तीन उदाहरण दीजिए, जिनमें कोई सममित रेखा न हो।

10. आप निम्नलिखित आकृतियों की सममित रेखा के लिए अन्य क्या नाम दे सकते हैं?

(a) एक समद्विबाहु त्रिभुज (b) एक वृत्त

14.3 घूर्णन सममिति

जब घड़ी की सुइयाँ घूमती हैं, तो आप क्या कहते हैं? आप कहते हैं कि ये घूर्णन (Rotate) कर रही हैं।

घड़ी की सुइयाँ केवल एक ही दिशा में घूमती हैं। यह घूमना एक बिंदु के चारों ओर होता है, जो घड़ी के पटल (face) का केंद्र है।

घड़ियों की सुइयाँ जिस दिशा में घूमती हैं, वह घूर्णन (rotation) दक्षिणावर्त (clockwise) घूर्णन कहलाता है, अन्यथा घूर्णन वामावर्त (anticlockwise rotation) कहलाता है।

छत के पंखे की पँखुड़ियों के घूर्णन के बारे में आप क्या कह सकते हैं? क्या ये दक्षिणावर्त दिशा में घूमती हैं या वामावर्त दिशा में घूमती हैं? अथवा क्या ये दोनों दिशाओं में घूमती हैं?

यदि आप साइकिल के एक पहिए को घुमाते हैं, तो वह घूर्णन करता है। यह दोनों ही दिशाओं, अर्थात् दक्षिणावर्त और वामावर्त दिशाओं में घूर्णन कर सकता है। (i) दक्षिणावर्त घूर्णन और (ii) वामावर्त घूर्णन में से प्रत्येक के लिए तीन उदाहरण दीजिए।

जब कोई वस्तु घूर्णन करती है, तो उसके आकार और माप में कोई परिवर्तन नहीं होता है। घूर्णन उस वस्तु को एक निश्चित बिंदु के चारों तरफ घुमाता है। यह निश्चित बिंदु **घूर्णन का**

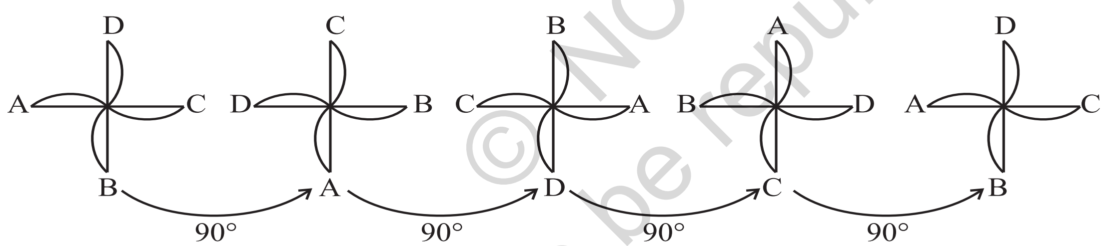
केंद्र (centre of rotation) कहलाता है। घड़ी की सुईयों के घूर्णन का केंद्र क्या है? इसके बारे में सोचिए।

घूर्णन के दौरान घूमे गए कोण को **घूर्णन कोण (angle of rotation)** कहते हैं। आप जानते हैं कि एक पूरे चक्कर में 360° का घूर्णन होता है। (i) एक आधे या अर्ध चक्कर और (ii) एक चौथाई चक्कर के घूर्णन कोणों के क्रमशः क्या माप हैं? एक अर्ध चक्र का अर्थ 180° का घूर्णन है तथा एक-चौथाई चक्कर का अर्थ 90° का घूर्णन है।

जब 12 बजते हैं, तो घड़ी की दोनों सुइयाँ एक साथ होती हैं। 3 बजने तक मिनट की सुई तो तीन पूरे चक्कर लगा लेती है, परंतु घंटे की सुई केवल एक-चौथाई चक्कर ही लगा पाती है। 6 बजे की उनकी स्थितियों के बारे में आप क्या कह सकते हैं?

आकृति 14.11

क्या आपने कभी कागज़ की हवाई चकरी (या फिरकी) (paper windmill) बनाई है? आकृति में दिखाई गई कागज़ की हवाई चकरी सममित दिखाई देती है (आकृति 14.11), परंतु आपको इसकी कोई सममिति रेखा प्राप्त नहीं होती है। इसको किसी प्रकार से मोड़ने पर भी दोनों आधे भाग संपाती नहीं होंगे। यदि आप इसके केंद्र (बीच) वाले स्थिर (या निश्चत) बिंदु के परित 90° के कोण पर घुमाएँ, तो आप देखेंगे की हवाई चकरी का आकार, आकृति 14.11 की स्थिति के अनुसार, पहले जैसा ही है। हम कहते हैं कि चकरी में एक घूर्णन सममिति (rotational symmetry) है।

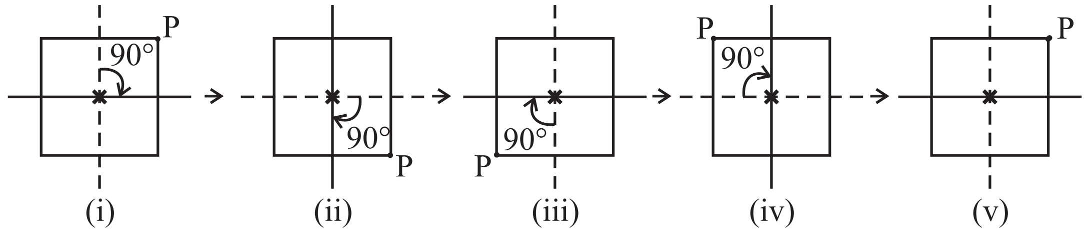


आकृति 14.12

एक पूरे चक्कर में, ऐसी **चार स्थितियाँ** हैं (90°, 180°, 270° और 360° के कोणों पर घुमाने या घूर्णन करने पर), जब चकरी पहली जैसी ही दिखती है। (आकृति 14.12)। इसी कारण, हम कहते हैं कि चकरी में **क्रम 4 (order 4)** की घूर्णन सममिति है।

घूर्णन सममिति का एक और उदाहरण देखिए। एक वर्ग पर विचार कीजिए, जिसका एक कोना (या शीर्ष) P है (आकृति 14.13)।

आइए इस वर्ग के केंद्र को ×से अंकित करके इसके परित इस वर्ग को एक-चौथाई चक्कर पर घुमाएँ।



आकृति .14.13

आकृति 14.13 (i) इसकी प्रारंभिक स्थिति है। केंद्र के चारों ओर 90° घूमाने पर आकृति 14.13 (ii) प्राप्त होती है। अब बिंदु P की स्थिति को देखिए। वर्ग को पुन: 90° के कोण पर घुमाइए (घूर्णन दीजिए)। आपको आकृति 14.13(iii) प्राप्त होती है। इस प्रकार, जब आप वर्ग को चार एक-चौथाई चक्कर घुमा देते हैं, तो वह अपनी प्रारंभिक स्थिति पर आ जाती है। अब यह आकृति 14.13 (i) जैसी ही दिखती है। इसे P द्वारा ली गई विभिन्न स्थितियों से देखा जा सकता है।

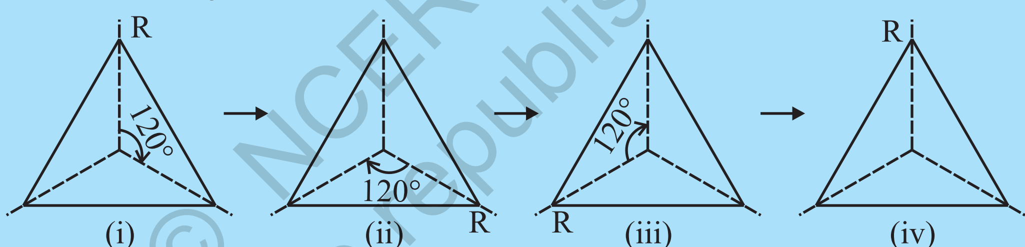
इस प्रकार, एक वर्ग में उसके केंद्र के चारों ओर **क्रम 4 की घूर्णन सममिति** होती है। ध्यान दीजिए कि इस स्थिति में,

(i) घूर्णन का केंद्र वर्ग का केंद्र है। (ii) घूर्णन का कोण 90° है।

(iii) घूर्णन की दिशा दक्षिणावर्त है। (iv) घूर्णन सममिति का क्रम 4 है।

प्रयास कीजिए

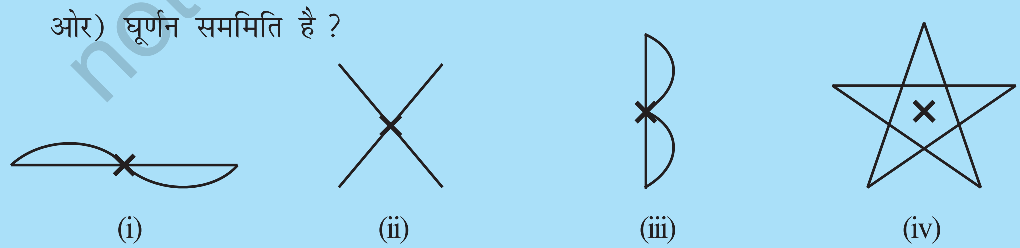
1. (a) क्या अब आप एक समबाहु त्रिभुज के लिए, घूर्णन सममिति के क्रम को बता सकते हैं (आकृति 14.14)?



आकृति 14.14

(b) जब उपरोक्त त्रिभुज को उसके केंद्र के परित (चारों ओर) 120° के कोण पर घुमाया जाता है, तो कितनी स्थितियों में त्रिभुज (स्थिति के अनुसार) पहले जैसा ही लगता है?

2. निम्नलिखित में से कौन-से आकारों (आकृति 14.15) में अंकित बिंदु के परित (चारों ओर) घूर्णन सममिति है?



आकृति 14.15

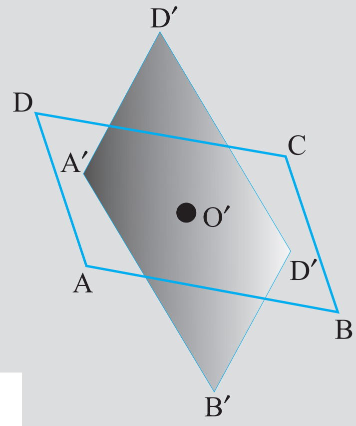
इन्हें कीजिए

दो एक जैसे (सर्वासम समांतर चतुर्भुज खींचिए, एक समांतर चतुर्भुज ABCD एक कागज़ पर तथा दूसरा समांतर चतुर्भुज A'B'C'D' एक पारदर्शक शीट (transparent sheet) पर। उनके विकर्णों के प्रतिच्छेद बिंदुओं को क्रमश: O और O' से अंकित (या व्यक्त) कीजिए (आकृति 14.16)।

समांतर चतुर्भुजों को इस प्रकार रखिए कि A' शीर्ष A पर रहे, B' शीर्ष B पर रहे, इत्यादि।

इन आकारों में, अब बिंदु O पर एक पिन को लगाइए। अब पारदर्शक शीट को दक्षिणावर्त दिशा में घुमाइए। एक पूरे चक्कर में पारदर्शक शीट पर बना आकार कागज़ पर बने आकार से कितनी बार संपाती होता है? इसमें घूर्णन सममिति का क्या क्रम है?

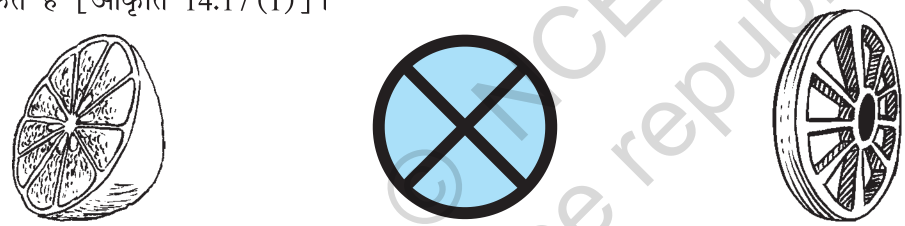
वह बिंदु, जहाँ हमने पिन लगाई है, घूर्णन का केंद्र है। इस स्थिति में, यह विकर्णों का प्रतिच्छेद बिंदु है।



आकृति 14.16

प्रत्येक वस्तु (या आकृति) में, क्रम 1 की घूर्णन सममिति होती है, क्योंकि 360° के घूर्णन के बाद (अर्थात् पूरे एक चक्कर के बाद) वह अपनी प्रारंभिक स्थिति में आ जाता है। ऐसी स्थितियों में हमारी कोई रूचि नहीं होगी।
आपके परिवेश में अनेक ऐसे आकार हैं जिनमें घूर्णन सममिति होती है (आकृति 14.17)।

उदाहरणार्थ, जब कुछ फलों को काटते हैं, तो उनके अनुप्रस्थ काट (**cross-section**) ऐसे आकारों के होते हैं, जिनमें घूर्णन सममिति होती है। जब आप इन्हें देखेंगे तो आप आश्चर्यचकित हो सकते हैं [आकृति 14.17 (i)]।



फल (i)   सड़क संकेत (ii)   पहिया (iii)

आकृति 14.17

ऐसे कई सड़क संकेत (road signs) भी हैं, जो घूर्णन सममिति प्रदर्शित करते हैं। अगली बार जब आप किसी व्यस्त सड़क पर घूमने निकलें, तो ऐसे सड़क संकेतों को पहचानिए और उनकी घूर्णन सममिति के क्रमों को ज्ञात कीजिए [आकृति 14.17(ii)]।

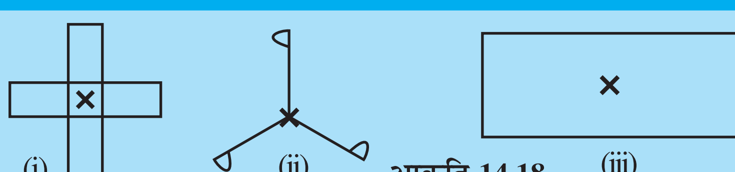
घूर्णन सममिति के कुछ अन्य उदाहरणों के बारे में सोचिए। प्रत्येक स्थिति में, निम्नलिखित की चर्चा कीजिए :

(i) घूर्णन का केंद्र   (ii) घूर्णन का कोण

(iii) घूर्णन किस दिशा में किया गया है   (iv) घूर्णन सममिति का क्रम

प्रयास कीजिए

दी हुई आकृतियों के लिए × से अंकित बिंदु के परित घूर्णन सममिति का क्रम बताइए (आकृति 14.18)।

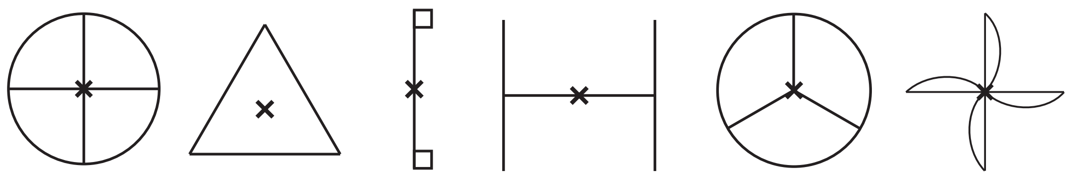


(i)   (ii)   (iii)

आकृति 14.18

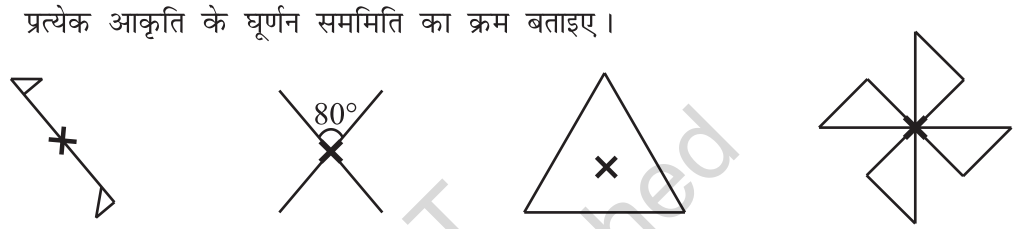
प्रश्नावली 14.2

1. निम्नलिखित आकृतियों में से किन आकृतियों में 1 से अधिक क्रम की घूर्णन सममिति है?

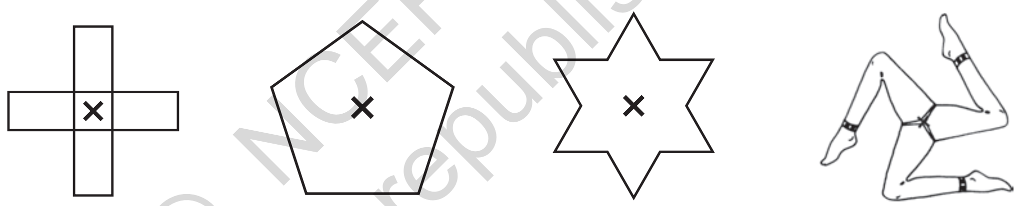


(a) (b) (c) (d) (e) (f)

2. प्रत्येक आकृति के घूर्णन सममिति का क्रम बताइए।



(a) (b) (c) (d)

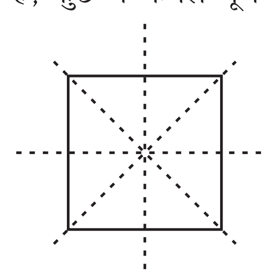


(e) (f) (g) (h)

14.4 रैखिक सममिति और घूर्णन सममिति

आप अभी तक अनेक आकारों और उनकी सममितियों को देखते आ रहे हैं। अब तक आपने यह समझ लिया होगा कि कुछ आकारों में केवल रैखिक सममिति होती है, कुछ में केवल घूर्णन सममिति होती है तथा कुछ आकारों में रैखिक तथा घूर्णन दोनों प्रकार की सममितियाँ होती हैं।

उदाहरणार्थ, एक वर्ग के आकार को देखिए (आकृति 14.19)।
इसकी कितनी सममित रेखाएँ हैं?
क्या इसमें कोई घूर्णन सममिति है?
यदि उत्तर 'हाँ' है, तो इस घूर्णन सममिति का क्रम क्या है?
इसके बारे में सोचिए।



आकृति 14.19

एक वृत्त सबसे अधिक पूर्ण सममित आकृति है, क्योंकि इसको इसके केंद्र के परित किसी भी कोण पर घुमा कर वही आकृति प्राप्त की जा सकती है, अर्थात् इसमें अपरिमित रूप से अनेक क्रम की घूर्णन सममिति है तथा साथ ही इसकी अपरिमित सममित रेखाएँ हैं। वृत्त के किसी भी प्रतिरूप को देखिए। केंद्र से होकर जाने वाली प्रत्येक रेखा (अर्थात् प्रत्येक व्यास) परावर्तन सममिति की एक सममिति रेखा है तथा केंद्र के परित प्रत्येक कोण के लिए इसकी एक घूर्णन सममिति है।

इन्हें कीजिए

अंग्रेज़ी वर्णमाला के कुछ अक्षरों में अद्‌भुत एवं आकर्षक सममितीय संरचनाएँ (structures) हैं। किन बड़े अक्षरों में केवल एक ही सममित रेखा है (जैसे **E**)? किन बड़े अक्षरों में क्रम 2 की घूर्णन सममिति है (जैसे **I**)?

उपरोक्त प्रकार से सोचते हुए, आप निम्नलिखित सारणी को भरने में समर्थ हो पाएँगे:

वर्णमाला का अक्षर	रैखिक सममिति	सममित रेखाओं की संख्या	घूर्णन सममित	घूर्णन सममिति का क्रम
Z	नहीं	0	हाँ	2
S				
H	हाँ		हाँ	
O	हाँ		हाँ	
E	हाँ			
N			हाँ	
C				

प्रश्नावली 14.3

1. किन्हीं दो आकृतियों के नाम बताइए, जिनमें रैखिक सममिति और क्रम 1 से अधिक की घूर्णन सममिति दोनों ही हों।
2. जहाँ संभव हो, निम्नलिखित की एक रफ़ आकृति खींचिए :
   (i) एक त्रिभुज, जिसमें रैखिक सममिति और क्रम 1 से अधिक की घूर्णन सममिति दोनों ही हों।
   (ii) एक त्रिभुज, जिसमें केवल रैखिक सममिति और क्रम 1 से अधिक की घूर्णन सममिति न हो।
   (iii) एक चतुर्भुज जिसमें क्रम 1 से अधिक की घूर्णन सममिति हो, परंतु रैखिक सममिति न हो।
   (iv) एक चतुर्भुज जिसमें केवल रैखिक सममिति हो और क्रम 1 से अधिक की घूर्णन सममिति न हो।
3. यदि किसी आकृति की दो या अधिक सममित रेखाएँ हों, तो क्या यह आवश्यक है कि उसमें क्रम 1 से अधिक की घूर्णन सममिति होगी ?
4. रिक्त स्थानों को भरिए :

आकार	वर्ग	आयत	समचतुर्भुज	समबाहु त्रिभुज	समषड्भुज	वृत्त	अर्धवृत्त
घूर्णन का केंद्र							
घूर्णन सममिति का क्रम							
घूर्णन का कोण							

5. ऐसे चतुर्भुजों के नाम बताइए, जिनमें रैखिक सममिति और क्रम 1 से अधिक की घूर्णन सममिति दोनों ही हों।
6. किसी आकृति को उसके केंद्र के परित 60° के कोण पर घुमाने पर, वह उसकी प्रारंभिक स्थिति जैसी ही दिखाई देती है। इस आकृति के लिए ऐसे कौन-से अन्य कोणों के लिए भी हो सकता है ?
7. क्या हमें कोई ऐसी क्रम 1 से अधिक की घूर्णन सममिति प्राप्त हो सकती है, जिसके घूर्णन के कोण निम्नलिखित हों ?
   (i) 45° (ii) 17°

हमने क्या चर्चा की ?

1. एक आकृति मे **रैखिक सममिति** तब होती है, जब कोई ऐसी रेखा प्राप्त की जा सके जिसके अनुदिश उस आकृति को मोड़ने पर, उसके दोनों भाग परस्पर संपाती हो जाएँ।
2. सम बहुभुजों में बराबर भुजाएँ और बराबर कोण होते हैं। उनकी अनेक अर्थात् एक से अधिक, सममित रेखाएँ होती हैं।
3. प्रत्येक सम बहुभुज की उतनी ही सममित रेखाएँ होती हैं, जितनी उसकी भुजाएँ होती हैं।

समबहुभुज	समषड्भुज	समपंचभुज	वर्ग	समबाहु त्रिभुज
सममित रेखाओं की संख्या	6	5	4	3

4. दर्पण परावर्तन से ऐसी सममिति प्राप्त होती है, जिसमें बाएँ-दाएँ अभिमुखों का ध्यान रखना होता है।
5. घूर्णन में एक वस्तु को एक निश्चित बिंदु के परित घुमाया जाता है। यह निश्चित बिंदु **घूर्णन का केंद्र** कहलाता है। जिस कोण पर वस्तु घूमती है, उसे **घूर्णन का कोण** कहते हैं। आधे या अर्ध चक्कर का अर्थ 180° का घूर्णन है तथा एक-चौथाई चक्कर का अर्थ 90° का घूर्णन है। घूर्णन दक्षिणावर्त और वामावर्त दोनों ही दिशाओं में हो सकता है।
6. यदि घूर्णन के बाद, वस्तु, स्थिति के अनुसार, पहले जैसी ही दिखाई देती है, तो हम कहते हैं कि उसमें **घूर्णन सममिति** है।
7. एक पूरे चक्कर (360° के) में, एक वस्तु जितनी बार स्थिति के अनुसार, पहले जैसी ही दिखाई देती है, वह संख्या उस घूर्णन **सममिति का क्रम** कहलाती है। उदाहरणार्थ, एक वर्ग की घूर्णन सममिति का क्रम 4 है तथा एक समबाहु त्रिभुज की घूर्णन सममिति का क्रम 3 है।
8. कुछ आकारों में केवल एक ही सममिति रेखा होती है, जैसे अक्षर E; कुछ में केवल घूर्णन सममिति ही होती है, जैसे अक्षर S तथा कुछ में दोनों प्रकार की सममितियाँ होती हैं, जैसे अक्षर H है। सममिति का अध्ययन इसलिए महत्वपूर्ण है, क्योंकि इसका दैनिक जीवन में अधिकांशत: प्रयोग होता है तथा इससे भी अधिक महत्व इस कारण है कि यह हमें सुंदर एवं आकर्षक डिज़ाइन प्रदान कर सकती है।

अध्याय 15

ठोस आकारों का चित्रण

15.1 भूमिकाः तल-आकृतियाँ और ठोस आकार

इस अध्याय में, आप अब तक देखी गई आकृतियों को उनकी विमाओं के रूप में (dimensions) वर्गीकृत करेंगे।

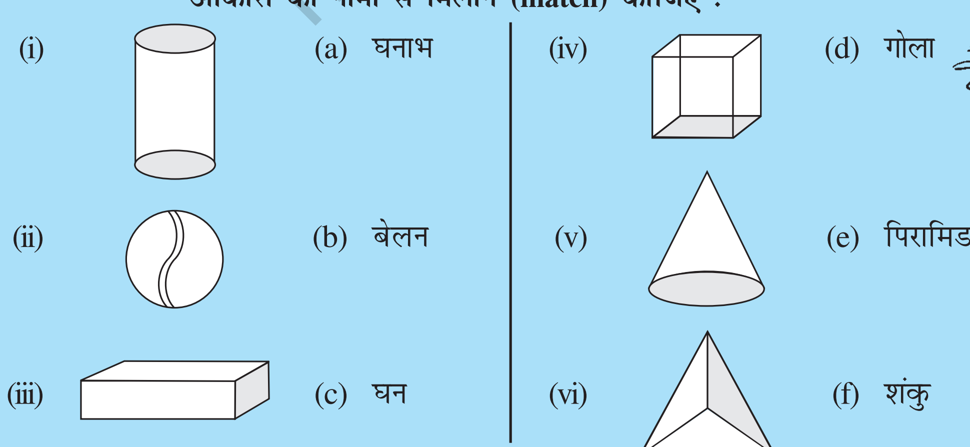
अपने दैनिक जीवन में, हम अपने परिवेश से विभिन्न आकारों की अनेक वस्तुएँ देखते हैं, जैसे पुस्तकें, गेंदें, आइसक्रीम शंकु, इत्यादि। अधिकांशतः, इन सभी वस्तुओं में एक बात सर्वनिष्ठ (common) है, वह यह है कि इनमें से प्रत्येक की कुछ लंबाई, चौड़ाई, ऊँचाई या गहराई है।

इसी कारण, ये सभी स्थान घेरते हैं और इनकी तीन विमाएँ हैं। इसीलिए, ये **त्रिविमीय आकार** (three dimensional shapes) कहलाते हैं

क्या आपको पिछली कक्षाओं में देखे गए कुछ त्रिविमीय आकारों (ठोस आकारों) के बारे में याद है?

प्रयास कीजिए

आकारों का नामों से मिलान (match) कीजिए :

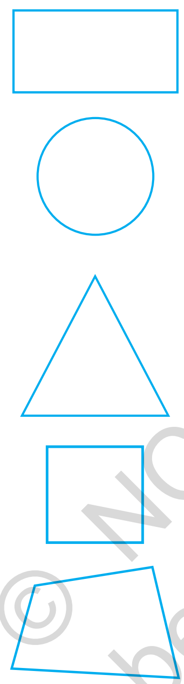


आकृति 15.1

उपरोक्त में से प्रत्येक आकार जैसी कुछ वस्तुओं की पहचान करने का प्रयत्न कीजिए।

इसी प्रकार के तर्क द्वारा, हम कह सकते हैं कि एक कागज़ पर खींची जा सकने वाली आकृतियों (जिनकी केवल लंबाई और चौड़ाई होती है) को द्विविमीय (two dimensional) (या तल) कहना चाहिए। हम दो विमाओं की कुछ आकृतियों को पिछली कक्षाओं में भी देख चुके हैं।

द्विविमीय आकृतियों का नामों के साथ मिलान कीजिए (आकृति 15.2):



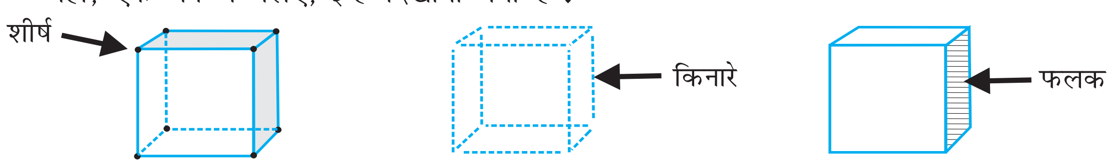
(i)	(a) वृत्त
(ii)	(b) आयत
(iii)	(c) वर्ग
(iv)	(d) चतुर्भुज
(v)	(e) त्रिभुज

आकृति 15.2

टिप्पणी: हम संक्षेप में, द्विविमीय को 2-D और त्रिविमीय को 3-D लिख सकते हैं।

15.2 फलक, किनारे और शीर्ष

क्या आपको पहले पढ़े हुए ठोस आकारों के फलकों, शीर्षों और किनारों के बारे में कुछ याद है? यहाँ, एक घन के लिए, इन्हें दिखाया गया है :



(i) (ii) (iii)

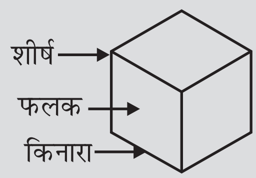
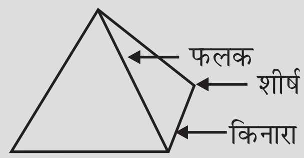
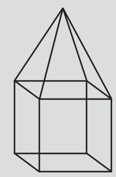
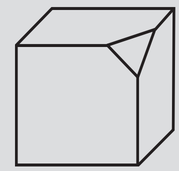
आकृति 15.3

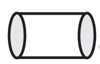
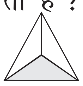
घन के 8 कोने उसके **शीर्ष (vertices)** हैं। घन के ढाँचे को बनाने वाले 12 रेखाखंड उसके किनारे या **कोर (edges)** कहलाते हैं। 6 सपाट वर्गाकार पृष्ठ, जो घन की खाल या त्वचा हैं, उसके **फलक (faces)** कहलाते हैं।

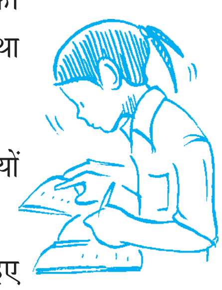
इन्हें कीजिए

निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए :

सारणी 15.1

				
फलक (F)	6	4		
किनारे (E)	12			
शीर्ष (V)	8	4		

क्या आप देख सकते हैं कि द्विविमीय आकृतियों के रूप में त्रिविमीय आकारों के फलकों की पहचान की जा सकती है ? उदाहरणार्थ, एक बेलन  के दो फलक ऐसे हैं जो वृत्त हैं, तथा दर्शाए गए पिरामिड  के फलक त्रिभुज हैं।

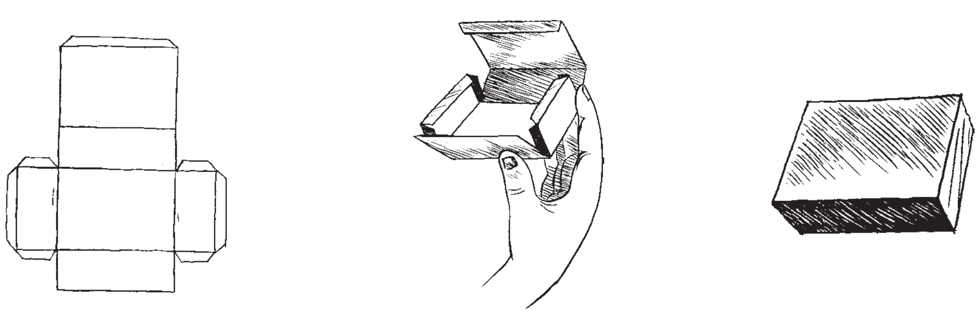


अब हम यह देखने का प्रयत्न करेंगे कि किस प्रकार कुछ 3-D आकारों को 2-D आकृतियों (अर्थात् कागज़ पर) को चित्रीय रूप से निरूपित किया जा सकता है।

ऐसा करने के लिए, हम त्रिविमीय वस्तुओं से निकटतम रूप से परिचित होना चाहेंगे। आइए इन वस्तुओं को उनसे बनाने का प्रयास करें, जो इनके जाल (net) कहलाते हैं।

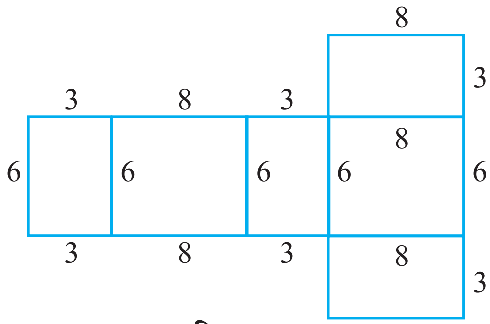
15.3 3-D आकार बनाने के लिए जाल (नेट)

एक गत्ते का बक्सा (box) लीजिए। इसको कुछ किनारों के अनुदिश काट कर सपाट (flat) बना लीजिए। अब आपके पास इस बक्से का जाल है। जाल 2-D में एक प्रकार का ऐसा ढाँचा (या रूपरेखा) होता है (आकृति 15.4 (i)) जिसे मोड़ने पर (आकृति 15.4 (ii))। परिणामस्वरूप एक 3-D आकार प्राप्त हो जाता है (आकृति 15.4 (iii))।



(i) (ii) (iii)

आकृति 15.4

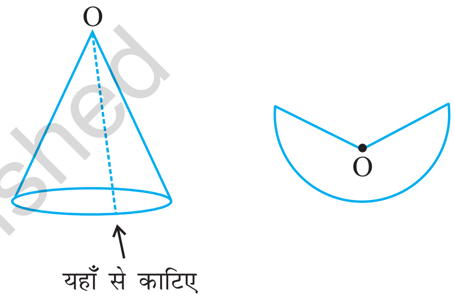


आकृति 15.5

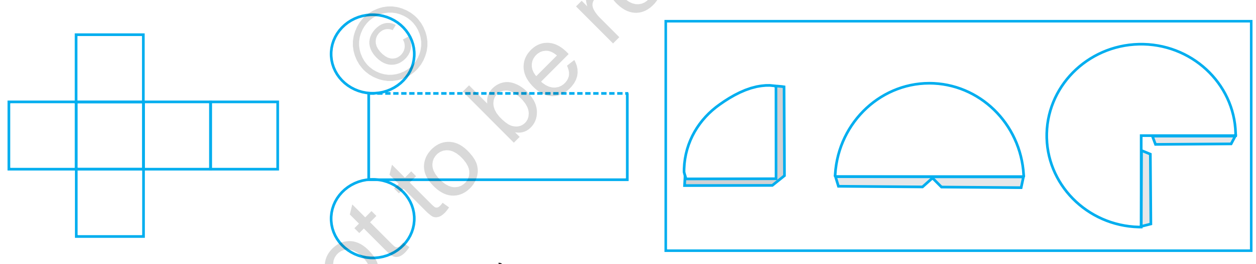
यहाँ आपने किनारों को उपयुक्त रूप से पृथक् करके, एक **जाल** प्राप्त किया है। क्या इसकी विपरीत प्रक्रिया संभव है ? यहाँ, एक बक्से के जाल का प्रतिरूप दिया है (आकृति 15.5)। इसका प्रतिरूप बनाकर उसका विस्तार (enlarge) कर लीजिए। फिर इसे उपयुक्त प्रकार से मोड़ कर और चिपका कर एक बक्सा बनाइए।

आप उपयुक्त इकाइयों या मात्रकों (units) का प्रयोग कर सकते हैं। प्राप्त बक्सा एक ठोस है। यह घनाभ (cuboid) के आकार की एक 3-D वस्तु है। इसी प्रकार, आप एक शंकु को उसके तिर्यक पृष्ठ के अनुदिश एक पतली पट्टी (या झिरी) काट कर, इसका जाल प्राप्त कर सकते हैं (आकृति 15.6)।

भिन्न-भिन्न आकारों के लिए, भिन्न-भिन्न जाल होते हैं। दिए हुए जालों के प्रतिरूप बनाइए और उनका विस्तार कीजिए, अथवा दिए हुए जालों के विस्तारित रूपों के प्रतिरूप बनाइए (आकृति 15.7) फिर इनके नीचे लिखें 3-D आकारों को बनाने का प्रयास कीजिए। आप गत्ते की पतली पट्टियाँ लेकर और उन्हें कागज़ के क्लिपों (clips) से बाँध कर आकारों के ढाँचे भी बनाना चाह सकते हैं।



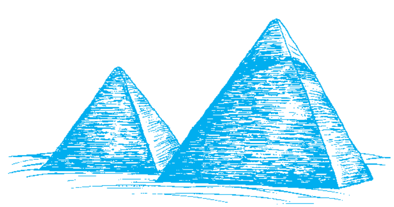
आकृति 15.6



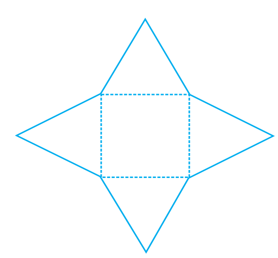
घन (i) बेलन (ii) शंकु (iii)

आकृति 15.7

हम गिज़ा (मिस्र में हैं) के ग्रेट पिरामिड (Great Pyramid) (आकृति 15.8) के प्रकार के पिरामिड के लिए भी जाल बनाने का प्रयास कर सकते हैं। इस पिरामिड का आधार एक वर्ग है तथा चारों भुजाओं पर त्रिभुज बने हुए हैं। देखिए कि क्या आप दिए हुए जाल (आकृति 15.9) से इस पिरामिड को बना सकते हैं।



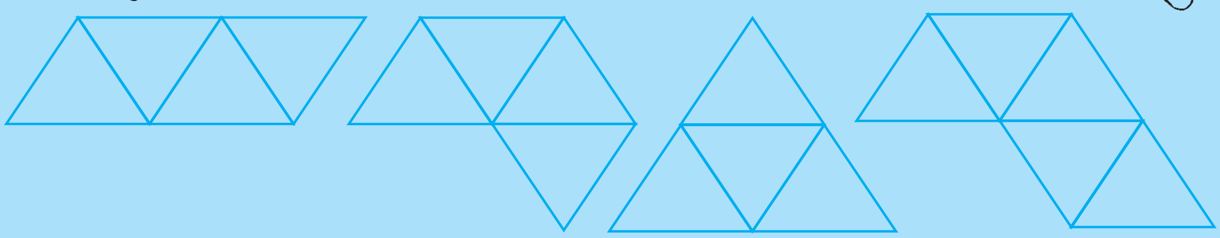
आकृति 15.8



आकृति 15.9

प्रयास कीजिए

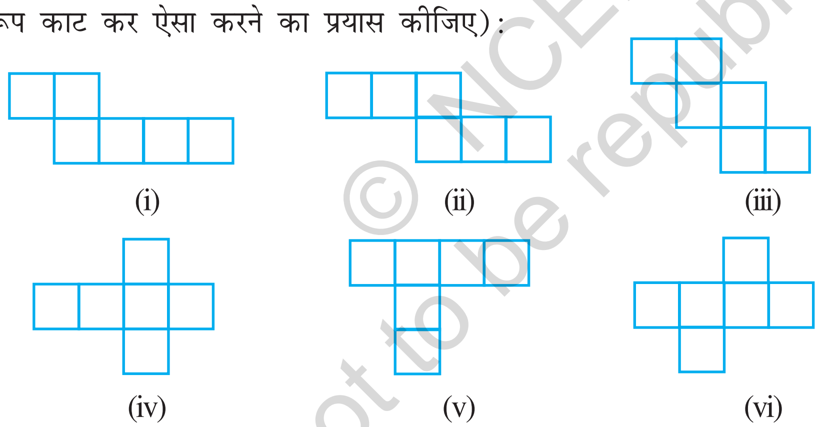
यहाँ आप चार जालों को देख रहे हैं (आकृति 15.10)। एक चतुष्फलक (tetrahedron) बनाने के लिए, इनमें से दो जाल सही हैं। देखिए कि क्या आप यह ज्ञात कर सकते हैं कि किन-किन जालों से चतुष्फलक बन सकता है।

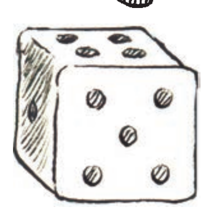


आकृति 15.10

प्रश्नावली 15.1

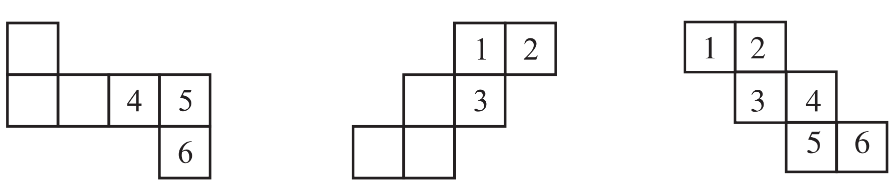
1. उन जालों को पहचानिए,जिनका प्रयोग करके आप घनों को बना सकते हैं (इन जालों के प्रतिरूप काट कर ऐसा करने का प्रयास कीजिए):





2. पासे (dice) ऐसे घन होते हैं, जिनके प्रत्येक फलक पर बिंदु (dots) अंकित होते हैं। एक पासे के सम्मुख फलकों पर अंकित बिंदुओं की संख्याओं का योग सदैव 7 होता है।

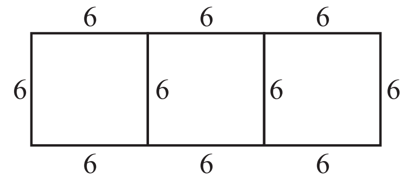
यहाँ, पासे (घनों) को बनाने के लिए, दो जाल दिए जा रहे हैं। प्रत्येक वर्ग में लिखी संख्या उस बक्से के बिंदुओं को दर्शाती है।



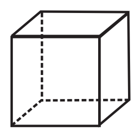
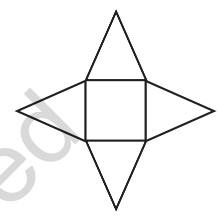
यह याद रखते हुए कि पासे के सम्मुख फलकों की संख्याओं का योग सदैव 7 होता है, रिक्त स्थानों पर उपयुक्त संख्याएँ लिखिए।

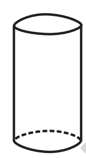
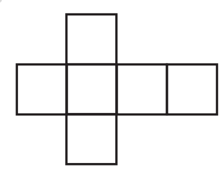
3. क्या यह पासे कि लिए एक जाल हो सकता है ? अपने उत्तर को स्पष्ट कीजिए।

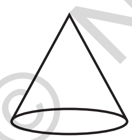
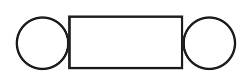
4. यहाँ एक घन बनाने के लिए, एक अधूरा जाल दिया गया है। इसको कम-से-कम दो विभिन्न विधियों से पूरा कीजिए। याद रखिए कि घन के 6 फलक होते हैं। यहाँ इस जाल में कितने फलक दिए हुए हैं। (दो पृथक्-पृथक् चित्र दीजिए। कार्य को सरल बनाने के लिए, आप वर्गांकित कागज़ का प्रयोग कर सकते हैं।)

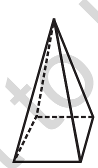
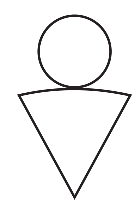


5. जालों को उपयुक्त ठोसों से मिलान कीजिए :

(a) 
(i) 

(b) 
(ii) 

(c) 
(iii) 

(d) 
(iv) 

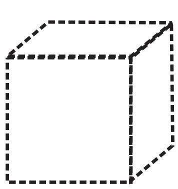
यह खेल खेलिए :

आप और आपका मित्र परस्पर पीठ-से-पीठ मिलाकर बैठे हैं। आप में से एक व्यक्ति कोई 3-D आकार बनाने के लिए एक जाल पढ़ता है, जबकि दूसरा व्यक्ति इसका प्रतिरूप बना कर, बोले गए 3-D आकार को खींचने या बनाने का प्रयत्न करता है।

15.4 एक सपाट पृष्ठ पर ठोसों को खींचना

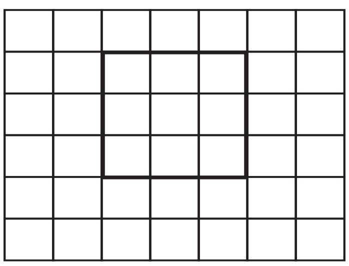
आपका यह सपाट पृष्ठ एक कागज़ है। जब आप एक ठोस आकार को खींचते हैं, तो प्रतिबिंबों को कुछ विकृत (टेढ़ा) कर दिया जाता है, ताकि वे त्रिविमीय दिखाई दें। यह एक दृष्टिभ्रम है। यहाँ आपकी सहायता के लिए, दो तकनीकें दी जा रही हैं।

15.4.1 तिर्यक या अनियमित चित्र

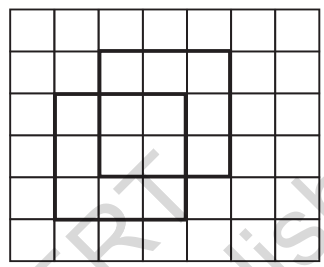

आकृति 15.11

यहाँ एक घन का चित्र दिया है (आकृति 15.11)। जब इसे सामने से देखा जाए तो इससे यह स्पष्ट पता चलता है कि एक घन कैसा दिखता है। आप इसके कुछ फलकों को देख नहीं पाते हैं।

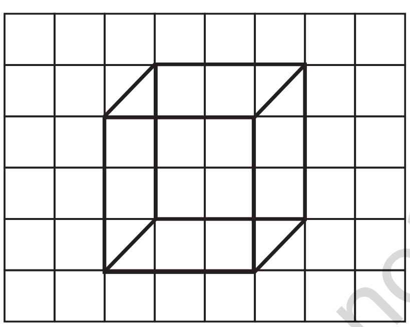
खींचे गए इस चित्र में लंबाई बराबर नहीं है। जबकि घन में यह बराबर होनी चाहिए। फिर भी आप यह पहचान कर लेते हैं कि यह एक घन है। किसी ठोस का ऐसा चित्र **एक तिर्यक** (या अनियमित) चित्र (oblique sketch) कहलाता है। आप ऐसे चित्र किस प्रकार खींच सकते हैं? आइए इसकी तकनीक को सीखने का प्रयत्न करें। आपको एक वर्गांकित (रेखांकित या बिंदुकित) कागज़ की आवश्यकता है। प्रारंभ में इस प्रकार के कागज़ पर चित्र खींचने का अभ्यास करने के बाद, आप बिना इस प्रकार के कागज़ की सहायता के सादे कागज़ पर ये चित्र सरलता से खींच सकते हैं। आइए एक $3 \times 3 \times 3$ का एक तिर्यक चित्र (एक ऐसा घन जिसका प्रत्येक किनारा 3 इकाई है) खींचने का प्रयत्न करें (आकृति 15.12)।



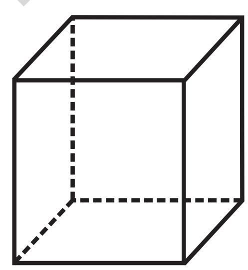
चरण 1
सामने का फलक खींचिए



चरण 2
सामने के फलक का सम्मुख फलक खींचिए। फलकों के माप बराबर होने चाहिए। परंतु यह चित्र चरण 1 के चित्र को कुछ खिसका कर ही बनाया गया है



चरण 3
संगत कोनों को मिलाइए



चरण 4
छिपे हुए किनारों के लिए, चित्र को बिंदुकित रेखाओं का प्रयोग करते हुए पुनः खींचिए (यह एक परंपरा या परिपाटी है) अब अभीष्ट चित्र तैयार है

आकृति 15.12

उपरोक्त तिर्यक चित्र में, क्या आप निम्नलिखित बातों को देख रहें हैं?

(i) सामने के फलक और उसके सम्मुख फलक के माप समान हैं; तथा

(ii) घन के किनारे जो बराबर होते हैं, चित्र में भी बराबर-बराबर प्रतीत होते हैं यद्यपि इनको बराबर नहीं लिया गया है।

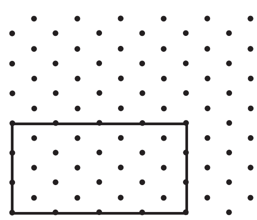
अब आप एक घनाभ का तिर्यक चित्र बनाने का प्रयास कर सकते हैं (याद रखिए इस स्थिति में, फलक आयत है।

टिप्पणी : आप ऐसे चित्र भी खींच सकते हैं, जिनमें माप (या मापन), दिए हुए ठोस के मापों के अनुसार (अनुकूल) ही हो। ऐसा करने के लिए हमें एक ऐसे कागज़ की आवश्यकता होगी, जिसे समदूरीक शीट (isometric sheet) अर्थात् समान दूरियों वाली शीट) कहते हैं। आइए हम एक समदूरीक शीट पर ऐसा घनाभ बनाने का प्रयास करते हैं जिसकी लंबाई 4 cm, चौड़ाई 3 cm और ऊँचाई 3 cm है।

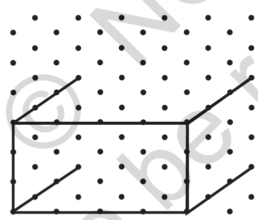
15.4.2 समदूरीक चित्र

क्या आपने एक समदूरीक बिंदुकित शीट देखी है ? (इसका एक प्रतिदर्श (sample) इस पुस्तक के अंत में दिया है।) इस प्रकार की शीट में, पूरा कागज़ (अर्थात् स्वयं यह शीट) बिंदुकित रेखाओं से बने छोटे-छोटे समबाहु त्रिभुजों में बँट जाता है। ऐसे चित्र खींचने के लिए जिनके माप दिए हुए ठोस की मापों के अनुसार हों, हम इन बिंदुकित समदूरीक शीटों का प्रयोग कर सकते हैं।

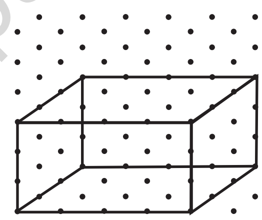
आइए विमाओं $4 \times 3 \times 3$ वाले एक घनाभ (जिसका अर्थ है कि इसकी लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 4, 3 और 3 इकाइयों की हैं) का एक समदूरीक चित्र बनाने का प्रयत्न करें (आकृति 15.13)।



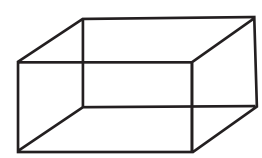
चरण 1
सामने वाला फलक दर्शाने के लिए 4×3 मापों का एक आयत खींचिए।



चरण 2
आयत के चारों कोनों से लंबाई 3 इकाई वाले 4 रेखाखंड खींचिए।



चरण 3
सुमेलित कोनों को उपयुक्त रेखाखंडों से मिलाइए।



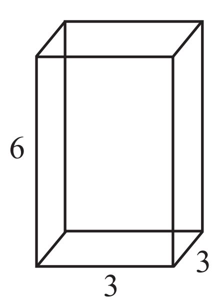
चरण 4
यह घनाभ का एक समदूरीक चित्र है।

आकृति 15.13

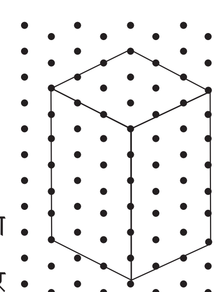
ध्यान दीजिए कि एक समदूरीक चित्र में, मापन ठीक (यथार्थ में) ठोस की दी हुई मापों के होते हैं, जबकि तिर्यक चित्र की स्थिति में ऐसा नहीं होता है।

उदाहरण 1 यहाँ किसी घनाभ का एक तिर्यक चित्र दिया है (आकृति 15.14 (i))। इस चित्र से मिलान करने वाला एक समदूरीक चित्र खींचिए।

हल इसका हल आकृति 15.14 (ii) में चित्र खींच कर दर्शाया गया है। ध्यान दीजिए कि किस प्रकार मापों के अनुसार चित्र खींचा गया है।



आकृति 15.14 (i)

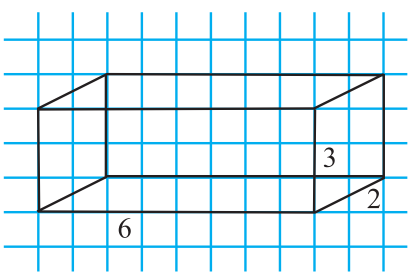


आकृति 15.14 (ii)

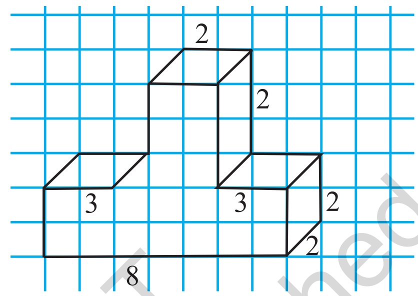
आपने (i) लंबाई (ii) चौड़ाई और (iii) ऊँचाई में से प्रत्येक के अनुदिश कितनी-कितनी इकाइयाँ ली हैं ? क्या ये तिर्यक चित्र में दशाई गई इकाइयों से सुमेलित हैं ?

प्रश्नावली 15.2

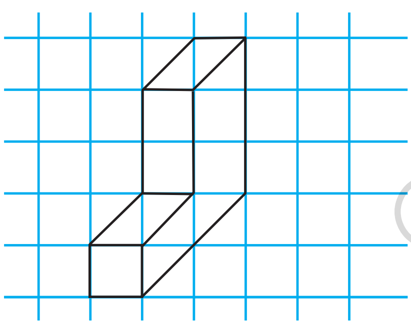
1. एक समदूरीक बिंदुकित कागज़ का प्रयोग करते हुए, निम्नलिखित आकृतियों में से प्रत्येक का एक समदूरीक चित्र खींचिए :



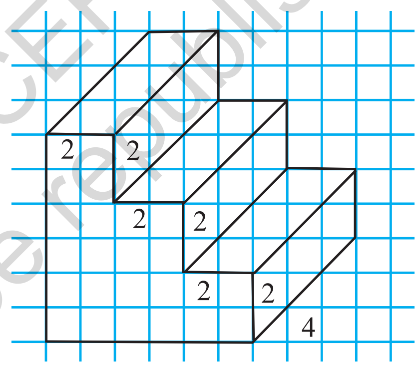
(i)



(ii)



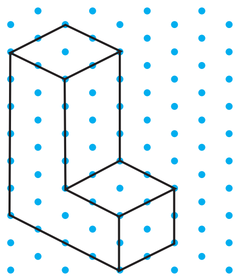
(iii)

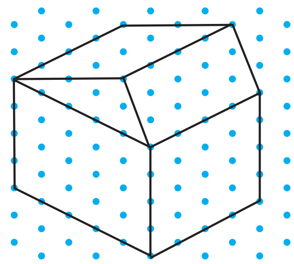


(iv)

आकृति 15.15 (i)-(iv)

2. किसी घनाभ की विमाएँ 5 cm 3 cm और 2 cm हैं। इस घनाभ के तीन भिन्न-भिन्न समदूरीक चित्र खींचिए।
3. 2 cm किनारों वाले तीन घनों को परस्पर सटा कर रखते हुए एक घनाभ बनाया गया है। इस घनाभ का एक तिर्यक अथवा एक समदूरीक चित्र खींचिए।
4. निम्नलिखित समदूरीक आकारों में से प्रत्येक के लिए, एक तिर्यक चित्र खींचिए :





5. निम्नलिखित में से प्रत्येक के लिए, (i) एक तिर्यक चित्र और (ii) एक समदूरीक चित्र खींचिए :
   (a) 5 cm, 3 cm और 2 cm विमाओं वाला एक घनाभ (क्या आपका चित्र अद्वितीय है ?)
   (b) 4 cm लंबे किनारे वाला एक घन।

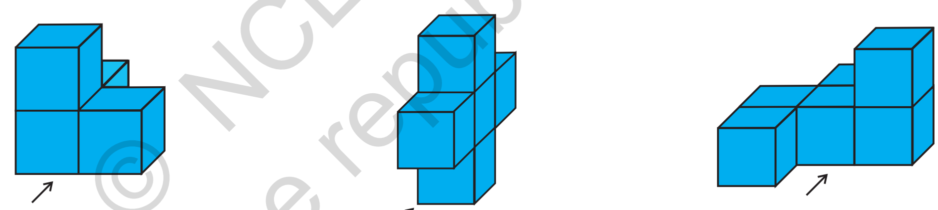
इस पुस्तक के अंत में, एक समदूरीक शीट लगी है। आप इस पर अपने मित्र द्वारा निर्दिष्ट विमाओं के घन या घनाभ खींच सकते हैं।

15.4.3 ठोस वस्तुओं का चित्रण

इन्हें कीजिए

कभी-कभी जब आप संयोजित या जुड़े हुए आकारों को देखते हैं, तो इनमें से कुछ आपकी दृष्टि से छिप जाते हैं, अर्थात् आपको दिखाई नहीं देते हैं।

यहाँ कुछ क्रियाकलाप दिए जा रहे हैं, जिन्हें आप अपने खाली समय में करने का प्रयास कर सकते हैं। इनसे आपको कुछ ठोस वस्तुओं के चित्रण या उनके बारे में यह कल्पना करने में सहायता मिलेगी कि वे कैसे दिखाई देते हैं।



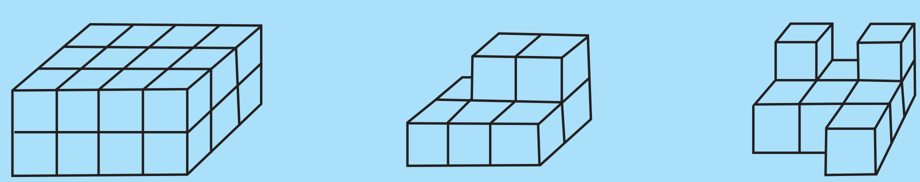
(i) (ii) (iii)

आकृति 15.16

कुछ घन लीजिए तथा उन्हें आकृति 15.16 में दर्शाए अनुसार व्यवस्थित कीजिए। अब अपने मित्र से पूछिए कि वह इसका अनुमान लगाए कि तीर के चिह्न के अनुसार इसको देखने पर कितने घन दिखाई देते हैं ?

प्रयास कीजिए

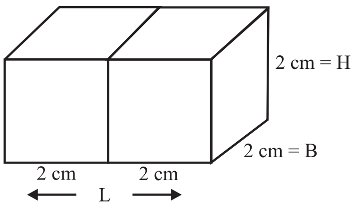
यह अनुमान लगाने का प्रयत्न कीजिए कि निम्नलिखित व्यवस्थाओं में घनों की संख्या कितनी है (आकृति 15.17)।



(i) (ii) (iii)

आकृति 15.17

इस प्रकार का चित्रीयकरण बहुत सहायक होता है। मान लीजिए आप ऐसे घनों को जोड़ कर एक घनाभ बनाते हैं। इस स्थिति में, आप यह अनुमान लगा सकते हैं कि उस घनाभ की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्या होगी ?



आकृति 15.18

उदाहरण 2 यदि 2 cm × 2 cm × 2 cm विमाओं वाले दो घनों को परस्पर सटा कर रखा जाए, तो परिणामी घनाभ की विमाएँ क्या होंगी ?

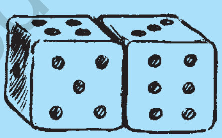
हल जैसाकि आप देख सकते हैं (आकृति 15.18) जब घनों को सटा कर रखा जाता है, तो केवल लंबाई ही एक ऐसा मापन है जिसमें वृद्धि हुई है। यह 2 + 2 = 4 cm हो जाती है। घनाभ की चौड़ाई = 2 cm है और ऊँचाई भी = 2 cm है।

प्रयास कीजिए

1. दो पासों को आकृति में दर्शाए अनुसार, परस्पर सटा कर रखा गया है। क्या आप बता सकते हैं कि निम्नलिखित फलकों के विपरीत फलकों पर अंकित बिंदुओं का योग क्या होगा ?

(a) 5 + 6 (b) 4 + 3

(याद रखिए कि एक पासे पर सम्मुख फलकों पर अंकित संख्याओं का योग सदैव 7 होता है।)



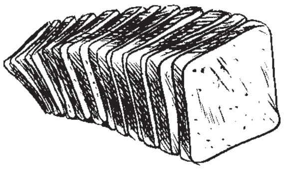
आकृति 15.19

2. 2 cm किनारों वाले तीन घनों को परस्पर सटा कर रखते हुए, एक घनाभ बनाया गया है। इस घनाभ का एक तिर्यक चित्र बनाने का प्रयास कीजिए और बताइए कि इसकी लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्या हो सकती है ?

15.5 किसी ठोस के विभिन्न भागों को देखना

आइए अब इस पर चर्चा करें कि एक 3-D वस्तु को किस प्रकार विभिन्न विधियों से देखा जा सकता है।

15.5.1 किसी वस्तु को देखने की एक विधि है उसे काटना या उसके पतले टुकड़े करना



आकृति 15.20

टुकड़े करने वाला खेल

यहाँ एक डबल रोटी (bread) दी हुई है (आकृति 15.20)। यह वर्गाकार आधार वाले एक घनाभ जैसा है। आप चाकू से इसके टुकड़े कीजिए।

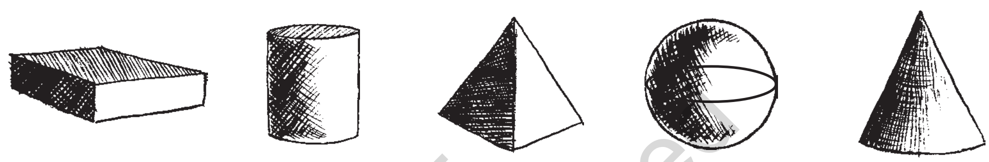
जब आप इसे ऊर्ध्वाधर रूप से काटते हैं, तो आपको अनेक टुकड़े प्राप्त हो जाते हैं, जैसा आकृति 15.20 में दर्शाया गया है। एक टुकड़े का प्रत्येक फलक एक वर्ग है। हम इस फलक को डबल रोटी की एक अनुप्रस्थ-काट (cross section) कहते हैं। वस्तुत:, इस स्थिति में, अनुप्रस्थ काट लगभग एक वर्ग है। ध्यान रखिए! यदि आपका यह काटना या कटाव 'ऊर्ध्वाधर' नहीं होगा, तो आपको एक भिन्न अनुप्रस्थ-काट प्राप्त हो सकती है। इसके बारे में सोचिए! आपके द्वारा प्राप्त अनुप्रस्थ-काट की परिसीमा एक तल-आकृति है। क्या आप इसे देख रहे हैं ?

एक रसोई खेल

क्या आपने सब्जियों के अनुप्रस्थ-काट के आकारों पर ध्यान दिया है, जब उन्हें रसोई में पकाने के लिए काटा जाता है? विभिन्न टुकड़ों को देखिए तथा सब्जियों को काटने से प्राप्त अनुप्रस्थ-काट के आकारों से परिचित हो जाइए।

इसे खेलिए

निम्नलिखित ठोसों के मिट्टी (या प्लास्टिक की मिट्टी) के मॉडल (models) बनाइए तथा इनको ऊर्ध्वाधर या क्षैतिज रूप से काटिए। अपने द्वारा प्राप्त अनुप्रस्थ-काटों के रफ़ (rough) चित्र खींजिए। जहाँ भी संभव हो, इनके नाम भी लिखिए।

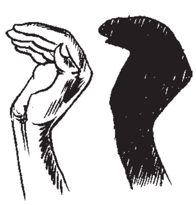


आकृति 15.21

प्रश्नावली 15.3

1. आपको कौनसा अनुप्रस्थ-काट प्राप्त होती है, जब आप निम्नलिखित ठोसों को (i) ऊर्ध्वाधर रूप से और (ii) क्षैतिज रूप से काटते हैं?
   (a) एक ईंट (b) एक गोल सेब (c) एक पासा
   (d) एक बेलनाकार पाइप (e) एक आइसक्रीम शंकु

15.5.2 एक अन्य विधि छाया खेल वाली है

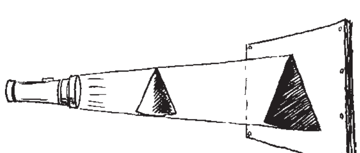


आकृति 15.22

एक छाया खेल

यह समझाने के लिए कि किस प्रकार त्रिविमीय वस्तुओं को द्विविमीय आकारों के रूप में देखा जा सकता है, छायाएँ इनके अच्छे (या सुंदर) उदाहरण हैं।

क्या आपने कभी एक छाया खेल (shadow play) देखा है? यह एक प्रकार का मनोरंजन है जिसमें सुस्पष्ट ठोस आकृतियों को एक प्रकाशमय स्रोत के सामने रखकर उनके गतिमान प्रतिबिंबों के भ्रम उत्पन्न किए जाते हैं। इसमें गणित की अवधारणाओं का कुछ अप्रत्यक्ष रूप से प्रयोग होता है।



आकृति 15.23

आपको इस क्रियाकलाप के लिए, एक प्रकाश के स्रोत तथा कुछ ठोस आकारों की आवश्यकता होगी। (यदि आपके पास एक ओवरहैड प्रोजेक्टर (overhead projector) है, तो ठोस को बल्ब के अंतर्गत रखिए और इनकी खोज कीजिए।) एक शंकु के ठीक सामने एक टार्च का प्रकाश डालिए। यह पर्दे पर किस प्रकार की छाया दर्शाता है (आकृति 15.23)?

ठोस तीन विमाओं वाला है। इसकी छाया की कितनी विमाएँ हैं?

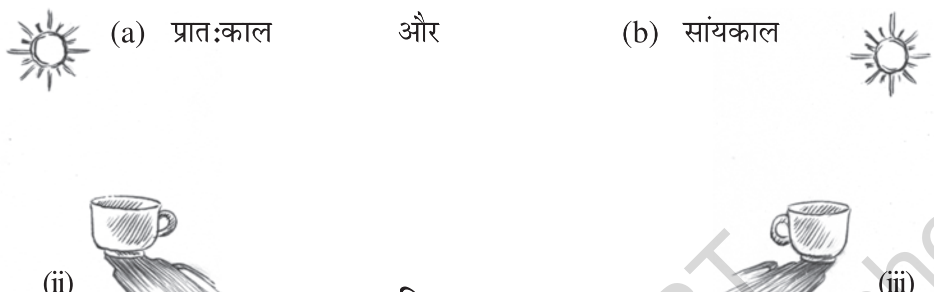
(i)

यदि आप इस खेल में, शंकु के स्थान पर एक घन को टार्च के सामने रखें, तो आपको किस प्रकार की छाया प्राप्त होगी?

प्रकाश के स्रोत की विभिन्न स्थितियों तथा ठोस वस्तु की विभिन्न स्थितियों को लेकर प्रयोग कीजिए। प्राप्त की गई छायाओं के आकारों तथा मापों पर इनके प्रभावों का अध्ययन कीजिए। यहाँ एक और मनोरंजक प्रयोग दिया जा रहा है,

जिसे संभवत: आप पहले ही कर चुके होंगे। एक वृत्ताकार चाय के प्याले को खुले में रख दीजिए, जब दोपहर 12 बजे के समय सूर्य उसके ठीक ऊपर हो। इसे आकृति 15.24 में दिखाया गया है। आपको उसकी छाया कैसी दिखाई देती है?

क्या यह छाया एक ही प्रकार की रहती है?

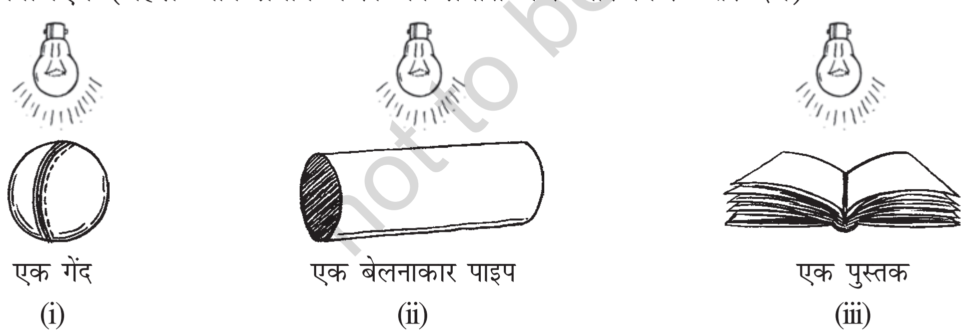


आकृति 15.24 (i) - (iii)

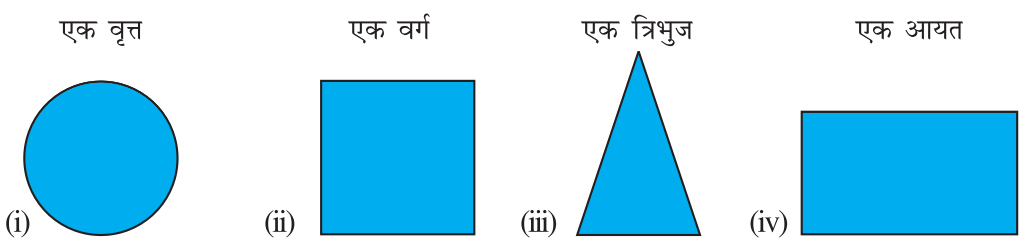
सूर्य की स्थितियों और प्रेक्षण के समयों के अनुसार, छायाओं का अध्ययन कीजिए।

प्रश्नावली 15.4

1. निम्नलिखित ठोसों के ठीक ऊपर एक जलता हुआ बल्ब रखा गया है। प्रत्येक स्थिति में प्राप्त छाया के आकार का नाम बताइए। इस छाया का एक रफ़ चित्र बनाने का प्रयास कीजिए। (पहले आप प्रयोग करने का प्रयास करें और फिर उत्तर दें।)



2. यहाँ कुछ 3-D वस्तुओं की छायाएँ दी गई हैं जो उन्हें एक ओवरहैड प्रोजेक्टर के लैंप (बल्ब) के अंतर्गत या नीचे रख कर प्राप्त की गई हैं। प्रत्येक छाया से मिलान वाले ठोस की पहचान कीजिए। (इनमें एक से अधिक उत्तर हो सकते हैं!)



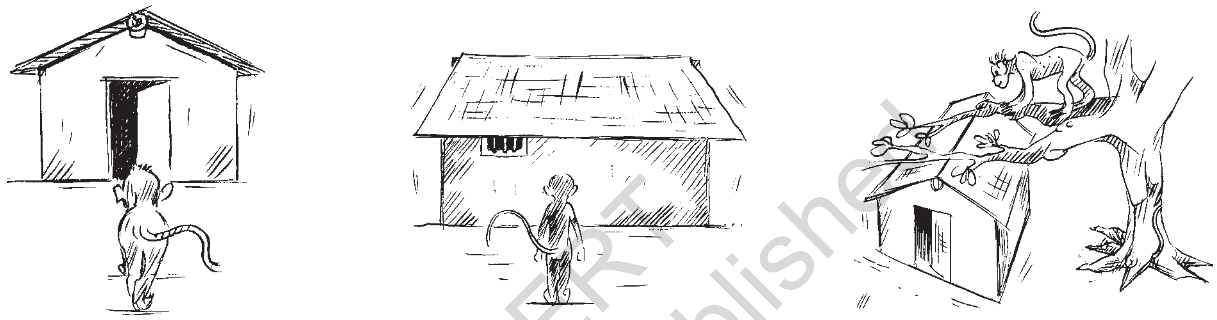
3. जाँच कीजिए कि क्या ये कथन सत्य हैं।

(i) एक घन एक आयत के आकार की छाया दे सकता है।

(ii) एक घन एक षड्भुज के आकार की छाया दे सकता है।

15.5.3 एक तीसरी विधि यह है कि इसके विभिन्न दृश्य देखने के लिए इसे कुछ विशेष कोणों से देखा जाए

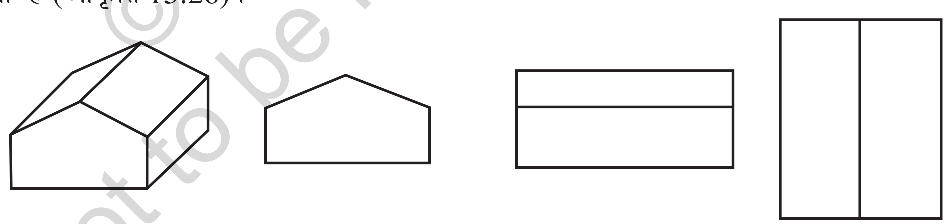
कोई भी व्यक्ति किसी वस्तु को उसके सामने से या उसकी एक ओर (पार्श्व) से या उसके ऊपर से देख सकता है। प्रत्येक बार उसे एक भिन्न दृश्य मिलेगा (आकृति 15.25)।



सामने से दृश्य   पार्श्व दृश्य   ऊपर से दृश्य

आकृति 15.25

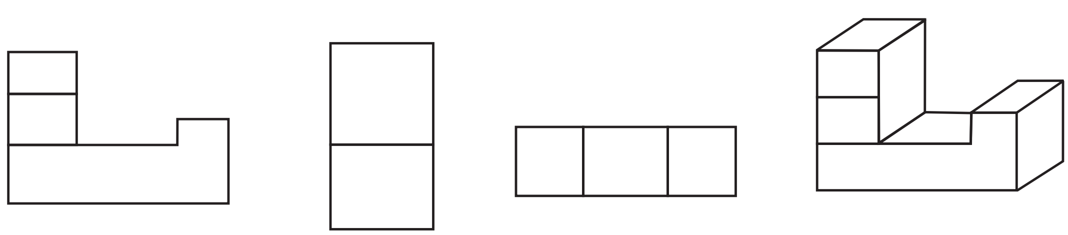
यहाँ, एक उदाहरण दिया जा रहा है, जिसमें कोई व्यक्ति एक भवन के विभिन्न दृश्य प्राप्त कर सकता है (आकृति 15.26)।



भवन   सामने का दृश्य   पार्श्व दृश्य   ऊपर का दृश्य

आकृति 15.26

आप इन्हें, घनों को जोड़ने से बनी आकृतियों के लिए भी कर सकते हैं।



आकृति 15.27

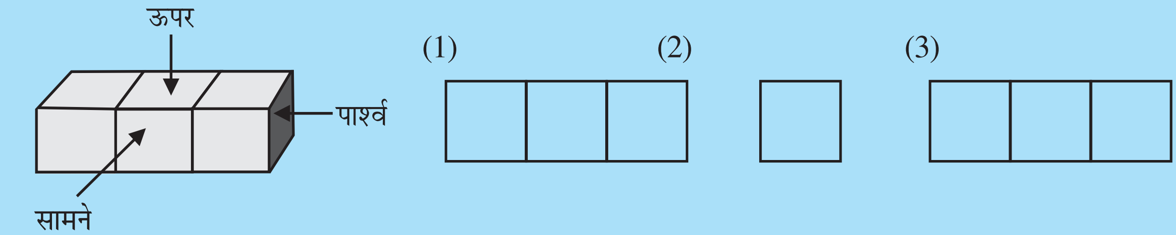
घनों को एक साथ रखकर ठोस बनाइए और फिर उन्हें विभिन्न दिशाओं से देखकर उनके ऊपर बताए अनुसार चित्र बनाने का प्रयत्न कीजिए।

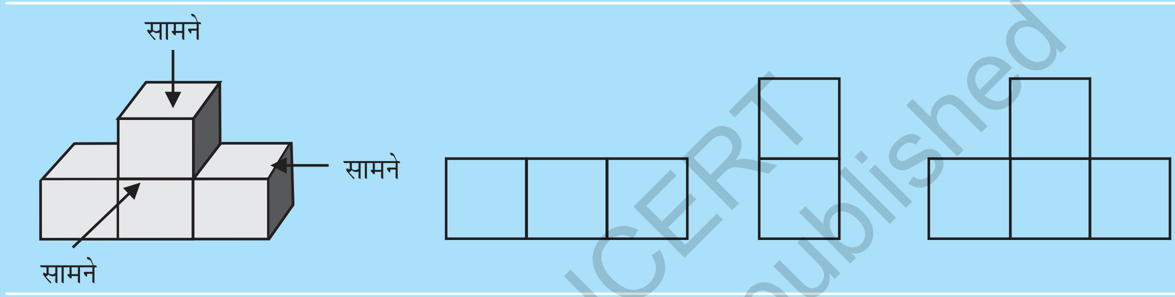
प्रयास कीजिए

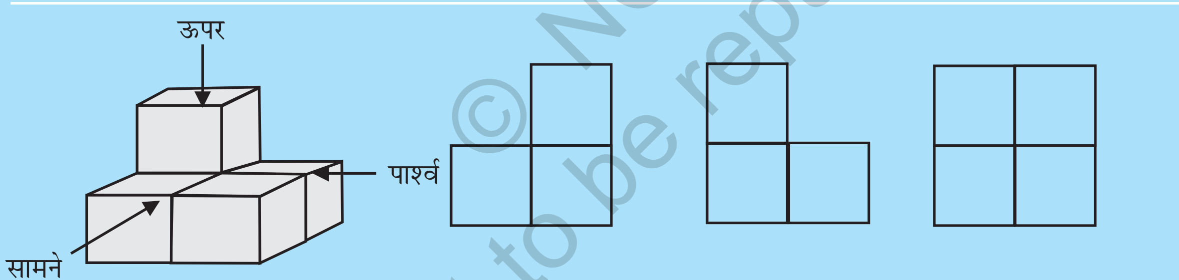
1. प्रत्येक ठोस के लिए, तीन दृश्य (1), (2) और (3) दिए हैं। प्रत्येक ठोस के लिए संगत ऊपर के, सामने के और पार्श्व दृश्यों की पहचान कीजिए।

ठोस **उसके दृश्य**

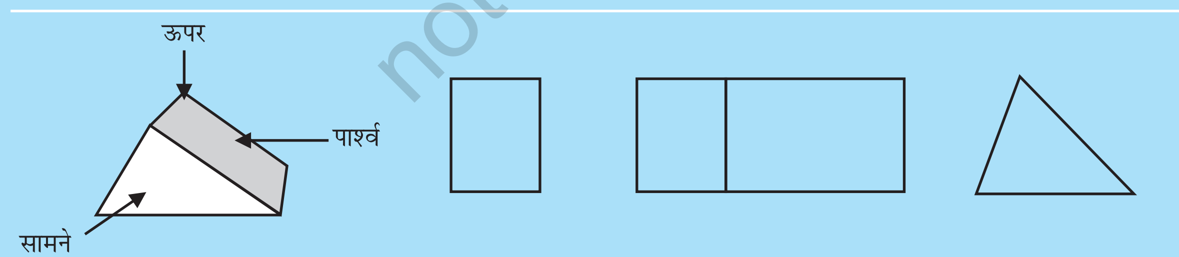
(1) (2) (3)



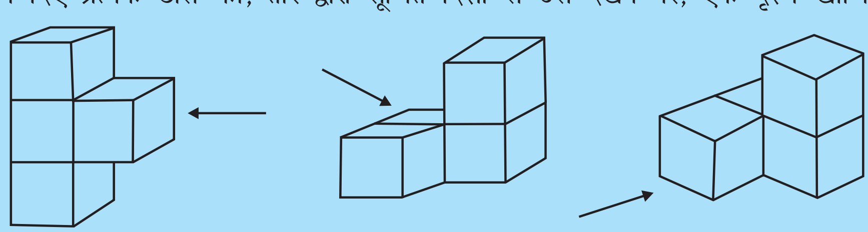




5 घन



2. नीचे दिए प्रत्येक ठोस का, तीर द्वारा सूचित दिशा से उसे देखने पर, एक दृश्य खींचिए।



(i) (ii) (iii)

हमने क्या चर्चा की ?

1. वृत्त, वर्ग, आयत, चतुर्भज और त्रिभुज **समतल** आकृतियों के उदाहरण हैं तथा घन, घनाभ, गोला, बेलन, शंकु और पिरामिड **ठोस आकारों** के उदाहरण हैं।
2. समतल आकृतियों की दो विमाएँ (संक्षिप्त में **2-D**) होती हैं तथा ठोस आकारों की तीन विमाएँ (संक्षिप्त में **3-D**) होती हैं।
3. ठोस आकार के कोने उसके **शीर्ष**, उसके ढाँचें के रेखाखंड उसके **किनारे** (या कोर) तथा उसके सपाट पृष्ठ उसके **फलक** कहलाते हैं।
4. ठोस का एक **जाल** दो विमाओं में एक ऐसा ढाँचा (या रूप रेखा) है, जिसे मोड़कर वह ठोस प्राप्त हो जाता है। एक ही ठोस के अनेक प्रकार के जाल हो सकते हैं।
5. वास्तविक रूप से, ठोस आकारों को सपाट पृष्ठों (जैसे कागज़) पर खींचा जा सकता है। हम इसे **3-D ठोस का 2-D निरूपण कहते** हैं।
6. एक ठोस के दो प्रकार के चित्र बनाना संभव है :
   (a) एक **तिर्यक चित्र,** जिसमें लंबाइयाँ समानुपाती नहीं होती हैं। फिर भी यह ठोस के रुप के बारे में सभी महत्वपूर्ण जानकारी प्रदान कर देता है।
   (b) एक **समदूरीक चित्र** को एक समदूरीक बिंदुकित कागज़ पर खींचा जाता है, जिसका एक प्रतिदर्श इस पुस्तक के अंत में दिया गया है। किसी ठोस के एक समदूरीक चित्र में लंबाइयों को समानुपाती रखा जाता है।
7. **ठोस आकारों का चित्रण** एक बहुत ही उपयोगी कौशल है। आपको ठोस आकार के छिपे हुए भाग दिखाई दे जाने चाहिए।
8. एक ठोस के विभिन्न भागों को अनेक विधियों से देखा जा सकता है।
   (a) एक विधि यह है कि दिए हुए आकार को काट लिया जाए। इससे हमें ठोस का एक **अनुप्रस्थ-काट** प्राप्त हो जाती है।
   (b) एक अन्य विधि यह है कि एक 3-D आकार की एक 2-D छाया देखी जाए।
   (c) तीसरी विधि यह है कि ठोस आकार को विभिन्न कोणों से देखा जाए। देखे गए आकार का **सामने का दृश्य, पार्श्व दृश्य** और **ऊपर का दृश्य** हमें उस आकार के बारे में बहुत अधिक जानकारी प्रदान कर सकते हैं।